

ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 1- SỐ TỰ NHIÊN

CHỦ ĐỀ 4. Dãy số VIẾT THEO QUY LUẬT: Dãy cộng và các dãy khác

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

- Dãy cộng là dãy số có mỗi số hạng (kể từ số hạng thứ hai) đều lớn hơn số hạng liền trước nó cùng một số đơn vị.

- Dãy cộng là dãy số cách đều

- Một số phương pháp giải:

Phương pháp 1:

+ Tính số các số hạng trong tổng theo công thức :

$$Số\ số\ hạng = (Số\ hạng\ cuối - Số\ hạng\ đầu) : Khoảng\ cách + 1$$

+ Nhóm hai số hạng thành một cặp sao cho giá trị trong mỗi cặp bằng nhau. (Lưu ý có thể nhóm vừa hết các số hạng thành các cặp nếu số số hạng là số chẵn hoặc còn thừa một số hạng nếu số số hạng là số lẻ).

Cách tính số hạng thứ n trong dãy là:

$$Số\ hạng\ thứ\ n = (Số\ số\ hạng - 1) . Khoảng\ cách + Số\ hạng\ đầu$$

+ Tính tổng dựa vào giá trị của một cặp và số cặp vừa nhóm. Lưu ý khi tìm số cặp mà còn dư một số hạng thì khi tìm tổng ta phải cộng số hạng dư đó vào.

Phương pháp 2:

+ Dựa vào công thức:

$$Số\ số\ hạng = (Số\ hạng\ cuối - Số\ hạng\ đầu) : Khoảng\ cách + 1$$

$$Tổng = (Số\ hạng\ đầu + Số\ hạng\ cuối) . Số\ số\ hạng : 2$$

Phương pháp 3:

+ Dựa vào bài toán Gau-xơ :

Viết tổng A theo thứ tự ngược lại và tính A + A. Từ đó tính được tổng A.

Phương pháp 4:

+ Phương pháp khử liên tiếp: Tách một số hạng thành một hiệu trong đó số trừ của hiệu trước bằng số bị trừ của hiệu sau: $a_1 = b_1 - b_2$, $a_2 = b_2 - b_3$, ..., $a_n = b_n - b_{n+1}$.

Khi đó ta có ngay $A_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$

Phương pháp 5: Phương pháp dự đoán và quy nạp.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Tính tổng các số hạng cách đều

I. Phương pháp giải

Muốn tính tổng của một dãy số có quy luật cách đều chúng ta thường hướng dẫn học sinh tính theo các bước như sau:

$$\text{Số số hạng} = \frac{|\text{Số hạng cuối} - \text{Số hạng đầu}|}{\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp}} + 1$$

Bước 1: Tính số số hạng có trong dãy:

$$\text{Tổng của dãy} = \left(\frac{\text{Số hạng cuối} + \text{Số hạng đầu}}{2} \right) \cdot \text{Số số hạng}$$

Bước 2: Tính tổng của dãy:

(quy tắc dân gian: dĩ đầu, cộng vĩ, chiết bán, nhân chi)

Với dãy số tăng dần ta có:

$$\text{Số hạng cuối} = \text{Số hạng đầu} + n$$

$$\text{Số hạng đầu} = \text{Số hạng cuối} - n$$

Ở các bài tập dưới đây, dãy cộng với số tự nhiên đa phần ta gặp đó là dãy tăng dần.

$$\text{Tổng các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến } n \text{ là: } S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1) \cdot n}{2} \quad \text{với } n \in \mathbb{N}; n > 3$$

*) **Chú ý:**

II. Bài toán

Bài 1: Có bao nhiêu số tự nhiên có hai chữ số? Tính tổng của chúng.

Lời giải:

Cách 1:

Các số tự nhiên có hai chữ số là 10; 11; 12; ...; 99

Số các số này là: $99 - 10 + 1 = 90$ (số)

Ta có: $A = 10 + 11 + 12 + \dots + 99$ (1)

$$A = 99 + 98 + \dots + 11 + 10 \quad (2)$$

Cộng (1) với (2) và áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng ta được:

$$A + A = (10 + 99) + (11 + 98) + \dots + (98 + 11) + (99 + 10) = 109 + 109 + \dots + 109 + 109$$

$$\text{Nên } 2A = 109 \cdot 90 \Rightarrow A = 109 \cdot 90 : 2 = 45 \cdot 109 = 4905$$

Cách 2:

$$\text{Số số hạng của dãy: } \frac{(99 - 10)}{1} + 1 = 90 \quad (\text{số hạng})$$

(khoảng cách 2 số hạng liên tiếp của dãy là 1, số hạng đầu của dãy là 10, số hạng cuối của dãy là 99)

$$\text{Tổng của dãy: } A = \frac{99 + 10}{2} \cdot 90 = 4905$$

Bài 1: Tính giá trị của A biết $A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2014$.

Lời giải:

Dãy số trên có số hạng là $(2014 - 1):1 + 1 = 2014$ (số hạng)

Giá trị của A là $(2014+1). 2014:2 = 2029105$

Đáp số: 2029105

Bài 3: Cho dãy số: 2, 4, 6, 8, 10, 12, Tìm số hạng thứ 2014 của dãy số trên?

$$\text{Số số hạng} = \frac{|\text{Số hạng cuối} - \text{Số hạng đầu}|}{\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp}} + 1$$

*) Phân tích: Từ công thức

Ta có: $(\text{Số số hạng} - 1)(\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp}) = |\text{Số hạng cuối} - \text{Số hạng đầu}|$

$$[(\text{Số số hạng} - 1) \times (\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp})] + \text{Số hạng đầu} = \text{Số hạng cuối}$$

$$\text{Số hạng đầu} = \text{Số hạng cuối} - [(\text{Số số hạng} - 1) \times (\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp})]$$

Lời giải:

Số hạng thứ 2014 của dãy số trên là $(2014 - 1). 2 + 2 = 4028$

Đáp số: 4028

Bài 4: Tính tổng 50 số lẻ liên tiếp biết số lẻ lớn nhất trong dãy đó là 2019?

*) Phân tích: Với dãy số tăng dần ta có:

$$\text{Số hạng cuối} = \text{Số hạng lẻ đầu tiên}$$

$$\text{Số hạng đầu} = \text{Số hạng chẵn đầu tiên}$$

$$\text{Số hạng đầu} = \text{Số hạng cuối} - [(\text{Số số hạng} - 1) \times (\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp})]$$

Lời giải:

Số hạng bé nhất trong dãy số đó là: $2019 - (50 - 1).2 = 1921$

Tổng của 50 số lẻ cần tìm là $(2019 + 1921). 50:2 = 98500$

Đáp số: 98500

Bài 5: Một dãy phố có 15 nhà. Số nhà của 15 nhà đó được đánh là các số lẻ liên tiếp, biết tổng của 15 số nhà của dãy phố đó bằng 915. Hãy cho biết số nhà đầu tiên của dãy phố đó là số nào?

*) Phân tích: Dựa vào công thức với dãy số có quy luật tăng dần:

$$\text{Số số hạng} = \frac{|\text{Số hạng cuối} - \text{Số hạng đầu}|}{\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp}} + 1$$

Bước 1:

$$\text{Suy ra: } (\text{Số số hạng} - 1)(\text{Khoảng cách 2 số hạng liên tiếp}) = \text{Số hạng cuối} - \text{Số hạng đầu}$$

$$\text{Bước 2:} \quad \text{Tổng của dãy} = \left(\frac{\text{Số hạng cuối} + \text{Số hạng đầu}}{2} \right) \cdot \text{Số số hạng}$$

$$\text{Suy ra:} \quad (2 \cdot \text{Tổng của dãy}) : (\text{Số số hạng}) = \text{Số hạng cuối} + \text{Số hạng đầu}$$

Bài toán cho chúng ta biết số số hạng là 15, khoảng cách của 2 số hạng liên tiếp trong dãy là 2 và tổng của dãy số trên là 915. Từ bước 1 và 2 học sinh sẽ tính được hiệu và tổng của số nhà đầu và số nhà cuối. Từ đó ta hướng dẫn học sinh chuyển bài toán về dạng tìm số bé biết tổng và hiệu của hai số đó.

Lời giải:

$$\text{Hiệu giữa số nhà cuối và số nhà đầu là} \quad (15 - 1) \cdot 2 = 28$$

$$\text{Tổng của số nhà cuối và số nhà đầu là} \quad 915 \cdot 2 : 15 = 122$$

$$\text{Số nhà đầu tiên trong dãy phố đó là} \quad (122 - 28) : 2 = 47 \quad (\text{bài toán tổng hiệu quen thuộc})$$

Đáp số: 47

Bài 6: Tính tổng của 21 số lẻ liên tiếp đầu tiên.

*) *Phân tích:*

Để giải bài toán ta cần xác định được quy luật cách đều của các số lẻ liên tiếp. Tuy nhiên các số hạng trong tổng đã biết nên ta chỉ cần áp dụng công thức tính tổng như đã nêu trong phương pháp

Lời giải:

$$\text{Tổng 21 số lẻ liên tiếp đầu tiên là:} \quad S = 1 + 3 + 5 + \dots + 33 + 35 + 37 + 39 + 41$$

Cách 1: Tính tổng theo công thức trong phương pháp

Các số hạng liên tiếp trong tổng cách đều nhau một giá trị $d = 2$ và trong tổng có 21 số hạng nên:

$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = \frac{(41 + 1) \cdot 21}{2} = 441$$

Cách 2: Nhóm số hạng tạo thành những cặp số có tổng bằng nhau, ta thấy:

$$1 + 41 = 42 \quad 3 + 39 = 42 \quad 5 + 37 = 42 \quad 7 + 35 = 42 \dots$$

$\Rightarrow$ Nếu ta sắp xếp các cặp số từ hai đầu dãy số vào, ta được các cặp số đều có tổng là 42

Số cặp số là: $20 : 2 = 10$ (cặp số) dư một số hạng ở chính giữa dãy số là số 21

$$\text{Vậy tổng của 19 số lẻ liên tiếp đầu tiên là:} \quad 42 \cdot 10 + 21 = 441$$

Bài 7: Tính tổng của $A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2021$.

*) *Phân tích:*

Nhận thấy dãy số $1, 2, 3, 4, \dots, 2019$ là dãy số tự nhiên cách đều. Khoảng cách giữa hai số hạng liên tiếp là 1.

Để tính tổng A ta vận dụng cả bốn phương pháp đầu đã nêu đều được cụ thể ta có các cách giải sau:

Lời giải:

$$\text{Cách 1:} \quad \text{Tổng } A \text{ có số số hạng là:} \quad (2021 - 1) : 1 + 1 = 2021 \quad (\text{số hạng})$$

Do đó ta có thể chia A thành 1010 cặp và dư 1 số hạng chẵn hạn số 2021

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2020 + 2021$$

$$A = (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2020) + 2021$$

$$A = (1 + 2020) + (2 + 2019) + \dots + (1010 + 1011) + 2021 \quad A = 2021 \cdot 1010 + 2021$$

$$A = 2021 \cdot 1011$$

$$A = 2043231$$

Cách 2:

Tổng A có số số hạng là: $(2021 - 1) : 1 + 1 = 2021$

Tính tổng: $A = (2021 + 1) \cdot 2021 : 2 = 2043231$

Cách 3: Tính $A + A$

$$\begin{array}{r} A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2020 + 2021 \\ + \quad A = 2021 + 2020 + 2019 + 2018 \dots + 2 + 1 \\ \hline \end{array} \quad (\text{có } 2021 \text{ số hạng})$$

$$\text{Do đó: } 2A = 2022 + 2022 + 2022 + \dots + 2022 + 2022 \quad (\text{có } 2021 \text{ số hạng})$$

$$\Rightarrow 2A = 2022 \cdot 2021$$

$$\Rightarrow A = 2022 \cdot 2021 : 2 = 2043231$$

Cách 4: Trước hết ta tách số hạng đầu tiên của A (là số 1) thành một hiệu trong đó có một số hạng là tích của hai số hạng liên tiếp trong tổng A (một thừa số là số hạng đầu tiên 1):

$$1 = \frac{1}{2} (1 \cdot 2 - 0 \cdot 1)$$

Từ đó ta có thể tách các số hạng còn lại của tổng A thành các hạng tử mà khi tính tổng A các hạng tử có thể triệt tiêu hàng loạt:

$$2 = \frac{1}{2} (2 \cdot 3 - 1 \cdot 2); \quad 3 = \frac{1}{2} (3 \cdot 4 - 2 \cdot 3); \dots; 2021 = \frac{1}{2} (2021 \cdot 2022 - 2020 \cdot 2021)$$

Do đó:

$$A = \frac{1}{2} (1 \cdot 2 - 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 + \dots - 2019 \cdot 2020 + 2021 \cdot 2022 - 2020 \cdot 2021)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2021 \cdot 2022 = 2043231$$

Cách 5: Từ cách phân tích để có lời giải cách 4 trên chúng ta cũng có thể nghĩ đến trình bày bài toán theo cách sau gọn hơn:

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2020 + 2021$$

$$2A = 2(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2021)$$

$$2A = 1.2 + 2.2 + 2.3 + 2.4 + \dots + 2.2021$$

$$2A = 1.(2-0) + 2.(3-1) + 3.(4-2) + \dots + 2021.(2022-2020)$$

$$2A = 1.2 + 2.3 - 1.2 + 3.4 - 2.3 + \dots + 2022.2021 - 2020.2021$$

$$2A = 2022.2021$$

$$A = 2022.2021 : 2 = 2043231$$

Nhận xét: Ở cách 5 dùng phương pháp khử liên tiếp. Mỗi số hạng của A (chỉ có một thừa số) và khoảng cách giữa hai số hạng là 1 ta đã nhân A với 2 lần khoảng cách

Bài 8: Tính tổng $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$.

