

Người làm: Nhon

Zalo: Nhon

- số đt zalo: 0704572257

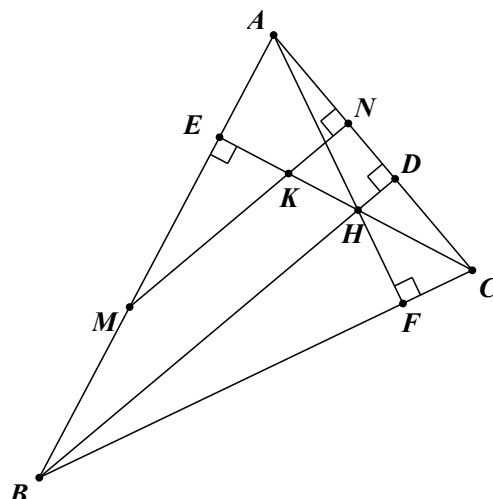
Email: thiennhon2310@gmail.com

CD13: PHẦN HÌNH HỌC

Dạng 1. Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau

Câu 1. (HSG 7 trường Trần Hưng Đạo 2017- 2018) Cho tam giác nhọn ABC có $AB > AC$, ba đường cao BD , CE và AF cắt nhau tại H . Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = AC$. Gọi N là hình chiếu của M trên AC ; K là giao điểm của MN và CE . Chứng minh hai góc KAH và MCB bằng nhau.

Lời giải



$\triangle AMC$ có 2 đường cao MN và CE cắt nhau tại K

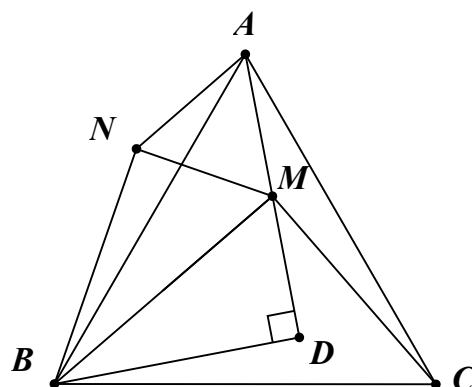
Nên K là trực tâm của $\triangle AMC$

Suy ra AK là đường cao thứ 3

hay $AK \perp MC \Rightarrow \angle KAH = \angle MCB$.

Câu 2. (HSG 7 Thị xã Sầm Sơn, 2017 - 2018) Cho tam giác ABC là tam giác đều. Lấy điểm M nằm trong tam giác ABC sao cho $MA = 1$; $MB = 2$; $MC = \sqrt{3}$, Tính độ dài cạnh AB và số đo góc AMB .

Lời giải



Vẽ tam giác đều AMN và kẻ $BD \perp AM$

$\triangle AMC = \triangle ANB$ (c.g.c)

$\Rightarrow MN = 1; BN = \sqrt{3}; BM = 2$

Dùng Pytago đảo chứng minh $\angle BNM = 90^\circ$, $BM = 2NM$ nên $\angle NMB = 60^\circ$

Vậy $\angle AMB = 120^\circ$

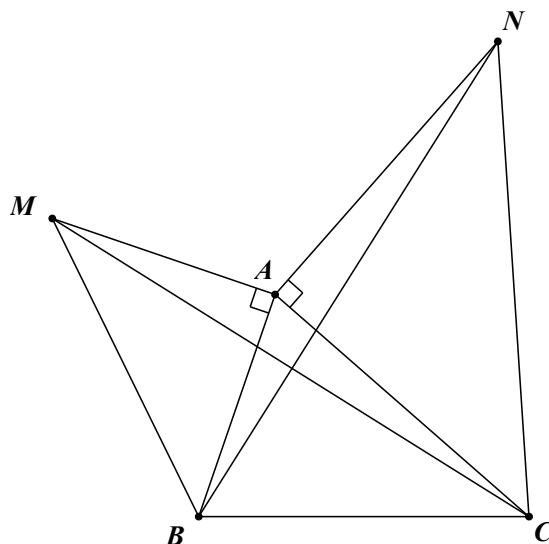
$$\angle MBD = 30^\circ \Rightarrow MB = 2MD$$

$$\text{Vậy } AD = 2; BD = \sqrt{3}$$

$$\text{Từ đó tính được: } AB = \sqrt{7}$$

Câu 2. (HSG 7 Huyện Vị Thanh, 2017 - 2018) Cho tam giác ABC có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$. Chứng minh rằng: $\triangle AMC = \triangle ABN$.