Lời giải:

Cách 1:

$$\text{Ta có: } A = \frac{(1+100).100}{2} = 5050 \Rightarrow \text{TQ: } A = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

$$\text{Cách 2: } A = 1 + 2 + 3 + \dots + 100; A = 100 + 99 + 98 + \dots + 1$$

$$\Rightarrow 2A = (1+100) + (2+98) + \dots + (100+1) = 101.101 = 5050$$

Cách 3:

$$1 = \frac{1}{2}(1.2 - 0.1);$$

$$2 = \frac{1}{2}(2.3 - 1.2);$$

$$3 = \frac{1}{2}(3.4 - 2.3);$$

.....

$$100 = \frac{1}{2}(100.101 - 99.100)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}.100.101 = 5050$$

Bài 9: Tính tổng $A = 2 + 4 + 6 + \dots + 100$.

Lời giải:

$$\text{Tổng } A \text{ có: } (100-2):2+1=50 \text{ (số hạng)}$$

$$A = \frac{(100+2).50}{2} = 2550 \Rightarrow \text{TQ: } A = 2 + 4 + \dots + 2n (\forall n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow A = \frac{(2+2n).n}{2} = n(n+1)$$

Bài 10: Tính tổng $A = 1 + 3 + 5 + \dots + 49$.

Lời giải:

$$\text{Tổng } A \text{ có: } (49-1):2+1=25 \text{ (số hạng)}$$

$$A = \frac{(1+49).25}{2} = \frac{50.25}{2} = 625$$

$$TQ: A = 1+3+...+(2n-1) (\forall n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow A = \frac{(1+2n-1).n}{2} = n.n = n^2$$

$$S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + 9 + \frac{19}{2}$$

Bài 11: Tính tổng

*) *Phân tích:*

Đây là ví dụ mà các số hạng trong tổng vừa là số nguyên, vừa là phân số. Để tìm ra quy luật của các số hạng trong tổng ta cần viết các số nguyên trong tổng dưới dạng phân số có mẫu số là 2. Khi đó ta có tổng các phân số có cùng mẫu số, và tổng các tử số chính là tổng các số tự nhiên liên tiếp

Lời giải:

$$\text{Ta có: } S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} + \dots + 9 + \frac{19}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{19}{2} = \frac{1+2+\dots+19}{2}$$

Xét tổng $1+2+\dots+18+19$ là tổng của 19 số tự nhiên liên tiếp

$$1+2+\dots+18+19 = \frac{(19+1).19}{2} = 190$$

$$\text{Ta có tổng } S = \frac{190}{2} = 95$$

Bài 12: Tính tổng $S = 2+5+8+11+\dots+47+50$

Lời giải:

Các số hạng cách đều nhau một giá trị $d=3$

$$\text{Tổng này có } \frac{(50-2):3+1=17}{\text{số hạng}} \Rightarrow S = 17.(50+2):2 = 442$$

Bài 13: Tính tổng $S = 5+10+15+\dots+100$

Lời giải:

Các số hạng cách đều nhau một giá trị $d=5$

$$\text{Tổng này có } \frac{(100-5):5+1=20}{\text{số hạng}}$$

$$\Rightarrow S = 20.(100+5):2 = 1050$$

Bài 14: Tính tổng $A = 98+93+88+\dots+13+8+3$

Lời giải:

$$\text{Tổng A có } \frac{(98-3):5+1=20}{\text{(số hạng)}} \Rightarrow A = \frac{(98+3).20}{2} = 1010$$

Bài 15: Cho $S = 7+9+11+\dots+97+99$

- a) Tính tổng S trên.
 b) Tìm số hạng thứ 33 của tổng trên.

Lời giải:

+ Số hạng đầu là: 7 và số hạng cuối là: 99.
 + Khoảng cách giữa hai số hạng là: 2
 + S có số số hạng được tính bằng cách $(99 - 7) : 2 + 1 = 47$
 Tổng của dãy: $S = (99 + 7).47 : 2 = 2491$

- b) Số hạng thứ 33 của tổng trên là: $(33 - 1).2 + 7 = 71$

Bài 16: Cho dãy số 2; 7; 12; ...; 22; ...

- a) Nêu quy luật của dãy số trên.
 b) Viết tập hợp B gồm 5 số hạng liên tiếp của dãy số đó, bắt đầu từ số hạng thứ năm.
 c) Tính tổng 100 số hạng đầu tiên của dãy số.

Lời giải:

Xét dãy số 2; 7; 12; ... 22...

- a) Quy luật: Dãy số cách đều với khoảng cách 5
 b) $B = \{22; 27; 32; 37; 42\}$
 c) Gọi số hạng thứ 100 của dãy là x , ta có: $(x - 2) : 5 + 1 = 100$
 $\Rightarrow x = 497$. Do vậy tổng 100 số hạng đầu của dãy là:
 $(2 + 497) \cdot 100 : 2 = 24950$

Bài 17: Người ta viết liền nhau các số tự nhiên 123456....

- a) Hỏi các chữ số đơn vị của các số 53 ; 328 ; 1587 đứng ở hàng thứ bao nhiêu?
 b) Chữ số viết ở hàng thứ 427 là chữ số nào?

Lời giải:

Viết liền nhau các số tự nhiên 123456...

- a) 9 chữ số đầu tiên: $1, 2, \dots, 9$.
 44 số có hai chữ số tiếp theo: $10, 11, \dots, 53$.
 Chữ số hàng đơn vị của số 53 ở hàng số: $9 + 44.2 = 97$
 Tương tự, chữ số hàng đơn vị của số 328 ở hàng số $9 + 90.2 + 229.3 = 876$;
 chữ số hàng đơn vị của số 1587 ở hàng số $9 + 90.2 + 900.3 + 588.4 = 5241$.
 b) Ta có: $^{427} = 9 + 90.2 + 79.3$ ở 1

Khi đó số thứ 81 có 3 chữ số là: 179 .

Chữ số viết ở hàng thứ 427 là chữ số 1.

$$S = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + 3 + \dots + \frac{101}{3} + \frac{103}{3} + 35$$

Bài 18: Tính tổng

Lời giải:

Ta có
$$S = \frac{1}{3} + 1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + 3 + \dots + \frac{101}{3} + \frac{103}{3} + 35 = \frac{1+3+5+7+\dots+101+103+105}{3}$$

Xét tổng $1+3+5+\dots+101+103+105$ là tổng các số tự nhiên lẻ liên tiếp từ 1 đến 105, các số tự nhiên lẻ liên tiếp cách đều nhau 2 đơn vị

Tổng này có: $n = (105 - 1) : 2 + 1 = 53$ số hạng

$$1+3+5+\dots+101+103+105 = \frac{(105+1).53}{2} = 2809$$

Ta có tổng
$$S = \frac{2809}{3}$$

Bài 19: Tính tổng $B = 1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 70 + 73$.

Lời giải:

$$\begin{aligned} B &= 1 + 4 + 7 + 10 + \dots + 70 + 73 \\ \Rightarrow 6B &= 1.6 + 4.6 + 7.6 + 10.6 + \dots + 70.6 + 73.6 \\ \Rightarrow 6B &= 1.(4+2) + 4.(7-1) + 7.(10-4) + \dots + 73.(76-70) \\ \Rightarrow 6B &= 1.4 + 1.2 + 4.7 - 1.4 + 7.10 - 7.4 + \dots + 73.76 - 73.70 \\ \Rightarrow 6B &= 2 + 73.76 \\ \Rightarrow 6B &= 5550 \\ \Rightarrow B &= 925 \end{aligned}$$

*) *Nhận xét:* Như vậy tùy từng dạng bài và mức độ tiếp thu kiến thức của mỗi học sinh, thầy cô có thể vận dụng linh hoạt các phương pháp giải sao cho học trò dễ nhớ, phù hợp.

*) *Mở rộng:* Viết công thức tổng quát tính tổng dãy số tự nhiên liên tiếp cách đều sau:

$$A_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

Lời giải:

Bằng các cách tính tổng tương tự như bài toán 1 ta có:

$$A_n = n(n+1) : 2 \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad (1)$$

Tuy nhiên có thể hướng dẫn học sinh chứng minh bằng phương pháp qui nạp:

- Khi $n = 1$ ta có: $A_1 = 1(1+1) : 2 = 1$ đúng.

- Giả sử bài toán đúng với $n = k > 1 (k \in \mathbb{N})$, nghĩa là: $A_k = 1 + 2 + 3 + \dots + (k-1) + k = k(k+1) : 2$

- Ta xét:

$$\begin{aligned}
 A_{k+1} &= 1+2+3+\dots+(k-1)+k+(k+1) \\
 &= A_k + (k+1) \\
 &= k(k+1):2 + (k+1) \\
 &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
 \end{aligned}$$

Tức là bài toán đúng với $n = k+1$.

Vậy với mọi số tự nhiên n khác 0, ta có: $A_n = 1+2+3+\dots+(n-1)+n = n(n+1):2$

Nhận xét: Ta có thể chứng minh ⁽¹⁾ bằng phương pháp qui nạp sau đó áp dụng để tính các tổng có dạng đó.

Dạng 2: Tổng có dạng $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n$ (1)

hoặc $S = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots + \frac{1}{a^n}$ (2) với $a \in \mathbb{N}^*; a > 1$

I. Phương pháp giải

Bước 1: Nhân vào hai vế của đẳng thức với số a ta được:

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n \quad (1) \quad \text{hoặc} \quad S = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots + \frac{1}{a^n} \quad (2) \quad \text{với } a \in \mathbb{N}^*; a > 1$$

$$a.S = a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n+1} \quad (3)$$

$$\text{Hoặc} \quad a.S = a + 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1}{a^{n-1}} \quad (4)$$

$$\text{Bước 2: Lấy (3) - (2) vế với vế ta được:} \quad a.S - S = a^{n+1} - 1 \Rightarrow S = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

$$\text{Lấy (4) - (2) vế với vế ta được:} \quad a.S - S = a - \frac{1}{a^n} \Rightarrow S = \frac{a^{n+1} - 1}{a^n(a - 1)}$$

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100}$.

*) *Phân tích:* Kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với 2. Do đó nếu ta nhân 2 vào tổng S thì ta có tổng $2S$ với các số hạng từ 2 đến 2^{100} giống như trong tổng S , khi đó nếu lấy số tổng $2S$ trừ đi tổng S thì các số hạng từ 2 đến 2^{100} bị triệt tiêu và tính được tổng S .

Lời giải:

Ta có: $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$

Nhân 2 vào tổng S ta được $2S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{101}$

$$\Rightarrow 2S - S = S = 2^{101} - 1$$

Bài 2: Tính tổng $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}}$.

*) *Phân tích:* Kể từ số hạng thứ nhất, mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với $\frac{1}{2}$.

Do đó nếu ta nhân 2 vào tổng S thì ta có tổng $2S$ với các số hạng từ $\frac{1}{2}$ đến $\frac{1}{2^{99}}$, giống như trong tổng S ,

khi đó nếu lấy tổng $2S$ trừ đi tổng S thì các số hạng từ $\frac{1}{2}$ đến $\frac{1}{2^{99}}$ bị triệt tiêu và tính được tổng S .

Lời giải:

Ta có
$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow 2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{99}}$$

$$\Rightarrow 2S - S = S = 2 - \frac{1}{2^{100}}$$

Bài 2: Tính tổng $S = 1 + \frac{5}{7} + \frac{5}{7^2} + \frac{5}{7^3} + \dots + \frac{5}{7^{55}}$.