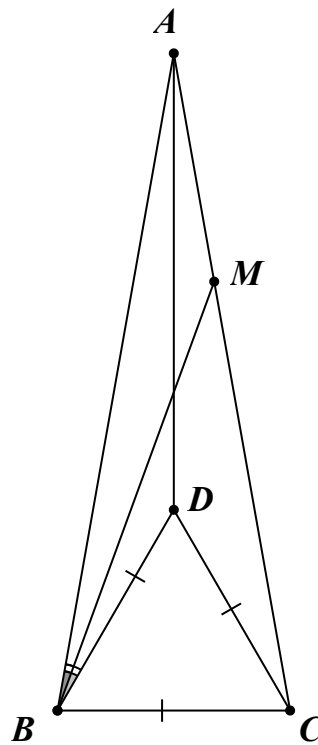
Lời giải



Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$ có: $AM = AB$ ($\triangle AMB$ vuông cân)
 $AC = AN$ ($\triangle ACN$ vuông cân)
 $\Rightarrow \angle MAC = \angle NAC (=90^\circ + \angle BAC) \Rightarrow \triangle AMC = \triangle ABN (c.g.c)$

Câu 3. (HSG 7 Huyện, 2017 - 2018) Cho tam giác ABC cân tại A có $\angle A = 20^\circ$, vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong tam giác ABC). Tia phân giác của $\angle ABD$ cắt AC tại M . Chứng minh tia AD là phân giác của $\angle BAC$.

Lời giải



$$\triangle ADB = \triangle ADC (c.c.c)$$

Chứng minh

$$\Rightarrow \angle DAB = \angle DAC \quad \angle DAB = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$$

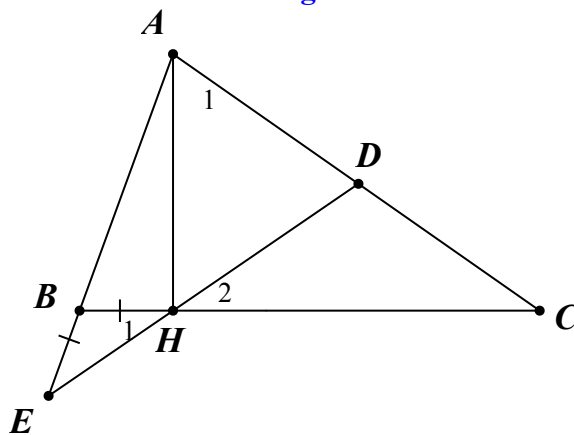
, do đó

Vậy tia AD là phân giác của $\angle BAC$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017- 2018) Cho tam giác ABC có $\angle B < 90^\circ$ và $\angle B = 2\angle C$. Kẻ đường cao AH . Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$. Đường thẳng HE cắt AC tại D .

Chứng minh $\angle BEH = \angle ACB$

Lời giải



Tam giác BEH cân tại B nên $\angle E = \angle H_1$

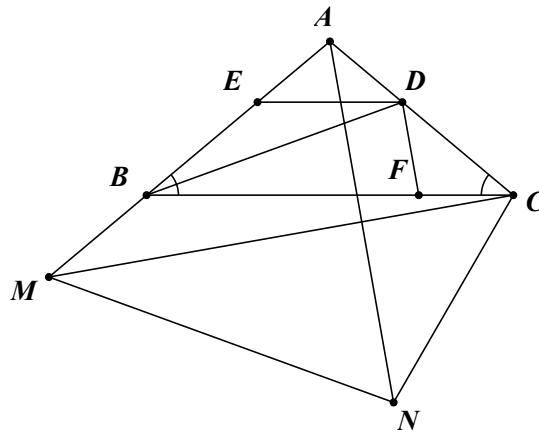
$$2\angle E = \angle ABC = \angle E + \angle H_1 = 2\angle E$$

mà

Nên $\angle BEH = \angle ACB$

Câu 5. (HSG 7 huyện Việt Yên 2017- 2018) Cho tam giác ABC cân tại A ($\angle B = \angle C = 40^\circ$). Kẻ phân giác BD ($D \in AC$). Trên tia AB lấy điểm M sao cho $AM = BC$. Tính $\angle AMC$.

Lời giải



Từ D kẻ $DE \parallel BC$, trên BC lấy điểm F sao cho $BD = BF$ (1)

Chứng minh được $DE = BE$ (tam giác BED cân)

Do tam giác AED cân nên $AD = AE \Rightarrow BE = CD \Rightarrow DE = CD$

Tam giác BDF cân có $\angle DBF = 20^\circ$ nên $\angle BFD = 80^\circ \Rightarrow \angle FDC = 100^\circ$
 $\Rightarrow \angle FDC = \angle EAD = 100^\circ$

Vậy $\triangle DFC$ có $\angle FDC = 40^\circ$

Chứng minh được $\triangle ADE = \triangle FCD$ (g.c.g)

$\Rightarrow AD = CF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BD + AD = BC$.