*) *Phân tích:* Nhận thấy các số hạng từ $\frac{5}{7}$ đến $\frac{5}{7^{55}}$ đều có cùng tử số là 5, và kể từ số hạng $\frac{5}{7}$ thì các số

hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với $\frac{1}{7}$. Nếu nhân 7 vào tổng S thì ta được tổng $7S$

có các số hạng từ $\frac{5}{7}$ đến $\frac{5}{7^{54}}$ giống như trong tổng S . Do đó nếu lấy tổng $7S$ trừ đi tổng S thì các số

hạng từ $\frac{5}{7}$ đến $\frac{5}{7^{54}}$ bị triệt tiêu, từ đó tính được tổng S .

Lời giải:

Ta có
$$S = 1 + \frac{5}{7} + \frac{5}{7^2} + \frac{5}{7^3} + \dots + \frac{5}{7^{55}} \Rightarrow 7S = 7 + 7 \cdot \left(\frac{5}{7} + \frac{5}{7^2} + \frac{5}{7^3} + \dots + \frac{5}{7^{55}} \right) = 7 + 5 + \frac{5}{7} + \frac{5}{7^2} + \frac{5}{7^3} + \dots + \frac{5}{7^{54}}$$

$$\Rightarrow 7S - S = 6S = 11 - \frac{5}{7^{55}} \Rightarrow S = \frac{11}{6} - \frac{5}{6 \cdot 7^{55}}$$

Bài 3: Tính tổng $S = \frac{1}{18} + \frac{1}{18.9} + \frac{1}{162.9} + \frac{1}{1458.9}$.

*) *Phân tích:* Nếu quy đồng phân số bài toán thì khá phức tạp. Nhận thấy các số 18, 162, 1458, đều chia hết cho 9, do đó ta sẽ phân tích các số này thành tích của 9 với một thừa số nào đó để xem có xuất hiện

tổng theo quy luật $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots$ hay không, từ đó có hướng tính S .

Lời giải:

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{18} + \frac{1}{18.9} + \frac{1}{162.9} + \frac{1}{1458.9} = \frac{1}{2.9} + \frac{1}{2.9^2} + \frac{1}{2.9^3} + \frac{1}{2.9^4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4} \right)$$

$$\text{Nhân 2 vào tổng } S \text{ ta được: } 2S = \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4}$$

$$\text{Nhân 18 vào tổng } S \text{ ta được: } 18S = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3}$$

$$\text{Trừ tổng } 18S \text{ cho tổng } 2S \text{ ta được: } 18S - 2S = 16S = 1 - \frac{1}{9^4} \Rightarrow 16S = \frac{9^4 - 1}{9^4} \Rightarrow S = \frac{9^4 - 1}{16.9^4} = \frac{410}{6561}$$

Bài 4: Tính tổng $S = 6 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + \dots + 6^{99}$.

$$\text{Ta có } S = 6 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + \dots + 6^{99} \Rightarrow 6S = 6^2 + 6^3 + 6^4 + \dots + 6^{99} + 6^{100}$$

$$6S - S = 5S = 6^{100} - 6 \Rightarrow S = (6^{100} - 6) : 5$$

Bài 5: Tính tổng $S = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{1000}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } S = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{1000} \Rightarrow 4S = 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{1000} + 4^{1001}$$

$$\Rightarrow 4S - S = 3S = 4^{1001} - 1 \Rightarrow S = (4^{1001} - 1) : 3$$

$$\text{Bài 6: Tính tổng } S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{100}}.$$

Lời giải:

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{100}} \Rightarrow 3S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$$

$$3S - S = 2S = 1 - \frac{1}{3^{100}} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{100}} \right)$$

Bài 7: Tính tổng $S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20} \Rightarrow 2S = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{20} + 2^{21}$$

$$\Rightarrow 2S - S = S = 2^{21} - 2$$

$$\text{Bài 8: Tính tổng } S = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots.$$

Lời giải:

$$\text{Ta có } S = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n} \quad (n \in \mathbb{N}, n > 3)$$

$$\Rightarrow 5S = 5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{n-1}}$$

$$\Rightarrow 5S - S = 5 - \frac{1}{5^n} \Rightarrow S = \frac{1}{4} \left(5 - \frac{1}{5^n} \right)$$

Bài 9: Tính tổng $B = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{18}$.

*) Phân tích: B là tổng của một dãy số mà các số hạng không cách đều. Nhận thấy mỗi số hạng đứng sau (kể từ số hạng thứ hai) trong tổng B đều bằng số hạng đứng trước nhân với 2. Ta tính $2.B - B$, từ đó tìm được B .

Lời giải:

$$B = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{18}$$

$$2B = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{18} + 2^{19}$$

$$\Rightarrow 2B - B = B = 2^{19} - 1$$

*) Mở rộng: Viết công thức tổng quát tính

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n \quad (a \in N, a > 1, n \in N)$$

*) Hướng dẫn giải:

Ta có: $a.S - S = a^{n+1} - 1 \quad (a - 1).S = a^{n+1} - 1$

$$S = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Ta có công thức tổng quát:

*) Khai thác các bài toán liên quan:

a) Viết công thức tính $a^{n+1} - 1 \quad (n \in N, a \geq 2)$.

b) Chứng minh rằng: $2015^{2015} - 1$ chia hết cho 2014.

Lời giải:

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad (n \in N, a \geq 2)$$

a) Từ kết quả bài toán mở rộng:

$$(a^{n+1} - 1) = (a - 1) \cdot (1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n)$$

Từ đó ta có công thức:

b) Nhận thấy $2015 - 1 = 2014$. Với công thức đã tìm được ở câu a, hơn nữa ta thấy

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^n \text{ có giá trị là số nguyên nên } (a^{n+1} - 1) : (a - 1)$$

$$A = 1 + 2015 + 2015^2 + 2015^3 + 2015^4 + \dots + 2015^{2014}$$

$$\Rightarrow 2015.A = 2015 + 2015^2 + 2015^3 + 2015^4 + \dots + 2015^{2015}$$

$$\Rightarrow 2015.A - A = 2015^{2015} - 1 \quad 2014.A = 2015^{2015} - 1$$

$$\Rightarrow 2015^{2015} - 1 = 2014.(1 + 2015 + 2015^2 + 2015^3 + 2015^4 + \dots + 2015^{2014})$$

Vậy $(2015^{2015} - 1) : 2014$.

Bài 10: Tính tổng $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \dots + 3^{48} + 3^{49}$. Tìm chữ số tận cùng của S .

* Phân tích: Với nhận xét trên ta nghĩ đến tìm ra hướng giải cho bài toán 5 như sau:

Lời giải:

+ Hướng giải 1: Nhận thấy S có 50 số hạng

$$S = \underbrace{(1 + 3 + 3^2 + 3^3)}_{\text{Nhóm 1}} + \underbrace{(3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7)}_{\text{Nhóm 2}} + \dots + \underbrace{(3^{44} + 3^{45} + 3^{46} + 3^{47})}_{\text{Nhóm 12}} + \underbrace{(3^{48} + 3^{49})}_{\text{Nhóm 13}}$$

Có 12 nhóm

$$S = 40 + 3^4 \cdot 40 + \dots + 3^{44} \cdot 40 + (3^{48} + 3^{49})$$

Ta có $(40 + 3^4 \cdot 40 + \dots + 3^{44} \cdot 40) : 10 \quad (1)$

Mà $3^{48} + 3^{49} = 3^{4 \cdot 12} + 3^{4 \cdot 12} \cdot 3 = 81^{12} + 81^{12} \cdot 3$ có chữ số tận cùng là 4 (Vì 81^{12} có chữ số tận cùng là 1)

(2)

Từ (1) và (2) suy ra S có chữ số tận cùng là 4.

+ Hướng giải 2: Ta có:

$$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \dots + 3^{48} + 3^{49}$$

$$3.S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \dots + 3^{49} + 3^{50}$$

$$3.S - S = 3^{50} - 1 \Rightarrow S = \frac{3^{50} - 1}{2}$$

Ta thấy $3^{50} - 1 = 3^{4 \cdot 12} \cdot 3^2 - 1 = 81^{12} \cdot 9 - 1$ có chữ số tận cùng là 8

$\Rightarrow S = \frac{3^{50} - 1}{2}$ có chữ số tận cùng là 4 hoặc 9.

Mà S có 50 số hạng, mỗi số của S là một số lẻ nên S là số chẵn. Do đó S có chữ số tận cùng là 4.

Dạng 3: Tổng có dạng $S = 1 + a^2 + a^4 + a^6 + \dots + a^{2n} \quad (1)$

hoặc $S = 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + \dots + \frac{1}{a^{2n}} \quad (2) \quad \text{với } a \in \mathbb{N}; a \geq 2$

I. Phương pháp giải

Bước 1: Nhân vào hai vế của đẳng thức với số a^2 ta được: $a^2.S = a^2 + a^4 + a^6 + \dots + a^{2n+2} \quad (3)$

Hoặc $a^2.S = a^2 + 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} + \dots + \frac{1}{a^{2n+2}} \quad (a \in \mathbb{N}^*; n \in \mathbb{N}) \quad (4)$

Bước 2: Lấy $a^2.S - S$ theo vế ta được $a^2.S - S = a^{2n+2} - 1 \Rightarrow S = \frac{a^{2n+2} - 1}{a^2 - 1} \quad (\text{theo 1 và 3})$

$a^2.S - S = a^2 - \frac{1}{a^{2n}} \Rightarrow S = \frac{a^{2n+2} - 1}{a^{2n+2} - a^{2n}} \quad (\text{theo 2 và 4})$

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{100}$.

*) *Phân tích*: Nhận thấy, kể từ số hạng thứ hai thì mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với 2^2 . Nếu ta nhân 2^2 vào tổng S , ta được tổng $2^2.S$ có các số hạng từ 2^2 đến 2^{100} trừ cho tổng S thì các số hạng từ 2^2 đến 2^{100} bị triệt tiêu và sẽ tính được tổng S

Lời giải:

Ta có $S = 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{100}$

Nhân 2^2 vào tổng S ta được: $2^2.S = 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{100} + 2^{102}$

$$2^2 S - S = 3S = 2^{102} - 1 \Rightarrow S = \frac{2^{102} - 1}{3}$$

Bài 2: Tính tổng $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \dots + \frac{1}{3^{98}} + \frac{1}{3^{100}}$.

*) *Phân tích*: Nhận thấy, kể từ số hạng thứ hai thì mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó

nhân với $\frac{1}{3^2}$. Nếu ta nhân 3^2 vào tổng S , ta được tổng $3^2.S$ có các số hạng từ $\frac{1}{3^2}$ đến $\frac{1}{3^{98}}$ giống như trong tổng S . Khi đó ta lấy tổng $3^2.S$ trừ đi tổng S thì các số hạng từ $\frac{1}{3^2}$ đến $\frac{1}{3^{98}}$ bị triệt tiêu và sẽ tính được tổng S

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \dots + \frac{1}{3^{98}} + \frac{1}{3^{100}} \\ \Rightarrow 3^2 S &= 3^2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \dots + \frac{1}{3^{98}} + \frac{1}{3^{100}} \right) \\ &= 3 + 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \dots + \frac{1}{3^{98}} \\ \Rightarrow 3^2 S - S &= 3 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^{100}} \Rightarrow 8S = \frac{11}{3} - \frac{1}{3^{100}} \Rightarrow S = \left(\frac{11}{3} - \frac{1}{3^{100}} \right) : 8 \end{aligned}$$

Bài 3: Tính tổng $S = 6^2 + 6^4 + 6^6 + \dots + 6^{98} + 6^{100}$.

Lời giải:

Ta có $S = 6^2 + 6^4 + 6^6 + \dots + 6^{98} + 6^{100} \Rightarrow 6^2 S = 6^4 + 6^6 + \dots + 6^{98} + 6^{100} + 6^{102}$

$$6^2 S - S = 35S = 6^{102} - 6^2 \Rightarrow S = \frac{6^{102} - 6^2}{35}$$

Bài 4: Tính tổng $S = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{102}$.