Dựng tam giác đều AMN sao cho N và C ở cùng một phía so với AB

Xét $\triangle BAC$ và $\triangle NCA$ có

AC chung

$BC = AN (= AM)$

$\angle ACB = \angle ANA = 40^\circ$

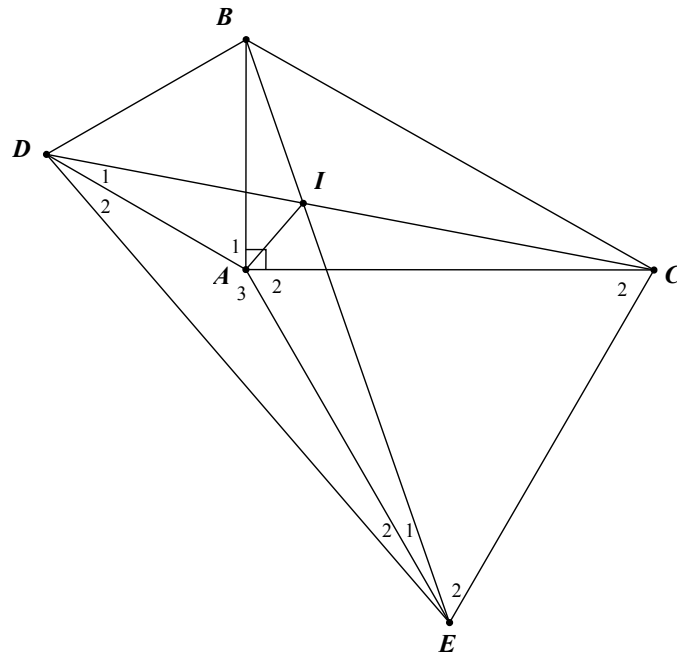
Nên $\triangle BAC = \triangle NCA$

$\Rightarrow AC = CN = AB$

Vậy MC là trung trực của AN nên $\angle AMC = \frac{1}{2} \angle AMN = 30^\circ$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2017- 2018) Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao điểm của BE và CD . Chứng minh rằng $\angle EIC = 60^\circ$ và AI là tia phân giác của $\angle DIE$.

Lời giải



$$\begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{A_1} + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \\ \widehat{BAE} = \widehat{A_2} + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BAE} \end{cases}$$

Ta có:

Xét $\triangle DAC$ và $\triangle BAE$ có

$$DA = BA \text{ (gt)}$$

$$\widehat{BAC} = \widehat{BAE} \text{ (cmt)}$$

$$AC = AE \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow BE = CD \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\widehat{A_3} + \widehat{A_1} + \widehat{BAC} + \widehat{A_2} = 360^\circ$$

Ta có :

$$\Leftrightarrow \widehat{A_3} + 60^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{A_3} = 150^\circ = \widehat{BAC}$$

Xét $\triangle DAE$ và $\triangle BAE$ có

$$DA = BA \text{ (gt)}$$

$$\widehat{A_3} = \widehat{BAC} \text{ (cmt)}$$

$$AE \text{ chung}$$

$$\Rightarrow \triangle DAE = \triangle BAE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow DE = BE$$

Vậy $\triangle BDE$ cân tại E

Ta có: $\triangle DAC = \triangle BAE$ (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{C_1} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Lại có: $\widehat{F_1} + \widehat{E_2} + \widehat{FCE} = 180^\circ$ (tổng 3 góc trong $\triangle ICE$)

$$\Leftrightarrow \widehat{F_1} + (\widehat{AEC} - \widehat{E_1}) + (\widehat{C_1} + \widehat{E_2}) = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{F_1} + 60^\circ - \widehat{E_1} + \widehat{C_1} + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{F_1} + 120^\circ = 180^\circ \quad (\widehat{E_1} = \widehat{C_1})$$

$$\Leftrightarrow \widehat{F_1} = 60^\circ$$

Vì $\triangle DAE = \triangle BAE$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{E_2}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow EA$ là tia phân giác của $\widehat{DEI}$ (1)

Vì $\begin{cases} \triangle DAC = \triangle BAE \\ \triangle DAE = \triangle BAE \end{cases} \Rightarrow \triangle DAC = \triangle DAE \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow DA$ là tia phân giác của $\widehat{EDC}$ (2)

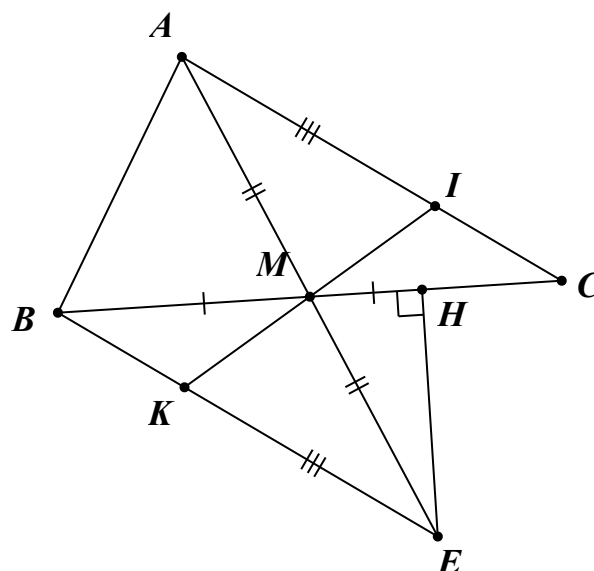
Từ (1) và (2) $\Rightarrow A$ là giao điểm của 2 tia phân giác trong $\triangle DIE$

$\Rightarrow IA$ là đường phân giác thứ 3 trong $\triangle DIE$

Vậy IA là tia phân giác của $\widehat{DIE}$.

Câu 7. (HSG 7 Huyện, 2017 - 2018) Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Gọi I là một điểm trên AC , K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $\widehat{HBE} = 50^\circ$, $\widehat{MEB} = 25^\circ$. Tính $\widehat{HEM}$ và $\widehat{BME}$.

Lời giải



Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có:

$AM = EM$
(gt)

$\widehat{AMC} = \widehat{EMB}$
(đối đỉnh)

$BM = MC$
(gt)

$\triangle AMC = \triangle EMB$ (c.g.c)

Nên

$\Rightarrow AC = EB$

Vì $\triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MEB}$, 2 góc ở vị trí so le trong được tạo bởi đường thẳng AC, EB cắt đường thẳng AE)

$$\Rightarrow AC \parallel BE$$

Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có: $AM = EM$ (gt)

$$\angle MAI = \angle MEK (\angle AMC = \angle EMB)$$

$$AI = EK$$

(gt)

$$\Rightarrow \triangle AMI = \triangle EMK (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \angle AMI = \angle EMK$$

$$\angle AMI + \angle EME = 180^\circ$$

Mà (Kề bù)

$$\Rightarrow \angle EMK + \angle EME = 180^\circ$$

Vậy ba điểm I, M, K thẳng hàng.

Trong tam giác vuông BHE ($\angle H = 90^\circ$) có $\angle HBE = 50^\circ \Rightarrow \angle HEB = 40^\circ$

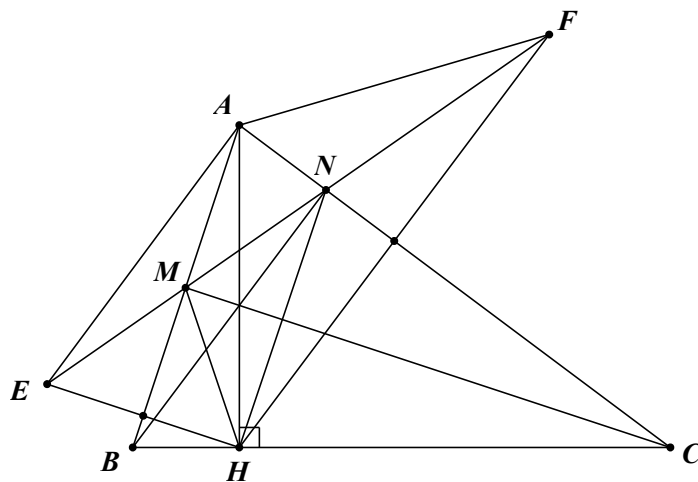
$$\Rightarrow \angle HEM = \angle HEB - \angle MEB = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$$

$\angle BME$ là góc ngoài tại đỉnh M của $\triangle HEM$ nên $\angle BME = \angle HEM + \angle MHE = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$
(định lý góc ngoài của tam giác)

Dạng 2. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau

Câu 1. (HSG 7 Huyện Hương Sơn, 2017 - 2018) Cho tam giác ABC ($\angle BAC < 90^\circ$) đường cao AH . Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB, AC đường thẳng EF cắt AB, AC lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng $AE = AF$.

Lời giải



Vì AB là trung trực của EH nên ta có: $AE = AH$ (1)

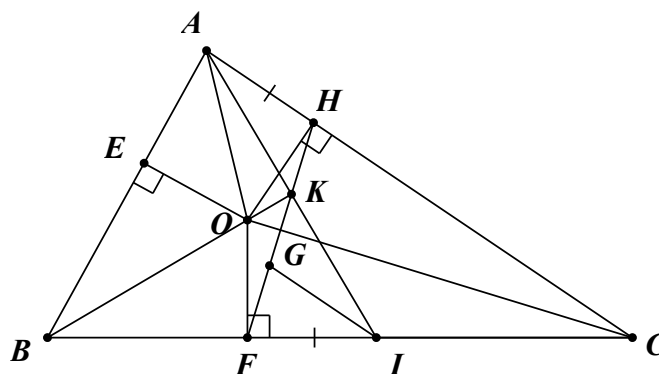
Vì AC là trung trực của HF nên ta có: $AH = AF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AE = AF$.

Câu 2. (HSG 7 trường Lý Thường Kiệt 2017 - 2018) Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI .

- a) Chứng minh $\triangle FCH$ cân
b) Chứng minh $AK = KI$

Lời giải



Ta có $\angle HO = \angle FO = 90^\circ$ (vì $OH \perp AC$, $OF \perp BC$)

Xét $\triangle CHO$ vuông và $\triangle CFO$ vuông có:

OC chung

$\angle HCO = \angle FCO$ (OC là phân giác $\angle C$)

Vậy $\triangle CHO = \triangle CFO$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow CH = CF$ (hai cạnh tương ứng).

Vậy $\triangle FCH$ cân tại C .