Lời giải:

Ta có $S = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{102} \Rightarrow 3^2 S = 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{102} + 3^{104}$

$$\Rightarrow 3^2 S - S = 8S = 3^{104} - 1 \Rightarrow S = (3^{104} - 1) : 8$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{100}}$$

Bài 5: Tính tổng

Lời giải:

Ta có:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{100}}$$

$$\Rightarrow 2^2 S = 2^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{98}} + \frac{1}{2^{100}} \right)$$

$$= 2^2 + 2 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{98}}$$

$$\Rightarrow 2^2 S - S = 2^2 + 2 + 1 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{100}} = \frac{11}{2} - \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow 3S = \frac{11}{2} - \frac{1}{2^{100}} \Rightarrow S = \left(\frac{11}{2} - \frac{1}{2^{100}} \right) : 3$$

Dạng 4: Tổng có dạng $S = a + a^3 + a^5 + a^7 + \dots + a^{2n+1}$ (1) **hoặc**

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^5} + \dots + \frac{1}{a^{2n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}; a \in \mathbb{N}^*) \quad (2)$$

I. Phương pháp giải

Bước 1: Nhân a^2 vào tổng S ta được: $a^2 S = a^3 + a^5 + a^7 + \dots + a^{2n+3}$ (3)

$$a^2 S = \frac{1}{a+a} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^5} + \dots + \frac{1}{a^{2n+1}} \quad (a \in \mathbb{N}^*; n \in \mathbb{N}^*) \quad (4)$$

Bước 2: Lấy $a^2 S$ trừ đi tổng S về theo về ta được:

$$a^2 S - S = a^{2n+3} - a \Rightarrow S = \frac{a^{2n+3} - a}{a^2 - 1} \quad (\text{theo 1 và 3})$$

$$a^2 S - S = a - \frac{1}{a^{2n+1}} \Rightarrow S = \frac{a^{2n+2} - 1}{a^{2n+3} - a^{2n+1}} \quad (\text{theo 2 và 4})$$

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S = 1 + 3^3 + 3^5 + 3^7 + \dots + 3^{103}$.

*) *Phân tích:* Nhận thấy, kể từ số hạng thứ hai thì mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó nhân với 3^2 . Nếu ta nhân 3^2 vào tổng S , ta được tổng $3^2 S$ có các số hạng từ 3^5 . Đến 3^{103} giống như trong tổng S . Khi đó ta lấy tổng $3^2 S$ trừ cho tổng S thì các số hạng từ 3^5 đến 3^{103} bị triệt tiêu và sẽ tính được tổng S .

Lời giải:

Ta có $S = 1 + 3^3 + 3^5 + 3^7 + \dots + 3^{103}$

$$\Rightarrow 3^2 S = 9 + 3^5 + 3^7 + \dots + 3^{103} + 3^{105} \Rightarrow 3^2 S - S = 8S = 3^{105} + 9 - 27 - 1 = 3^{105} - 19$$

$$\Rightarrow S = \frac{3^{105} - 19}{8}$$

Bài 2: Tính tổng $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{101}}$.

*) *Phân tích:* Nhận thấy, kể từ số hạng thứ hai thì mỗi số hạng tiếp theo bằng số hạng đứng ngay trước nó

nhân với $\frac{1}{2^2}$. Nếu ta nhân 2^2 vào tổng S , ta được tổng $2^2 \cdot S$ có các số hạng từ $\frac{1}{2}$ Đến $\frac{1}{2^{99}}$ giống như trong tổng S . Khi đó ta lấy tổng $2^2 \cdot S$ trừ cho tổng S thì các số hạng từ $\frac{1}{2}$ đến $\frac{1}{2^{99}}$ bị triệt tiêu và sẽ tính được tổng S .

Lời giải:

Ta có $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \dots + \frac{1}{2^{99}} + \frac{1}{2^{101}} \Rightarrow 2^2 S = 2^2 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \dots + \frac{1}{2^{99}}$

$$\Rightarrow 2^2 S - S = 3S = 2^2 + 2 - 1 - \frac{1}{2^{101}} \Rightarrow S = \frac{1}{3} \left(5 - \frac{1}{2^{101}} \right)$$

Bài 3: Tính tổng $S = 1 + 2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{101}$.

Lời giải:

Ta có $S = 1 + 2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{101} \Rightarrow 2^2 S = 2^2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{99} + 2^{101} + 2^{103}$

$$\Rightarrow 2^2 S - S = 3S = 2^2 + 2^{103} - 1 - 2 = 2^{103} + 1 \Rightarrow S = \frac{2^{103} + 1}{3}$$

Vậy $S = \frac{2^{103} + 1}{3}$

Bài 4: Tính tổng $S = 6^3 + 6^5 + 6^7 + \dots + 6^{101}$.

Lời giải:

Ta có $S = 6^3 + 6^5 + 6^7 + \dots + 6^{101} \Rightarrow 6^2 S = 6^5 + 6^7 + \dots + 6^{101} + 6^{103}$

$$\Rightarrow 6^2 S - S = 35S = 6^{103} - 6^3 \Rightarrow S = \frac{6^{103} - 6^3}{35}$$

Bài 5: Tính tổng $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{101}}$.

Lời giải:

Ta có $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{99}} + \frac{1}{3^{101}} \Rightarrow 3^2 S = 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{99}}$

$$\Rightarrow 3^2 S - S = 8S = 3 - \frac{1}{3^{101}} = \frac{3^{102} - 1}{3^{101}} \Rightarrow S = \frac{3^{102} - 1}{8 \cdot 3^{101}}$$

$$\text{Vậy } S = \frac{3^{102} - 1}{8 \cdot 3^{101}}$$

Dạng 5: Tổng có dạng $S_2 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + (n-1).n$ (1)

hoặc $S = 1.n + 2.(n-1) + 3.(n-2) + \dots + (n-1).2 + n.1$ (2) với $n \in \mathbb{N}^*$.

I. Phương pháp giải

- Xét tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + (n-1).n$, vì khoảng cách giữa 2 thừa số trong mỗi số hạng bằng 1

$\Rightarrow$ Nhân vào hai vế của đẳng thức với 3 lần khoảng cách (nhân với 3) ta được:

$$3S = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + 4.5.3 + \dots + (n-2).(n-1).3 + (n-1).n.3$$

$$= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + (n-2).(n-1).[n - (n-3)] + (n-1)n[(n+1) - (n-2)] = (n-1).n.(n+1)$$

$$\Rightarrow S = \frac{(n-1).n.(n+1)}{3}$$

- Xét tổng $S = 1.n + 2.(n-1) + 3.(n-2) + \dots + (n-1).2 + n.1$ (2)

$$\Rightarrow S = 1.n + 2.(n-1) + 3.(n-2) + \dots + (n-1).[n - (n-2)] + n.[n - (n-1)]$$

$$\Rightarrow S = 1.n + 2.n - 2.1 + 3.n - 3.2 + 4.n - 4.3 + \dots + (n-1).n - (n-1).(n-2) + n.n - n.(n-1)$$

$$= (1+2+3+\dots+n).n - [1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + (n-1).n]$$

$$S = S_1.n - S_2$$

Với $S_1 = 1+2+3+\dots+n$ là tổng các số tự nhiên liên tiếp

$$S_2 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + (n-1).n \quad (\text{đã tính ở trên})$$

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10 + 10.11 + 11.12$.

Lời giải:

Cách 1: Thực hiện phép tính:

$$\begin{aligned} A &= 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10 + 10.11 + 11.12 \\ &= 2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 56 + 72 + 90 + 110 + 132 = 572 \end{aligned}$$

Cách 2: Áp dụng phương pháp khử liên tiếp.

$$1.2 = \frac{1}{3}(1.2.3 - 0.1.2); 2.3 = \frac{1}{3}(2.3.4 - 1.2.3); \dots; 11.12 = \frac{1}{3}(11.12.13 - 10.11.12)$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{3} 11.12.13 = 572$$

Cách 3:

$$\begin{aligned} 3A &= 3.(1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10 + 10.11 + 11.12) \\ &= 1.2.(3-0) + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + 4.5.(6-3) + \dots + 11.12.(13-10) \\ &= 1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - \dots - 10.11.12 + 11.12.13 \\ &= 11.12.13 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{3} 11.12.13 = 572.$$

Cách 4:

$$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10 + 10.11 + 11.12$$

$$A = 0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + 5.6 + 6.7 + 7.8 + 8.9 + 9.10 + 10.11 + 11.12$$

$$A = 1.(0+2) + 3.(2+4) + 5.(4+6) + 7.(6+8) + 9.(8+10) + 11.(10+12)$$

$$A = 1.1.2 + 3.3.2 + 5.5.2 + 7.7.2 + 9.9.2 + 11.11.2$$

$$A = (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2).2$$

$$A = (1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2).2 = 572$$

Khai thác: Từ việc tính được tổng A theo cách 2 hoặc 3 kết hợp với việc tính theo cách 4, ta sẽ tính được tổng các bình phương của dãy số lẻ liên tiếp. Ví dụ:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 = \frac{1}{6} 11.12.13$$

Qua đây chúng ta sẽ có hướng nghiên cứu dạng toán tính tổng các bình phương của dãy số lẻ cách đều.

Nhận xét: Qua cách giải bằng phương pháp khử liên tiếp ở bài toán 1 đã nhận hai vế của biểu thức với 1 số xác định là:

(Số các thừa số của tích $S+1$). Khoảng cách giữa hai thừa số

Mở rộng: Viết công thức tổng quát tính:

$$A_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$A_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Hướng giải: Dự đoán

Chứng minh: Dùng phương pháp quy nạp

+ Với $n=1$. Vế trái: $1.2=2$. Vế phải $1.(1+1)(1+2):3=2$

Suy ra vế trái bằng vế phải. Vậy bài toán đúng với $n=1$.

+ Giả sử bài toán đúng với $n=k$ ($k \in \mathbb{N}, k > 1$) tức là ta đã có:

$$A_k = 1.2 + 2.3 + \dots + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

+ Ta phải chứng minh bài toán đúng với $n=k+1$. Thật vậy:

$$A_{k+1} = A_k + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

$$\Rightarrow A_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Vậy $A_n = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Bài 2: Tính tổng $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 99.100 + 100.101$.

Lời giải:

Ta có $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 99.100 + 100.101$

$$\Rightarrow 3S = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + 4.5.3 + \dots + 99.100.3 + 100.101.3$$

$$= 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 99.100.(101-98) + 100.101.(102-99)$$

$$= 1.2.3 - 1.2.3 + 2.3.4 - 2.3.4 + 3.4.5 - \dots - 98.99.100 + 99.100.101 - 100.101.99 + 100.101.102$$

$$= 100.101.102$$

$$\Rightarrow S = 100.101.102 : 3 = 34.100.101 = 343400$$

Bài 3: Tính tổng $S = 1.200 + 2.199 + 3.198 + 4.197 + \dots + 199.2 + 200.1$.

Lời giải:

Ta có $S = 1.200 + 2.199 + 3.198 + 4.197 + \dots + 199.2 + 200.1$

$$= 1.200 + 2(200-1) + 3(200-2) + 4(200-3) + \dots + 199(200-198) + 200(200-199)$$

$$= (1+2+3+4+\dots+200).200 - (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 198.199 + 199.200)$$

$$= \frac{200.201}{2} - \frac{199.200.201}{3} = 1353400$$

Dạng 6: Tổng có dạng $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ với $n \in \mathbb{N}, n > 3$

I. Phương pháp giải

Áp dụng công thức tính tổng ở dạng 5 là $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + (n-1).n$

Ta có $S = 1.(1+1) + 2.(1+2) + 3.(1+3) + \dots + n(n+1) = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (1+2+3+\dots+n)$

$$= P + (1+2+3+\dots+n)$$

Với: $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$

$$\Rightarrow P = S - (1+2+3+\dots+n)$$

Trong đó tổng S đã tính trong dạng 5 và tổng $1+2+3+\dots+n$ tính trong dạng 1

$$\Rightarrow P = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2 + 10^2 + 11^2$.

Lời giải:

Cách 1: $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2 + 10^2 + 11^2$

$$A = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + 121 = 506$$

Cách 2:

$$A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2 + 10^2 + 11^2$$

$$A = 1(2-1) + 2(3-1) + 3(4-1) + \dots + 9(10-1) + 10(11-1) + 11(12-1)$$

$$A = 1(2-1) + 2(3-1) + 3(4-1) + \dots + 9(10-1) + 10(11-1) + 11(12-1)$$

$$A = 1.2 - 1 + 2.3 - 2 + 3.4 - 3 + \dots + 9.10 - 9 + 10.11 - 10 + 11.12 - 11$$

$$A = (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 9.10 + 10.11 + 11.12) - (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 9 + 10 + 11)$$

Ta thấy:

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 9.10 + 10.11 + 11.12 = 11.12.13 : 3 = 572$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 10 + 11 = (11+1).11 : 2 = 66$$

$$\text{Do đó } A = 572 - 66 = 506.$$

$$\text{Nhận xét: Theo cách 2 ta có } A = \frac{11.12.13}{3} - \frac{11.12}{2} = \frac{11.12.(11.2+1)}{6} = 506$$

Mở rộng: Viết công thức tổng quát tính với mọi $n \in N^*$

a) $A_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

b) $A_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n+1)^2$

Ta có công thức:

a) $A_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (n \in N^*)$

b) $A_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n+1)^2 = \frac{(2n+1).(2n+2).(2n+3)}{6} \quad (n \in N^*)$

Bài 2: Tính tổng $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50 + 50.51 = 1(1+1) + 2(2+1) + 3(3+1) + \dots + 49(49+1) + 50(50+1)$$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2) + (1 + 2 + 3 + \dots + 50) = P + (1 + 2 + 3 + \dots + 50) \Rightarrow P = S - (1 + 2 + 3 + \dots + 50)$$

$$\text{Lại có } S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50 + 50.51 = \frac{50.51.52}{3} = 44200$$

$$(1+2+3+\dots+50) = \frac{(50+1).50}{2} = 1275$$

$$\Rightarrow S = 44200 - 1275 = 42925$$

Bài 3: Tính tổng $Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 51^2$.