Lấy I trên FC sao cho $FI = AH$ ($G \in FH$)

Qua I vẽ

Ta có $\triangle FCH$ cân tại C (cmt) $\Rightarrow \angle HCF = \angle FCH$ (1)

Mà $\angle HCF = \angle FGI$ (đồng vị, $IG \parallel AC$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle FCH = \angle FGI$ hay $\angle FCH = \angle FGI$

Vậy $\triangle FGI$ cân tại I

$\Rightarrow FI = GI$

Mặt khác: $FI = AH$ nên $GI = AH (= FI)$

Ta lại có: $\angle GKI = \angle HKI$; $\angle HAK = \angle GIK$ (so le trong, $IG \parallel AC$)

Xét $\triangle AHK$ và $\triangle IGK$ có:

$\angle GKI = \angle HKI$ (cmt)

$GI = AH$ (cmt)

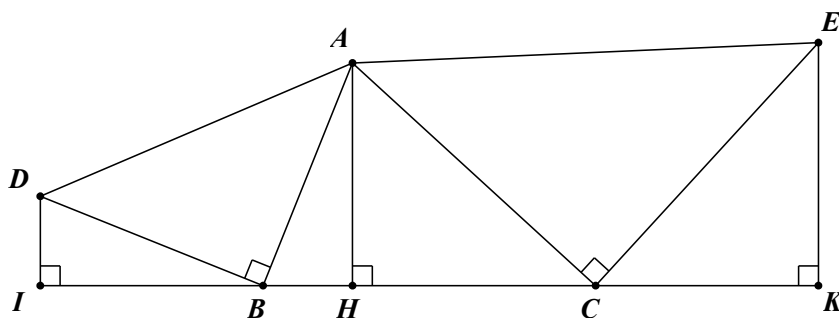
$\angle HAK = \angle GIK$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle AHK = \triangle IGK$ (g.c.g)

$\Rightarrow AK = KI$ (đpcm)

Câu 3. (HSG 7 Thị xã Sầm Sơn 2017 - 2018) Cho tam giác ABC có góc B và C nhọn. Dựng ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại các đỉnh B và C . Vẽ AH , DI và EK cùng vuông góc với đường thẳng BC ($H, I, K \in BC$). Chứng minh: $\triangle BDI = \triangle ABH$ và $DI + EK = BC$.

Lời giải



$\triangle BDI$ vuông tại I có $\angle HDB + \angle IBD = 90^\circ$

Mà $\angle ABH + \angle IBD = 90^\circ$ Nên $\angle HDB = \angle ABH$

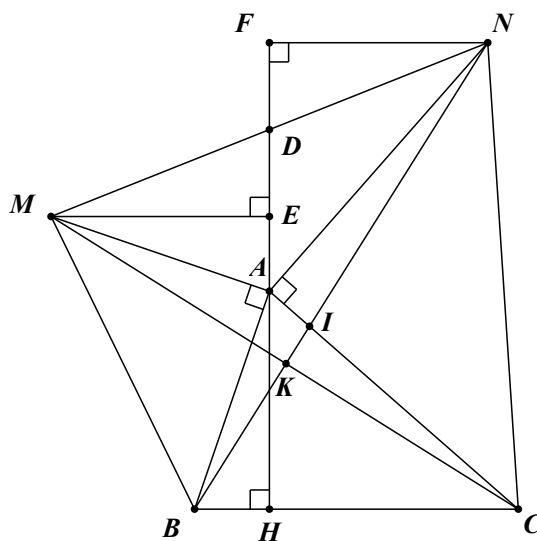
Tương tự $\angle ACH = \angle CEK$

Chứng minh $\triangle BDI = \triangle ABH$; $\triangle CKE = \triangle AHC$ (ch - gn)

Từ đó suy ra: $DI + EK = BH + HC = BC$.

Câu 4. (HSG 7 Huyện Vị Thanh, 2017 - 2018) Cho tam giác ABC có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN .

Lời giải



Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$ có: $AM = AB$ ($\triangle AMB$ vuông cân)

$AC = AN$ ($\triangle ACN$ vuông cân)

$\Rightarrow \angle MAC = \angle NAC (= 90^\circ + \angle BAC) \Rightarrow \triangle AMC = \triangle ABN$ (c.g.c)

Gọi I là giao điểm của BN, AC . K là giao điểm của BN, MC

Xét $\triangle KIC$ và $\triangle AIN$ có: $\angle ANI = \angle KCI$ ($\triangle AMC = \triangle ABN$)

$\angle AIN = \angle KIC$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \angle K C = \angle A I = 90^\circ \quad MC \perp BN$$

, do đó:

Kẻ $ME \perp AH$ tại E, $NF \perp AH$ tại F. Gọi D là giao điểm của MN và AH

$$\angle BAH + \angle MAE = 90^\circ \quad (\angle MAB = 90^\circ)$$

Ta có:

$$\angle MAE + \angle AEM = 90^\circ \quad \angle AEM = \angle BAH$$

Lại có: nên

Xét $\triangle MAE$ và $\triangle ABH$ vuông tại E và H ta có:

$$\angle AEM = \angle BAH$$

$$MA = AB$$

$$\Rightarrow \triangle MAE = \triangle ABH \text{ (ch - gn)}$$

$$\Rightarrow ME = AH$$

$$\triangle AFN = \triangle CHA \Rightarrow FN = AH$$

Chứng minh tương tự ta có

Xét $\triangle MED$ và $\triangle NFD$ vuông tại E và F có:

$$ME = NF (=AH)$$

$$\angle EMD = \angle FND \quad \angle MDE = \angle FDN \quad \angle MDE = \angle FDN$$

(cùng phụ với và mà

$$\Rightarrow \triangle MED = \triangle NFD$$

$$\Rightarrow BD = ND$$

Vậy AH đi qua trung điểm của MN.