Lời giải:

Ta có $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50 + 50.51 + 51.52 = 1.(1+1) + 2.(2+1) + 3.(3+1) + \dots + 51.(51+1)$

$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 51^2) + (1+2+3+\dots+51) = Q + (1+2+3+\dots+51) \Rightarrow Q = S - (1+2+3+\dots+51)$$

Trong đó $S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50 + 50.51 + 51.52 = \frac{51.52.53}{3} = 46852$

$$(1+2+3+\dots+51) = \frac{(1+51).51}{2} = 1326$$

Vậy $Q = 46852 - 1326 = 45526$

Bài 4: Tính tổng $Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2$.

Lời giải:

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 199.200 + 200.201 = 2(1+3) + 4(3+5) + \dots + 200(199+201)$

$$= 2.4 + 4.8 + \dots + 200.400 = 2.2.2 + 4.4.2 + \dots + 200.200.2 = 2(2^2 + 4^2 + \dots + 200^2) = 2M$$

$$\Rightarrow M = \frac{A}{2}, \text{ mà theo dạng 5 thì ta có } A = \frac{200.201.202}{3} \Rightarrow M = \frac{200.201.202}{6} = 1353400$$

$$Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2 = \frac{M}{2^2} = \frac{1353400}{4} = 338350$$

Bài 5: Tính tổng $Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2 + 101^2$.

Lời giải:

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 201.202 + 202.203$

$$= 2(1+3) + 4(3+5) + \dots + 202(201+203)$$

$$= 2.4 + 4.8 + \dots + 202.404 = 2.2.2 + 4.4.2 + \dots + 202.202.2$$

$$= 2(2^2 + 4^2 + \dots + 202^2) = 2M$$

$$\Rightarrow M = \frac{A}{2}, \text{ mà theo dạng 5 thì ta có } A = \frac{202.203.204}{3} \Rightarrow M = \frac{202.203.204}{6} = 1394204.$$

$$Q = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 101^2 = \frac{M}{2^2} = \frac{1394204}{4} = 348551$$

Dạng 7: Tổng có dạng $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (k-1)^2$ **(k chẵn và k là số tự nhiên)**

I. Phương pháp giải

Áp dụng công thức tính tổng ở dạng 5 là

$$\begin{aligned}A &= 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + (k-2)(k-1) + (k-1)k \\&= 0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + (k-2)(k-1) + (k-1)k \\&= 1(0+2) + 3(2+4) + 5(4+6) + \dots + (k-1)[(k-2)+k] \\&= 1.2 + 3.6 + 5.10 + \dots + (k-1)(2k-2) \\&= 1.1.2 + 3.3.2 + 5.5.2 + \dots + (k-1)(k-1).2 = 2[1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (k-1)^2] \\&= 2S\end{aligned}$$

*) Chú ý: Tính từ số hạng 0.1 đến số hạng $(k-1)k$ mà số số hạng là chẵn (tức là số số hạng của tổng A là số lẻ) thì ta có thể ghép đủ cặp như trên, còn số số hạng là lẻ (tức là số số hạng của tổng A là số chẵn) thì khi ghép cặp số ta còn thừa ra số hạng $(k-1)k$.

$$\Rightarrow S = \frac{A}{2}, \text{ mà theo dạng 5 thì tổng } A = \frac{(k-1)k(k+1)}{3} \Rightarrow S = \frac{(k-1)k(k+1)}{6}$$

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 19^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 18.19 + 19.20$

Tổng này có 19 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 20 số hạng và ghép được đủ 10 cặp số

Ta có $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 18.19 + 19.20$

$$\begin{aligned}&= 0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 18.19 + 19.20 \\&= 1(0+2) + 3(2+4) + 5(4+6) + \dots + 19(18+20) \\&= 1.2 + 3.6 + 5.10 + \dots + 19.38 = 1.1.2 + 3.3.2 + 5.5.2 + \dots + 19.19.2 \\&= 2(1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 19^2) = 2S\end{aligned}$$

$$\Rightarrow S = \frac{A}{2}, \text{ theo dạng 5 ta có } A = \frac{19.20.21}{3} \Rightarrow S = \frac{19.20.21}{6} = 1330$$

Vậy $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 19^2 = 1330$

Bài 2: Tính tổng $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 49^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 48.49 + 49.50$

Tổng này có 49 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 50 số hạng và ghép được đủ 25 cặp số

Ta có $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 48.49 + 49.50$

$$= 0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 48.49 + 49.50$$

$$= 1(0+2) + 3(2+4) + 5(4+6) + \dots + 49(48+50)$$

$$= 1.2 + 3.6 + 5.10 + \dots + 49.98 = 1.1.2 + 3.3.2 + 5.5.2 + \dots + 49.49.2$$

$$= 2(1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 49^2) = 2.S$$

$$\Rightarrow S = \frac{A}{2}, \text{ theo dạng 5 ta có } A = \frac{49.50.51}{3} \Rightarrow S = \frac{49.50.51}{6} = 20825.$$

$$\text{Vậy } S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 49^2 = 20825$$

Bài 3: Tính tổng $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 98.99 + 99.100$

Tổng này có 99 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 100 số hạng và ghép được đủ 50 cặp số

Ta có $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99 + 99.100$

$$= 0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99 + 99.100$$

$$= 1(0+2) + 3(2+4) + 5(4+6) + \dots + 99(98+100)$$

$$= 1.2 + 3.6 + 5.10 + \dots + 99.198 = 1.1.2 + 3.3.2 + 5.5.2 + \dots + 99.99.2$$

$$= 2(1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2) = 2.S$$

$$\Rightarrow S = \frac{A}{2}, \text{ theo dạng 5 ta có } A = \frac{99.100.101}{3} \Rightarrow S = \frac{99.100.101}{6} = 166650.$$

$$\text{Vậy } S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2 = 166650$$

Bài 4: Tính tổng $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 23^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 22.23 + 23.24$

Tổng này có 23 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 24 số hạng và ghép được đủ 12 cặp số

Ta có $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 22.23 + 23.24$

$$= 0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 22.23 + 23.24$$

$$= 1(0+2) + 3(2+4) + 5(4+6) + \dots + 23(22+24)$$

$$= 1.2 + 3.6 + 5.10 + \dots + 23.46 = 1.1.2 + 3.3.2 + 5.5.2 + \dots + 23.23.2$$

$$= 2(1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 23^2) = 2.S$$

$$\Rightarrow S = \frac{A}{2}, \text{ theo dạng 5 ta có } A = \frac{23.24.25}{3} \Rightarrow S = \frac{23.24.25}{6} = 2300$$

$$\text{Vậy } S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 23^2 = 2300$$

Bài 5: Tính tổng $P = 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + \dots + 57^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 56.57 + 57.58$

Tổng này có 57 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 58 số hạng, và ghép được đủ 29 cặp số

Ta có $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 56.57 + 57.58$

$$= 0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 56.57 + 57.58$$

$$= 1(0+2) + 3(2+4) + 5(4+6) + \dots + 57.(56+58)$$

$$= 1.2 + 3.6 + 5.10 + \dots + 57.114$$

$$= 1.1.2 + 3.3.2 + 5.5.2 + \dots + 57.57.2$$

$$= 2.(1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 57^2) = 2.P' \Rightarrow P' = \frac{A}{2}, \text{ theo dạng 5 ta có:}$$

$$A = \frac{57.58.59}{3} \Rightarrow P' = \frac{57.58.59}{6} = 32509$$

$$\Rightarrow P = P' - 1^2 = 32509 - 1 = 32508$$

$$\text{Vậy } P = 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + \dots + 57^2 = 32508$$

Bài 6: Tính tổng $P = 5^2 + 7^2 + 9^2 + \dots + 41^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 40.41 + 41.42$

Tổng này có 41 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 42 số hạng, và ghép được đủ 21 cặp số

Ta có $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 40.41 + 41.42$

$$= 0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 40.41 + 41.42$$

$$= 1(0+2) + 3(2+4) + 5(4+6) + \dots + 41.(40+42)$$

$$= 1.2 + 3.6 + 5.10 + \dots + 41.82$$

$$= 1.1.2 + 3.3.2 + 5.5.2 + \dots + 41.41.2$$

$$= 2.(1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 41^2) = 2.P' \Rightarrow P' = \frac{A}{2}, \text{ theo dạng 5 ta có:}$$

$$A = \frac{41.42.43}{3} \Rightarrow P' = \frac{41.42.43}{6} = 12341$$

$$\Rightarrow P = P' - (1^2 + 3^2) = 12341 - 10 = 12331$$

$$\text{Vậy } P = 5^2 + 7^2 + 9^2 + \dots + 41^2 = 12331$$

Bài 7: Tính tổng $P = 5^2 + 7^2 + 9^2 + \dots + 101^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 100.101 + 101.102$

Tổng này có 101 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 102 số hạng, và ghép được đủ 51 cặp số

Ta có $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 100.101 + 101.102$

$$= 0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 100.101 + 101.102$$

$$= 1(0+2) + 3(2+4) + 5(4+6) + \dots + 101.(100+102)$$

$$= 1.2 + 3.6 + 5.10 + \dots + 101.202$$

$$= 1.1.2 + 3.3.2 + 5.5.2 + \dots + 101.101.2$$

$$= 2.(1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 101^2) = 2.P' \Rightarrow P' = \frac{A}{2}, \text{ theo dạng 5 ta có:}$$

$$A = \frac{101.102.103}{3} \Rightarrow P' = \frac{101.102.103}{6} = 176851$$

$$\Rightarrow P = P' - (1^2 + 3^2) = 176851 - 10 = 176841$$

$$\text{Vậy } P = 5^2 + 7^2 + 9^2 + \dots + 101^2 = 176841$$

Bài 8: Tính tổng $P = 7^2 + 9^2 + \dots + 41^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 40.41 + 41.42$

Tổng này có 41 số hạng nên ta thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 42 số hạng, và ghép được đủ 21 cặp số

Ta có $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 40.41 + 41.42$

$$= 0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 40.41 + 41.42$$

$$= 1(0+2) + 3(2+4) + 5(4+6) + \dots + 41.(40+42)$$

$$= 1.2 + 3.6 + 5.10 + \dots + 41.82$$

$$= 1.1.2 + 3.3.2 + 5.5.2 + \dots + 41.41.2$$

$$= 2.(1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 41^2) = 2.P' \Rightarrow P' = \frac{A}{2}, \text{ theo dạng 5 ta có:}$$

$$A = \frac{41.42.43}{3} \Rightarrow P' = \frac{41.42.43}{6} = 12341$$

$$\Rightarrow P = P' - (1^2 + 3^2 + 5^2) = 12341 - 35 = 12306$$

$$\text{Vậy } P = 7^2 + 9^2 + \dots + 41^2 = 12306$$

Bài 9: Tính tổng $S = 11^2 + 13^2 + 15^2 + \dots + 99^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99 + 99.100$

Tổng này có 99 số hạng, nên khi thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 100 số hạng, và ghép được đủ 50 cặp số

$$\begin{aligned} A &= 0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99 + 99.100 \\ &= 1(0+2) + 3(2+4) + 5(4+6) + \dots + 99(98+100) \\ &= 1.2 + 3.3.2 + 5.5.2 + \dots + 99.99.2 \\ &= 2.(1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2) = 2P \Rightarrow P = \frac{A}{2} \end{aligned}$$

Theo dạng 5 ta có $A = \frac{99.100.101}{3} \Rightarrow P = \frac{99.100.101}{6} = 166650$

$$\Rightarrow S = P - (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 9^2) = 166650 - 165 = 166485$$

$$S = 11^2 + 13^2 + 15^2 + \dots + 99^2 = 166485$$

Vậy

Bài 10: Tính tổng $S = 11^2 + 13^2 + 15^2 + \dots + 2009^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2008.2009 + 2009.2010$

Tổng này có 2009 số hạng, nên khi thêm số hạng 0.1 ta được tổng có 2010 số hạng, và ghép được đủ 1005 cặp số

$$\begin{aligned} A &= 0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2008.2009 + 2009.2010 \\ &= 1(0+2) + 3(2+4) + 5(4+6) + \dots + 2009(2008+2010) \\ &= 1.2 + 3.3.2 + 5.5.2 + \dots + 2009.2009.2 \\ &= 2.(1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 2009^2) = 2P \Rightarrow P = \frac{A}{2} \end{aligned}$$