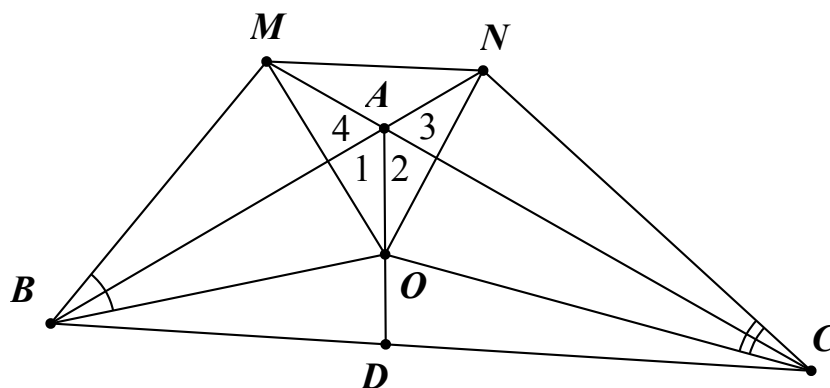
Câu 5. (HSG 7 Huyện Bồ Trách, 2017 - 2018) Cho $\triangle ABC$ có $\angle B + \angle C = 60^\circ$, phân giác AD. Trên AD lấy điểm O, trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $\angle ABM = \angle ABO$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $\angle CN = \angle CO$. Chứng minh rằng

$$AM = AN$$

a)

b) $\triangle MON$ là tam giác đều.

Lời giải



a) $\triangle ABC$ có $\angle B + \angle C = 60^\circ$ nên $\angle A = 120^\circ$

Do AD là tia phân giác nên $\angle A_1 = \angle A_2 = 60^\circ$ ta lại có $\angle A_3 = \angle A_4 = 180^\circ - \angle A = 60^\circ$

Suy ra $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = \angle A_4 (=60^\circ) \Rightarrow \begin{cases} \triangle ABM = \triangle ABD (g.c.g) \Rightarrow AM = AO(1) \\ \triangle ACN = \triangle ACO (g.c.g) \Rightarrow AN = AO(2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra $AM = AN$

$\triangle AOM = \triangle ON (c.g.c) \Rightarrow OM = ON$ (3)

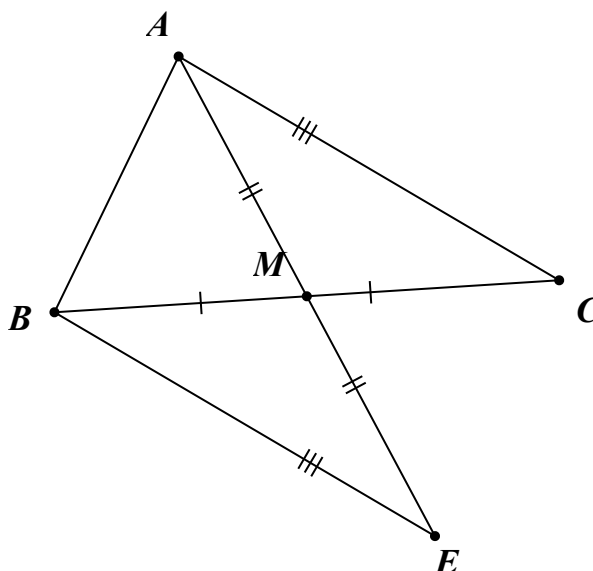
b)

$\triangle AOM = \triangle AMN (c.g.c) \Rightarrow OM = NM$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $OM = ON = NM \Rightarrow \triangle MON$ là tam giác đều.

Câu 6. (HSG 7 Huyện ..., 2017 - 2018) Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng: $AC = EB$.

Lời giải



Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có:

$AM = EM$
(gt)

$\angle AMC = \angle EMB$
(đối đỉnh)

$$BM = MC$$

(gt)

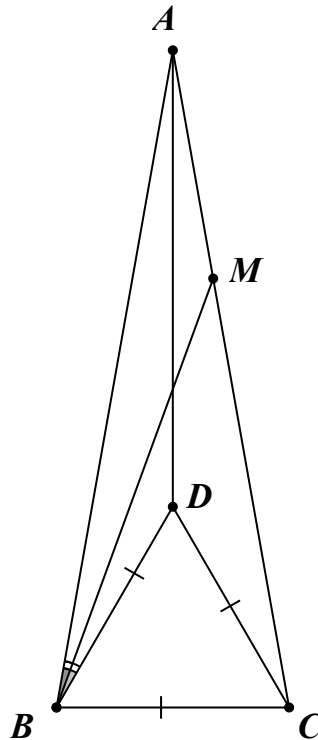
$$\Delta AMC = \Delta EMB (c.g.c)$$

Nên

$$\Rightarrow AC = EB$$

Câu 7. (HSG 7 Huyện, 2017 - 2018) Cho tam giác ABC cân tại A có $\angle A = 20^\circ$, vẽ tam giác đều DBC (D nằm trong tam giác ABC). Tia phân giác của $\angle ABD$ cắt AC tại M . Chứng minh $AM = BC$.