Theo dạng 5 ta có $A = \frac{2009.2010.2011}{3} \Rightarrow P = \frac{2009.2010.2011}{6} = 1353433165$

$$\Rightarrow S = P - (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 9^2) = 1353433165 - 165 = 1353433000$$

$$S = 1353433000$$

Vậy

Dạng 8: Tổng có dạng $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (k-1)^2$ (k là số tự nhiên lẻ)

I. Phương pháp giải

Áp dụng công thức tính tổng ở dạng 5 là

$$\begin{aligned}
A &= 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + (k-2)(k-1) + (k-1)k \\
&= 2(1+3) + 4(3+5) + 6(5+7) + \dots + (k-1)[(k-2)+k] \\
&= 2.4 + 4.8 + 6.12 + \dots + (k-1)(2k-2) \\
&= 2.2.2 + 4.4.2 + 6.6.2 + \dots + (k-1).(k-1).2 \\
&= 2[2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (k-1)^2] = 2S \\
\Rightarrow S &= \frac{A}{2}, \text{ theo dạng 5 ta có } A = \frac{(k-1)k(k+1)}{3} \Rightarrow S = \frac{(k-1)k(k+1)}{6}
\end{aligned}$$

Áp dụng tính: $P = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$, xét $S = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2$

$$\Rightarrow \frac{S}{2^2} = \frac{S}{4} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \Rightarrow P = \frac{S}{4}$$

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $M = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 30^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng

$$\begin{aligned}
A &= 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 29.30 + 30.31 \\
&= 2(1+3) + 4(3+5) + 6(5+7) + \dots + 30(29+31) \\
&= 2.4 + 4.8 + \dots + 30.60 \\
&= 2.2.2 + 4.4.2 + \dots + 30.30.2 \\
&= 2(2^2 + 4^2 + \dots + 30^2) = 2M \Rightarrow M = \frac{A}{2}, \text{ mà theo dạng 5 ta có } A = \frac{30.31.32}{3} \\
\Rightarrow M &= \frac{30.31.32}{6} = 4960
\end{aligned}$$

$$M = 4960$$

Vậy

Bài 2: Tính tổng $M = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 50^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng

$$\begin{aligned}
A &= 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 49.50 + 50.51 \\
&= 2(1+3) + 4(3+5) + 6(5+7) + \dots + 50(49+51) \\
&= 2.4 + 4.8 + \dots + 50.100 = 2.2.2 + 4.4.2 + \dots + 50.50.2 \\
&= 2(2^2 + 4^2 + \dots + 50^2) = 2M \Rightarrow M = \frac{A}{2}, \text{ mà theo dạng 5 ta có } A = \frac{50.51.52}{3}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow M = \frac{50.51.52}{6} = 22100$$

Vậy $M = 22100$

Bài 3: Tính tổng $M = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 24^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng

$$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 23.24 + 24.25$$

$$= 2(1+3) + 4(3+5) + 6(5+7) + \dots + 24(23+25)$$

$$= 2.4 + 4.8 + \dots + 24.48 = 2.2.2 + 4.4.2 + \dots + 24.24.2$$

$$= 2(2^2 + 4^2 + \dots + 24^2) = 2M \Rightarrow M = \frac{A}{2}, \text{ mà theo dạng 5 ta có } A = \frac{24.25.26}{3}$$

$$\Rightarrow M = \frac{24.25.26}{6} = 2600$$

Vậy $M = 2600$

Bài 4: Tính tổng $M = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 56^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng

$$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 55.56 + 56.57$$

$$= 2(1+3) + 4(3+5) + 6(5+7) + \dots + 56(55+57)$$

$$= 2.4 + 4.8 + \dots + 56.112 = 2.2.2 + 4.4.2 + \dots + 56.56.2$$

$$= 2(2^2 + 4^2 + \dots + 56^2) = 2M \Rightarrow M = \frac{A}{2}, \text{ mà theo dạng 5 ta có } A = \frac{56.57.58}{3}$$

$$\Rightarrow M = \frac{56.57.58}{6} = 30856$$

Vậy $M = 30856$

Bài 5: Tính tổng $M = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng

$$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 99.100 + 100.101$$

$$= 2(1+3) + 4(3+5) + 6(5+7) + \dots + 100(99+101)$$

$$= 2.4 + 4.8 + \dots + 100.200$$

$$= 2.2.2 + 4.4.2 + \dots + 100.100.2$$

$$=2(2^2 + 4^2 + \dots + 100^2) = 2M \Rightarrow M = \frac{A}{2}, \text{ mà theo dạng 5 ta có } A = \frac{100.101.102}{3}$$

$$\Rightarrow M = \frac{100.101.102}{6} = 171700$$

$$M = 171700$$

Vậy

Bài 6: Tính tổng $M = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 2020^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng

$$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2019.2020 + 2020.2021$$

$$= 2(1+3) + 4(3+5) + 6(5+7) + \dots + 2020(2019+2021)$$

$$= 2.4 + 4.8 + \dots + 2020.4040 = 2.2.2 + 4.4.2 + \dots + 2020.2020.2$$

$$= 2(2^2 + 4^2 + \dots + 2020^2) = 2M \Rightarrow M = \frac{A}{2}, \text{ mà theo dạng 5 ta có } A = \frac{2020.2021.2022}{3}$$

$$\Rightarrow M = \frac{2020.2021.2022}{6} = 1375775540$$

$$M = 1375775540$$

Vậy

Bài 7: Tính tổng $N = 6^2 + 8^2 + 10^2 + \dots + 102^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng

$$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 101.102 + 102.103 = 2(1+3) + 4(3+5) + \dots + 102(101+103)$$

$$= 2.4 + 4.8 + \dots + 102.204 = 2.2.2 + 4.4.2 + \dots + 102.102.2 = 2(2^2 + 4^2 + \dots + 102^2)$$

$$= 2.B \Rightarrow B = \frac{A}{2}, \text{ theo dạng 5 ta có: } A = \frac{102.103.104}{3}$$

$$\Rightarrow B = \frac{102.103.104}{6} = 182104 \Rightarrow N = B - (2^2 + 4^2) = 182104 - 20 = 182084$$

Vậy $H = 182084$

Bài 8: Tính tổng $H = 12^2 + 14^2 + 16^2 + \dots + 2010^2$

Lời giải:

Áp dụng tổng

$$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2009.2010 + 2010.2011$$

$$= 2(1+3) + 4(3+5) + \dots + 2010(2009+2011)$$

$$= 2.4 + 4.8 + \dots + 2010.4020$$

$$= 2.2.2 + 4.4.2 + \dots + 2010.2010.2 = 2(2^2 + 4^2 + \dots + 2010^2) = 2B$$

$$\Rightarrow B = \frac{A}{2}, \text{ theo dạng 5 ta có: } A = \frac{2010.2011.2012}{3} \Rightarrow B = \frac{2010.2011.2012}{6}$$

$$\Rightarrow H = B - (2^2 + 4^2 + \dots + 10^2) = \frac{2010.2011.2012}{6} - 220 = 1355454000$$

$$H = 1355454000$$

Vậy

Bài 9: Tính tổng $K = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + \dots - 19^2 + 20^2$

Lời giải:

Ta có

$$K = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + \dots - 19^2 + 20^2 = (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2) - (1^2 + 3^2 + \dots + 19^2)$$

Áp dụng tổng

$$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 19.20 + 20.21 = 2.(1+3) + 4.(3+5) + \dots + 20.(19+21)$$

$$= 2.4 + 4.8 + \dots + 20.40 = 2.2.2 + 4.4.2 + \dots + 20.20.2 = 2(2^2 + 4^2 + \dots + 20^2)$$

$$\Rightarrow 2^2 + 4^2 + \dots + 20^2 = \frac{A}{2}, \text{ theo dạng 5 ta có } A = \frac{20.21.22}{3}$$

$$\Rightarrow 2^2 + 4^2 + \dots + 20^2 = \frac{20.21.22}{6} = 1540$$

Áp dụng tổng

$$B = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 19.20 = 0.1 + 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 19.20 = 1(0+2) + 3(2+4) + \dots + 19(18+20)$$

$$= 1.2 + 3.6 + \dots + 19.38 = 1.1.2 + 3.3.2 + \dots + 19.19.2 = 2(1^2 + 3^2 + \dots + 19^2)$$

$$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 19^2 = \frac{B}{2}$$

$$\text{Theo dạng 5 ta có } B = \frac{19.20.21}{3} \Rightarrow 1^2 + 3^2 + \dots + 19^2 = \frac{19.20.21}{6} = 1330$$

$$\text{Khi đó } K = 1540 - 1330 = 210$$

$$\text{Vậy } K = 210$$

Bài 10: Biết $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 385$. Tính tổng $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2$

Lời giải:

$$\text{Ta có } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 385 \Rightarrow 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2) = 2^2.385$$

$$\Rightarrow 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2 = 4.385 \Rightarrow 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 20^2 = 1540$$

Dạng 9: Tổng có dạng $S = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + \dots + a_{n-1} a_n$ (1) **Với**
 $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = 2$ và $a \in \mathbb{N}^*; n \in \mathbb{N}^*$

I. Phương pháp giải

- Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = 2$

$$S = a_1(a_1 + 2) + a_2(a_2 + 2) + a_3(a_3 + 2) + a_4(a_4 + 2) + \dots + a_{n-1}(a_{n-1} + 2)$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{n-1}^2) + 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) = S_1 + 2.S_2$$

Tổng $S_1 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{n-1}^2$, tính theo dạng 6 và 7

$$S_2 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}, \text{ tính theo dạng 1}$$

- Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = k > 2$

Nhân cả 2 vế với $3k$ rồi tách $3k$ ở mỗi số hạng để tạo thành các số hạng mới tự triệt tiêu.

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S = 1.3 + 3.5 + 5.7 + \dots + 19.21$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= 1.3 + 3.5 + 5.7 + \dots + 17.19 + 19.21 = 1(1+2) + 3(3+2) + 5(5+2) + \dots + 17(17+2) + 19(19+2) \\ &= (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 17^2 + 19^2) + 2(1+3+5+7+\dots+17+19) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } B = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 17^2 + 19^2$$

$$\text{Ta có tổng B có dạng } B = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (k-1)^2 = \frac{(k-1)k(k+1)}{6}$$

$$\text{Với } k=20, \text{ ta có } B = \frac{19.20.21}{6} = 1330$$

$$\Rightarrow S = 1330 + 2(1+19).10 : 2 \Rightarrow S = 1530$$

$$\text{Vậy } S = 1530$$

Bài 2: Tính tổng $S = 1.3 + 3.5 + 5.7 + \dots + 47.49 + 49.51$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S &= 1.3 + 3.5 + 5.7 + \dots + 47.49 + 49.51 = 1(1+2) + 3(3+2) + 5(5+2) + \dots + 47(47+2) + 49(49+2) \\ &= (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 47^2 + 49^2) + 2(1+3+5+7+\dots+47+49) \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } B = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 47^2 + 49^2$$

Ta có tổng B có dạng
$$B = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (k-1)^2 = \frac{(k-1)k(k+1)}{6}$$

Với $k=50$, ta có
$$B = \frac{49 \cdot 50 \cdot 51}{6} = 20825$$

$$\Rightarrow S = 20825 + 2(1+49) \cdot 25 : 2 \Rightarrow S = 20825 + 1250 = 22075$$

Vậy $S = 22075$

Bài 3: Tính tổng $A = 1.3 + 3.5 + 5.7 + \dots + 97.99 + 99.101$

Lời giải:

Ta có:
$$A = 1.3 + 3.5 + 5.7 + \dots + 97.99 + 99.101 = 1(1+2) + 3(3+2) + 5(5+2) + \dots + 97(97+2) + 99(99+2)$$

$$= (1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 97^2 + 99^2) + 2(1+3+5+7+\dots+97+99)$$

Đặt $B = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 97^2 + 99^2$

Ta có tổng B có dạng
$$B = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (k-1)^2 = \frac{(k-1)k(k+1)}{6}$$

Với $k=100$, ta có
$$B = \frac{99 \cdot 100 \cdot 101}{6} = 166650$$

$$\Rightarrow A = 166650 + 2(1+99) \cdot 50 : 2 \Rightarrow A = 166650 + 5000 = 171650$$

Vậy $A = 171650$

Bài 4: Tính tổng $P = 1.4 + 4.7 + 7.10 + \dots + 49.52$

Lời giải:

Vì khoảng cách giữa hai thừa số trong mỗi số hạng bằng 3, nhân cả 2 vế với 9 ta được:

$$9P = 1.4.9 + 4.7.9 + 7.10.9 + \dots + 49.52.9$$

$$= 1.4(7+2) + 4.7(10-1) + 7.10(13-4) + \dots + 46.49(52-43) + 49.52(55-46)$$

$$= 1.4.7 + 1.4.2 + 4.7.10 - 1.4.7 + 7.10.13 - 4.7.10 + \dots + 46.49.52 - 43.46.49 + 49.52.55 - 46.49.52$$

$$= 1.4.2 + 49.52.55 = 140148 \Rightarrow P = 15572$$

Vậy $P = 15572$

Bài 5: Tính tổng $P = 1.4 + 4.7 + 7.10 + \dots + 97.100$

Lời giải:

Vì khoảng cách giữa hai thừa số trong mỗi số hạng bằng 3, nhân cả 2 vế với 9 ta được:

$$9P = 1.4.9 + 4.7.9 + 7.10.9 + \dots + 97.100.9$$

$$= 1.4(7+2) + 4.7(10-1) + 7.10(13-4) + \dots + 94.97(100-91) + 97.100(103-94)$$

$$= 1.4.7 + 1.4.2 + 4.7.10 - 1.4.7 + 7.10.13 - 4.7.10 + \dots + 94.97.100 - 94.97.91 + 97.100.103 - 97.100.94$$

$$=1.4.2+97.100.103=999108 \Rightarrow P=999108$$

Vậy $P=999108$

Bài 6: Tính tổng $M=1.3+3.5+5.7+\dots+39.41$

Lời giải:

$$\text{Ta có } M=1.3+3.5+5.7+\dots+49.51=1(1+2)+3(3+2)+\dots+37(37+2)+39(39+2)$$

$$=(1^2+3^2+5^2+\dots+37^2+39^2)+2(1+3+5+7+\dots+39)$$

$$\text{Đặt } B=1^2+3^2+5^2+\dots+37^2+39^2$$

$$\text{Tổng } B \text{ có dạng } B=1^2+3^2+5^2+\dots+(k-1)^2=\frac{(k-1)k(k+1)}{6}$$

$$\text{Với } k=40 \Rightarrow B=\frac{39.40.41}{6}=10660$$

$$\Rightarrow M=10660+2.(1+39).20:2 \Rightarrow M=10660+800=11460$$

Vậy $M=11460$

Bài 7: Tính tổng $N=2.4+4.6+6.8+\dots+48.50$

Lời giải:

Ta có

$$N=2.4+4.6+6.8+\dots+48.50=2(2+2)+4(4+2)+6(6+2)+\dots+46(46+2)+48(48+2)$$

$$=(2^2+4^2+6^2+\dots+48^2)+2(2+4+6+\dots+48)$$

$$\text{Đặt } B=2^2+4^2+6^2+\dots+48^2$$

$$\text{Tổng } B \text{ có dạng } B=2^2+4^2+6^2+\dots+(k-1)^2=\frac{(k-1)k(k+1)}{6}$$

$$\text{Với } k=49 \Rightarrow B=\frac{48.49.50}{6}=19600$$

$$\Rightarrow N=19600+2(2+48).25:2 \Rightarrow N=19600+1250=20850$$

Vậy $N=20850$

Bài 8: Tính tổng $N=2.4+4.6+6.8+\dots+100.102$

Lời giải:

Ta có

$$N=2.4+4.6+6.8+\dots+100.102=2(2+2)+4(4+2)+6(6+2)+\dots+98(98+2)+100(100+2)$$

$$=(2^2+4^2+6^2+\dots+100^2)+2(2+4+6+\dots+98+100)$$

Đặt $B = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 100^2$

Tổng B có dạng
$$B = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (k-1)^2 = \frac{(k-1)k(k+1)}{6}$$

Với $k=101 \Rightarrow B = \frac{100.101.102}{6}$

$$\Rightarrow N = \frac{100.101.102}{6} + 2 \cdot \frac{(2+100)50}{2} \Rightarrow N = 176800$$

Vậy $N = 176800$

Bài 9: Tính tổng $S = 2.6 + 6.10 + 10.14 + 14.18 + \dots + 42.46 + 50.54$

Lời giải:

Vì khoảng cách giữa hai thừa số trong mỗi số hạng bằng 4 (trừ ra số hạng cuối cùng)

Nhân cả 2 vế với 12 ta được

$$\begin{aligned} 12S &= 2.6.12 + 6.10.12 + 10.14.12 + 14.18.12 + \dots + 42.46.12 + 50.54.12 \\ &= 2.6(10+2) + 6.10(14-2) + 10.14(18-6) + 14.18(22-10) + \dots + 42.46(50-38) + 50.54.12 \\ &= 2.2.6 + 42.46.50 + 50.54.12 = 129024 \Rightarrow S = 10752 \end{aligned}$$

Vậy $S = 10752$

$$S = 1.a_2a_3 + a_2a_3a_4 + a_3a_4a_5 + \dots + a_{n-2}a_{n-1}a_n$$

Dạng 10: Tính tổng có dạng

I. Phương pháp giải

Nhân cả hai vế với $4k$, rồi tách $4k$ ở mỗi số hạng trong tổng để số hạng trước và số hạng sau tạo thành những số tự triệt tiêu nhau

$$4k.S = 1.a_2a_3.4k + a_2a_3a_4.4k + a_3a_4a_5.4k + \dots + a_{n-2}a_{n-1}a_n.4k = a_{n-2}a_{n-1}a_n(a_n + k)$$

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 16.17.18 + 17.18.19$

Lời giải:

Ta có khoảng cách giữa các thừa số bằng 1, nên nhân cả 2 vế với 4 ta được:

$$\begin{aligned} 4S &= 1.2.3.4 + 2.3.4.4 + 3.4.5.4 + \dots + 16.17.18.4 + 17.18.19.4 \\ &= 1.2.3.4 + 2.3.4(5-1) + 3.4.5(6-2) + \dots + 16.17.18(19-5) + 17.18.19(20-16) = 17.18.19.20 = 116280 \\ \Rightarrow S &= 116280 : 4 = 29070 \end{aligned}$$

Vậy $S = 29070$

Bài 2: Tính tổng $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 26.27.28 + 27.28.29$

Lời giải:

Ta có khoảng cách giữa các thừa số bằng 1, nên nhân cả 2 vế với 4 ta được:

$$\begin{aligned}
4S &= 1.2.3.4 + 2.3.4.4 + 3.4.5.4 + \dots + 26.27.28.4 + 27.28.29.4 \\
&= 1.2.3.4 + 2.3.4(5 - 1) + 3.4.5.(6 - 2) + \dots + 26.27.28.(29 - 25) + 27.28.29(30 - 26) = 27.28.29.30 = 657720 \\
\Rightarrow S &= 657720 : 4 = 164430
\end{aligned}$$

Vậy $S = 164430$

Bài 3: Tính tổng $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 46.47.48 + 47.48.49$

Lời giải:

Ta có khoảng cách giữa các thừa số bằng 1, nên nhân cả 2 vế với 4 ta được:

$$\begin{aligned}
4S &= 1.2.3.4 + 2.3.4.4 + 3.4.5.4 + \dots + 46.47.48.4 + 47.48.49.4 \\
&= 1.2.3.4 + 2.3.4(5 - 1) + 3.4.5.(6 - 2) + \dots + 46.47.48.(49 - 45) + 47.48.49(50 - 46) \\
&= 47.48.49.50 = 5527200 \\
\Rightarrow S &= 5527200 : 4 = 1381800
\end{aligned}$$

Vậy $S = 1381800$

Bài 4: Tính tổng $S = 1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + \dots + 55.57.59$

Lời giải:

Ta có khoảng cách giữa các thừa số bằng 2, nên nhân cả 2 vế với 8 ta được:

$$\begin{aligned}
8S &= 1.3.5.8 + 3.5.7.8 + 5.7.9.8 + \dots + 55.57.59.8 \\
&= 1.3.5.(7 + 1) + 3.5.7(9 - 1) + 5.7.9(11 - 3) + \dots + 53.55.57(59 - 51) + 55.57.59(61 - 53) \\
8S &= 1.3.5 + 1.3.5.7 - 1.3.5.7 + 3.5.7.9 - 3.5.7.9 + \dots - 51.53.55.57 + 53.55.57.59 + 55.57.59.61 - 53.55.57.59 \\
8S &= 1.3.5 + 55.57.59.61 \\
\therefore S &= (1.3.5 + 55.57.59.61) : 8 = 1410360
\end{aligned}$$

Chia cả 2 vế cho 8 ta được:

Vậy $S = 1410360$

Bài 5: Tính tổng $S = 1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + \dots + 95.97.99$

Lời giải:

Ta có khoảng cách giữa các thừa số bằng 2, nên nhân cả 2 vế với 8 ta được:

$$\begin{aligned}
8S &= 1.3.5.8 + 3.5.7.8 + 5.7.9.8 + \dots + 95.97.99.8 \\
&= 1.3.5.(7 + 1) + 3.5.7(9 - 1) + 5.7.9(11 - 3) + \dots + 93.95.97(99 - 91) + 95.97.99(101 - 93) \\
8S &= 1.3.5 + 95.97.99.101 \\
8S &= 1.3.5 + 1.3.5.7 - 1.3.5.7 + 3.5.7.9 - 3.5.7.9 + \dots - 91.93.95.97 + 93.95.97.99 + 95.97.99.101 - 93.95.97.99
\end{aligned}$$

Chia cả 2 vế cho 8 ta được: $S = (1.3.5 + 95.97.99.101) : 8 = 11517600$

Vậy $S = 11517600$

Bài 6: Tính tổng $A = 1.2.3.4 + 2.3.4.5 + \dots + 18.19.20.21 + 19.20.21.22$

Lời giải:

Nhân hai vế với 5 ta được $5A = 1.2.3.4.5 + 2.3.4.5.5 + \dots + 18.19.20.21.5 + 19.20.21.22.5$

$$5A = 1.2.3.4.5 + 2.3.4.5.(6-1) + \dots + 18.19.20.21.(22-17) + 19.20.21.22.(23-18)$$

$$= 1.2.3.4.5 - 1.2.3.4.5 + 2.3.4.5.6 - \dots - 17.18.19.20.21 + 18.19.20.21.22 - 18.19.20.21.22 + 19.20.21.22.23$$

$$= 19.20.21.22.23 \Rightarrow A = \frac{19.20.21.22.23}{5} = 807576$$

Vậy $A = 807576$

Dạng 1: Tính tổng có dạng $S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$ Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = k$

I. Phương pháp giải

- Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = 1$ thì

$$S = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}$$

- Với $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = k > 1$ thì $S = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right)$

- Với dạng toán phức tạp hơn như:

1) Nếu số hạng có dạng $\frac{2m}{b(b+m)(b+2m)}$, thì ta dùng công thức

$$\frac{2m}{b(b+m)(b+2m)} = \frac{1}{b(b+m)} - \frac{1}{(b+m)(b+2m)}$$
 để viết mỗi số hạng thành hiệu của hai phân số

2) Nếu số hạng có dạng $\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$, thì ta dùng công thức

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right],$$
 sau đó áp dụng tiếp công thức trong phần 1.