Lời giải



$$\Delta ADB = \Delta ADC (c.c.c)$$

Chứng minh

$$\Rightarrow \angle DAB = \angle DAC \quad \angle DAB = \frac{20^\circ}{2} = 10^\circ$$

, do đó

$$\Delta ABC \text{ cân tại } A, \angle A = 20^\circ \Rightarrow \angle ABC = \frac{(180^\circ - 20^\circ)}{2} = 80^\circ$$

$$\Delta DBC \text{ đều nên } \angle DBC = 60^\circ, \text{ tia } BD \text{ nằm giữa hai tia } BA, BC$$

$$\Rightarrow \angle ABD = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$$

Tia BM là phân giác của $\angle ABD$

$$\Rightarrow \angle ABM = 10^\circ$$

Xét ΔABM và ΔBAD có

AB

cạnh chung

$$\widehat{BAM} = \widehat{ABD} = 20^\circ$$

$$\widehat{ABM} = \widehat{DAB} = 10^\circ$$

Vậy $\triangle ABM = \triangle BAD$ (g.c.g)

$$\Rightarrow AM = BD$$

mà $BD = BC$ (gt)

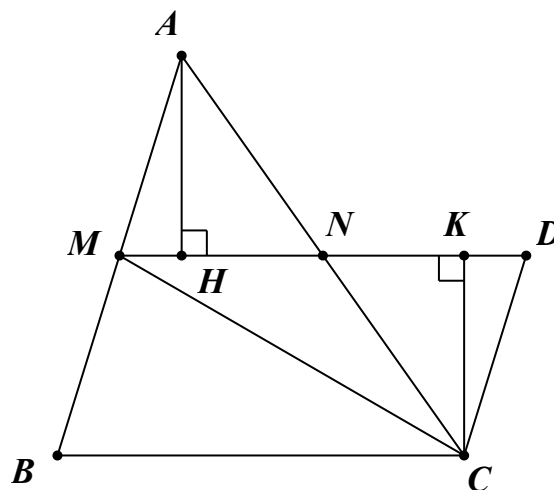
Vậy $AM = BC$.

Câu 8. (HSG 7 trường Thực hành Sài Gòn 2017- 2018) Cho tam giác có ba góc đều nhọn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC . Kẻ $AH \perp MN$ tại H và CK vuông góc với đường thẳng MN tại K . Chứng minh rằng:

a) $AH = CK$

b) $BC = 2MN$

Lời giải



a) Xét $\triangle NHA$ và $\triangle NKC$ có:

$$AN = CN$$

(gt)

$$\widehat{HNA} = \widehat{KNC}$$

(đối đỉnh)

$$\widehat{AHN} = \widehat{CKN} (=90^\circ)$$

$$\triangle NHA = \triangle NKC$$

Nên

$$\Rightarrow AH = CK$$

b) Trên tia đối của tia NM lấy D sao cho $ND = NM$

Xét $\triangle NAM$ và $\triangle NCD$ có:

$$AN = CN$$

$$\angle ANM = \angle CND$$

$$NM = ND$$

$$\triangle NAM = \triangle CND (c.g.c)$$

Từ đó

$$\Rightarrow AM = CD \quad \angle NAM = \angle NCD$$

và

$$AM \parallel CD$$

Do đó

$$\angle MBM = \angle MCD$$

$$\angle CMB = \angle MCD$$

Mà , ở vị trí so le trong nên

$$\triangle MCB \sim \triangle CMD$$

Xét và có:

$$BM = CM$$

$$\angle CMB = \angle MCD$$

$$MC$$

chung

$$\triangle MCB = \triangle CMD (c.g.c)$$

Nên

$$\Rightarrow BC = MD$$

$$MD = 2MN$$

Mà

$$BC = 2MN$$

Nên

Câu 9. (HSG 7 trường THCS Hương Điền – Nam Hương 2017- 2018) Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AM , BI cắt cạnh AC tại D .

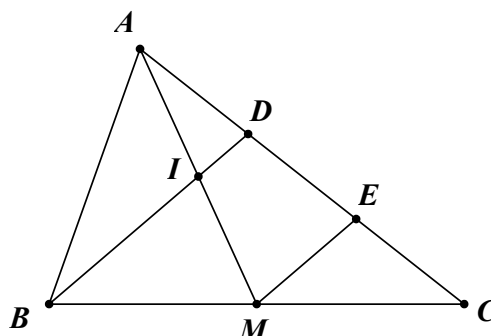
$$AC = 3AD$$

a) Chứng minh

$$ID = \frac{1}{4} BD$$

b) Chứng minh:

Lời giải



a) Gọi E là trung điểm CD trong tam giác BCD nên ME là đường trung bình
 $\Rightarrow ME \parallel BD$

Trong tam giác MAE có I là trung điểm của cạnh AM (gt)

Mà $ID \parallel ME$ (gt)

Nên D là trung điểm của $AE \Rightarrow AD = DE$ (1)

Vì E là trung điểm của $DC \Rightarrow DE = EC$ (2)

So sánh (1) và (2) $\Rightarrow AD = DE = EC$

Suy ra $AC = 3AD$.