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{49.50}$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{49.50} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50}$$

$$= 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}$$

Vậy $A = \frac{49}{50}$

Bài 2: Tính tổng $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100}$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{99.100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$$

$$= 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

Vậy $A = \frac{99}{100}$

Bài 3: Tính tổng $B = \frac{2}{2.4} + \frac{2}{4.6} + \frac{2}{6.8} + \dots + \frac{2}{48.50}$

Lời giải:

Ta có:

$$B = \frac{2}{2.4} + \frac{2}{4.6} + \frac{2}{6.8} + \dots + \frac{2}{48.50} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{48} - \frac{1}{50}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{50} = \frac{25}{50} - \frac{1}{50} = \frac{24}{50} = \frac{12}{25}$$

Vậy $B = \frac{12}{25}$

Bài 4: Tính tổng $A = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{97.99}$

Lời giải:

Ta có: $A = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{97.99}$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{99} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{98}{99} = \frac{49}{99}$$

Vậy $A = \frac{49}{99}$

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{45}$$

Bài 5: Tính tổng

Lời giải:

Ta có $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{45} = \frac{2}{6} + \frac{2}{12} + \frac{2}{20} + \frac{2}{30} + \dots + \frac{2}{90}$

$$= 2 \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{9 \cdot 10} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \right) = 2 \cdot \frac{4}{10} = \frac{4}{5}$$

$$A = \frac{4}{5}.$$

Vậy

$$B = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{18 \cdot 19 \cdot 20}$$

Bài 6: Tính tổng

Lời giải:

Xét $2B = \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{18 \cdot 19 \cdot 20}$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{18 \cdot 19} - \frac{1}{19 \cdot 20} = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{19 \cdot 20}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{2} \cdot \frac{19 \cdot 10 - 1}{19 \cdot 20} = \frac{189}{760}$$

$$B = \frac{189}{760}.$$

Vậy

$$A = 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{6} + 1 - \frac{1}{12} + 1 - \frac{1}{20} + 1 - \frac{1}{30} + 1 - \frac{1}{42} + 1 - \frac{1}{56} + 1 - \frac{1}{72} + 1 - \frac{1}{89}$$

Bài 7: Tính tổng

Lời giải:

Ta có $A = 9 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{89} \right)$

$$A = 9 - \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{89} \right)$$

$$A = 9 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{89} \right) = 9 - \left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{89} \right) = 9 - 1 + \frac{1}{9} - \frac{1}{89} = \frac{73}{9} - \frac{1}{89} = 8 \frac{80}{801}$$

$$A = 8 \frac{80}{801}$$

Vậy

Bài 8: Tính tổng $B = \frac{1}{7} + \frac{1}{91} + \frac{1}{247} + \frac{1}{475} + \frac{1}{777} + \frac{1}{1147}$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } B &= \frac{1}{7} + \frac{1}{91} + \frac{1}{247} + \frac{1}{475} + \frac{1}{777} + \frac{1}{1147} = \frac{1}{1.7} + \frac{1}{7.13} + \frac{1}{13.19} + \frac{1}{19.25} + \frac{1}{21.37} + \frac{1}{37.31} \\ &= \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{25} \right) + \frac{1}{21.37} + \frac{1}{37.31} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{25} \right) + \frac{31+21}{21.31.37} \\ &= \frac{4}{25} + \frac{52}{24087} = \frac{97648}{602175} \\ B &= \frac{97648}{602175} \end{aligned}$$

Vậy

Bài 9: Tính tổng $A = \frac{-1}{20} + \frac{-1}{30} + \frac{-1}{42} + \frac{-1}{56} + \frac{-1}{72} + \frac{-1}{90}$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{-1}{20} + \frac{-1}{30} + \frac{-1}{42} + \frac{-1}{56} + \frac{-1}{72} + \frac{-1}{90} = - \left(\frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{9.10} \right) \\ &= - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) = - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{10} \right) = \frac{-3}{20} \\ A &= \frac{-3}{20} \end{aligned}$$

Vậy

Bài 10: Tính tổng $B = \frac{5}{2.1} + \frac{4}{1.11} + \frac{3}{11.2} + \frac{1}{2.15} + \frac{13}{15.4}$

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{Ta có } B &= \frac{5}{2.1} + \frac{4}{1.11} + \frac{3}{11.2} + \frac{1}{2.15} + \frac{13}{15.4} = 7 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{15} + \frac{1}{15} - \frac{1}{28} \right) \\ &= 7 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{28} \right) = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4} \\ B &= 3\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Vậy

Bài 11: Tính tổng $A = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{120}$

Lời giải:

Ta có
$$A = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{120} = \frac{1}{5.2} + \frac{1}{5.3} + \frac{1}{7.3} + \frac{1}{7.4} + \dots + \frac{1}{15.7} + \frac{1}{15.8}$$

$$= \left(\frac{1}{5.2} + \frac{1}{5.3} \right) + \left(\frac{1}{7.3} + \frac{1}{7.4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{15.7} + \frac{1}{15.8} \right)$$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \dots + \frac{1}{15} \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{56} = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{7.8} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$A = \frac{3}{8}$$

Vậy

12: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết
$$A = \frac{4}{7.31} + \frac{6}{7.41} + \frac{9}{10.41} + \frac{7}{10.57}$$

Bài

$$B = \frac{7}{19.31} + \frac{5}{19.43} + \frac{3}{23.43} + \frac{11}{23.57}$$

Lời giải:

Ta có

$$\frac{1}{5}A = \frac{4}{35.31} + \frac{6}{35.41} + \frac{9}{50.41} + \frac{7}{50.57} = \frac{1}{31} - \frac{1}{57}$$

$$\frac{1}{2}B = \frac{7}{38.31} + \frac{5}{38.43} + \frac{3}{46.43} + \frac{11}{46.57} = \frac{1}{31} - \frac{1}{57}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}A = \frac{1}{2}B \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{5}{2}$$

Vậy
$$\frac{A}{B} = \frac{5}{2}$$

13: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết
$$A = \frac{34}{7.31} + \frac{51}{13.22} + \frac{85}{22.37} + \frac{68}{37.49}$$

Bài

$$B = \frac{39}{7.16} + \frac{65}{16.31} + \frac{52}{31.43} + \frac{26}{43.49}$$

Lời giải:

Ta có

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{34}{7.31} + \frac{51}{13.22} + \frac{85}{22.37} + \frac{68}{37.49} = \frac{34}{6} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{13} \right) + \frac{51}{9} \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{22} \right) + \frac{85}{15} \left(\frac{1}{22} - \frac{1}{37} \right) + \frac{68}{12} \left(\frac{1}{37} - \frac{1}{49} \right) \\
 &= \frac{17}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{13} \right) + \frac{17}{3} \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{22} \right) + \frac{17}{3} \left(\frac{1}{22} - \frac{1}{37} \right) + \frac{17}{3} \left(\frac{1}{37} - \frac{1}{49} \right) = \frac{17}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{49} \right) \\
 B &= \frac{39}{7.16} + \frac{65}{16.31} + \frac{52}{31.43} + \frac{26}{43.49} = \frac{39}{9} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{16} \right) + \dots + \frac{26}{6} \left(\frac{1}{43} - \frac{1}{49} \right) = \frac{13}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{49} \right) \\
 \Rightarrow \frac{A}{B} &= \frac{17}{3} : \frac{13}{3} = \frac{17}{13} .
 \end{aligned}$$

Vậy $\frac{A}{B} = \frac{17}{13}$

14: Tính tỉ số $\frac{A}{B}$ biết $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{19.20}$

Bài

$$B = \frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.6} + \frac{1}{6.8} + \dots + \frac{1}{38.40}$$

Lời giải:

Ta có

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{19.20} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \\
 &= 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.6} + \frac{1}{6.8} + \dots + \frac{1}{38.40} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{38} - \frac{1}{40} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{40} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{40} = \frac{19}{80}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{19}{20} : \frac{19}{80} = 4$$

Vậy $\frac{A}{B} = 4$

$$A = \frac{1}{31} \left[\frac{31}{5} \left(9 - \frac{1}{2} \right) - \frac{17}{2} \left(4 + \frac{1}{5} \right) \right] + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{930}$$

Bài 15: Tính tổng

Lời giải:

Ta có
$$A = \frac{1}{31} \left[\frac{31}{5} \left(9 - \frac{1}{2} \right) - \frac{17}{2} \left(4 + \frac{1}{5} \right) \right] + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{930}$$

$$\text{Xét } M = \frac{1}{31} \left[\frac{31}{5} \left(9 - \frac{1}{2} \right) - \frac{17}{2} \left(4 + \frac{1}{5} \right) \right] = \frac{1}{31} \left(\frac{31}{5} \cdot \frac{17}{2} - \frac{17}{2} \cdot \frac{21}{5} \right) = \frac{17}{31} \left(\frac{31 - 21}{10} \right) = \frac{17}{31}$$

$$N = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{930} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{30.31} = 1 - \frac{1}{31} = \frac{30}{31}$$

$$A = M + N = \frac{17}{31} + \frac{30}{31} = \frac{47}{31}.$$

Khi đó

$$\text{Vậy } A = \frac{47}{31}$$

Dạng 1 **2: Tính tổng có dạng** $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3$ **Với** $n \in \mathbb{N}^*$

I. Phương pháp giải

Áp dụng tổng $B = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 + \dots + (n-1)n(n+1)$

Trong mỗi số hạng, tách thừa số đầu và thừa số sau theo tổng và hiệu của thừa số giữa với 1.

Áp dụng công thức $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ để nhân các số sau khi tách

Ta có: $B = (2-1).2.(2+1) + (3-1).3.(3+1) + \dots + (n-1).n.(n+1)$

$$= (2^3 - 2) + (3^3 - 3) + \dots + (n^3 - n) = (2^3 + 3^3 + \dots + n^3) - (2 + 3 + \dots + n)$$

$$= (1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) - (1 + 2 + 3 + \dots + n) \Rightarrow S = B + (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

Theo dạng 10 ta tính được

$$B = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4}$$

Theo dạng 1 ta tính được $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$S = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4} + \frac{n(n+1)}{2} = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Vậy

II. Bài toán

Bài 1: Tính tổng $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$

Lời giải:

Ta có $B = 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + 9.10.11 = (2-1).2.(2+1) + (3-1).3.(3+1) + \dots + (10-1).10.(10+1)$

$$=(2^3 - 2) + (3^3 - 3) + \dots + (10^3 - 10)$$

$$=(2^3 + 3^3 + \dots + 10^3) - (2 + 3 + \dots + 10) = (1 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3) - (1 + 2 + 3 + \dots + 10)$$

$$\Rightarrow S = B + (1 + 2 + 3 + \dots + 10)$$

$$B = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{4} = 2970$$

Theo dạng 10 ta tính được

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 10^3 = 2970 + \frac{10 \cdot 11}{2} = 3025$$

Khi đó

$$\text{Vậy } S = 3035$$

Bài 2: Tính tổng $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 51^3$

Lời giải:

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 51^3 = \left[\frac{51(51+1)}{2} \right]^2 = 1758276.$$

Ta có

$$\text{Vậy } S = 1758276$$

Bài 3: Tính tổng $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 20^3$

Lời giải:

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 20^3 = \left[\frac{20(20+1)}{2} \right]^2 = 44100$$

Ta có

$$\text{Vậy } S = 44100$$

Bài 4: Tính tổng $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3$

Lời giải:

Ta có :

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 100^3 = \left[\frac{100(100+1)}{2} \right]^2 = 25502500.$$

$$\text{Vậy } S = 25502500$$

Bài 5: Tính tổng $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 55^3$

Lời giải:

Ta có :

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 55^3 = \left[\frac{55(55+1)}{2} \right]^2 = 2371600$$

$$\text{Vậy } S = 2371600$$

Bài 6: Tính tổng $B = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 42^3$

Lời giải:

Ta có :

$$B = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 42^3 = \left[\frac{42(42+1)}{2} \right]^2 = 815409$$

Vậy $S = 815409$

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: Tính $C = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99$

(Đề khảo sát HSG toán 6 huyện Yên Mô năm học 2020 - 2021)

Lời giải:

Ta có

$$3C = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \dots + 97.98.3 + 98.99.3$$

$$3C = 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 97.98.(99-96) + 98.99.(100-97)$$

$$= 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + 97.98.99 - 96.97.98 + 98.99.100 - 97.98.99$$

$$= 98.99.100$$

$$\Rightarrow C = \frac{98.99.100}{3} = 323400$$

Vậy $C = 323400$

Bài 2: Tính $A = 1 + 2 + 3 + \dots + 59 + 60$

Lời giải:

Từ 1 đến 50 có số số hạng là $60 - 1 + 1 = 60$ (số hạng)

$$\Rightarrow A = 1 + 2 + 3 + \dots + 59 + 60 = \frac{(1+60)60}{2} = 1830$$

Vậy $A = 1830$

Bài 3: Tính $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{2352} + \frac{1}{2450}$

(Đề khảo sát HSG toán 6 Quận Hà Đông năm học 2020 - 2021)

Lời giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{2352} + \frac{1}{2450} \\ &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{48.49} + \frac{1}{49.50} \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{48} - \frac{1}{49} + \frac{1}{49} - \frac{1}{50}$$

$$= 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50}$$

Vậy $S = \frac{49}{50}$

$$A = \frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.6} + \frac{1}{6.8} + \dots + \frac{1}{2020.2022}$$

Bài 4: Tính

(Đề khảo sát HSG toán 6 Nam Trực năm học 2020 - 2021)

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.6} + \frac{1}{6.8} + \dots + \frac{1}{2020.2022}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2020} - \frac{1}{2022} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2022} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1010}{2022} = \frac{505}{2022}$$

Vậy $A = \frac{505}{2022}$

Bài 5: Tính $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 2013.2014$

(Đề khảo sát HSG toán 6 Yên Định năm học 2020 - 2021)

Lời giải:

Ta có

$$3A = 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \dots + 2012.2013.3 + 2013.2014.3$$

$$3A = 1.2.3 + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 2012.2013.(2014-2011) + 2013.2014.(2015-2012)$$

$$= 1.2.3 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + 2013.2014.2015 - 2012.2013.2014$$

$$= 2013.2014.2015$$

$$\Rightarrow A = \frac{2013.2014.2015}{3} = 2723058910$$

Vậy $A = 2723058910$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>