b) Trong tam giác MAE , ID là đường trung bình (theo a)

$$\Rightarrow ID = \frac{1}{2}ME \quad (1)$$

Trong $\triangle BCD$, ME là đường trung bình

$$\Rightarrow ME = \frac{1}{2}BD \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow ID = \frac{1}{4}BD$$

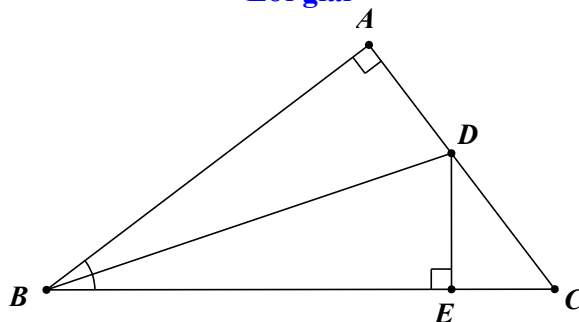
Câu 10. (HSG 7 huyện Tam Nông, trường THCS Hiền Quan 2017- 2018) Cho tam giác ABC

vuông tại A , tia phân giác $\angle ABC$ cắt AC tại D . Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Chứng minh rằng:

a) $DA = DE$.

b) $DA < DC$.

Lời giải



a) Chứng minh được $\triangle ABE = \triangle EBD$ (c.g.c)

$$\Rightarrow DA = DE$$

b) $\triangle ABE = \triangle EBD$ (cmt)

$$\Rightarrow \angle A = \angle E = 90^\circ$$

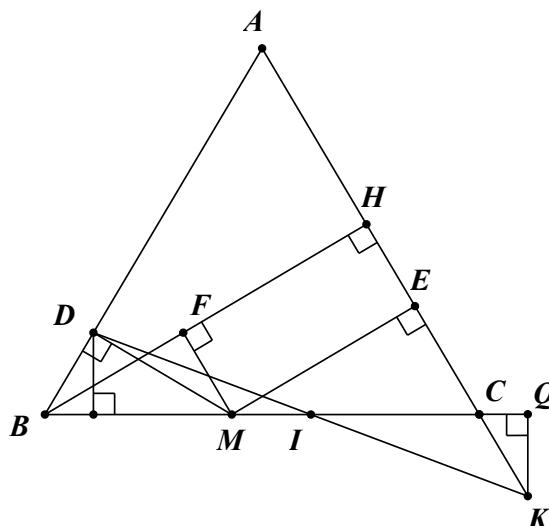
Trong $\triangle EDC$ có $DE < DC$ hay $AD < DC$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Mỏ Cày 2017- 2018) Cho tam giác ABC cân tại A , BH vuông góc với BC tại H . Trên cạnh BC lấy điểm M bất kỳ (khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH lần lượt.

a) Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng $MD + ME$ có giá trị không đổi.

b) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = EH$. Chứng minh BK đi qua trung điểm của DK .

Lời giải



$$\triangle DBM = \triangle FMB \text{ (ch - gn)}$$

a) Chứng minh được

$$\triangle DBM = \triangle FMB \text{ (ch - gn)}$$

Ta có:

$$\Rightarrow MD = BF \quad (1)$$

$$\triangle MFH = \triangle HEM$$

Chứng minh

$$\Rightarrow ME = FH \quad (2)$$

(1) (2)

$$MD + ME = BF + FH = BH$$

Từ và suy ra

$$BH \Rightarrow MD + ME$$

không đổi

không đổi (đpcm)

b) Vẽ $DP \perp BC$ tại P , $KQ \perp BC$ tại Q , gọi I là giao điểm của DK và BC .

$$BD = FM = EH = CK$$

Chứng minh

$$\triangle BDP = \triangle CKQ \text{ (ch - gn)} \Rightarrow DP = KQ$$

Chứng minh

(hai cạnh tương ứng)

$$\square_{DP} = \square_{KQ}$$

Chứng minh

$$\Rightarrow \triangle DPI = \triangle KQI \text{ (c.g.c)}$$

$$ID = IK$$

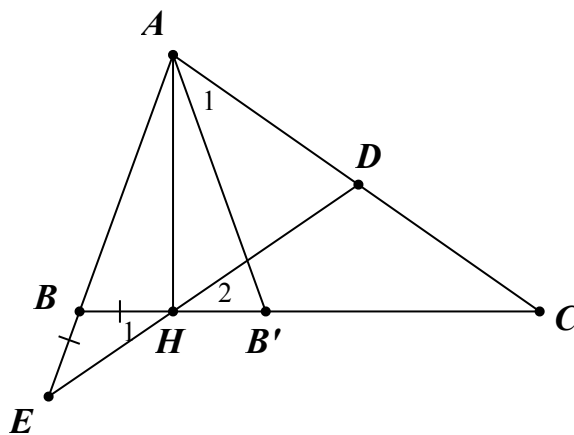
Suy ra (đpcm).

Câu 12. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017- 2018) Cho tam giác ABC có $\angle B < 90^\circ$ và $\angle B = 2\angle C$. Kẻ đường cao AH . Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$. Đường thẳng HE cắt AC tại D .

a) So sánh độ dài của ba đoạn thẳng : DH , DC và DA .

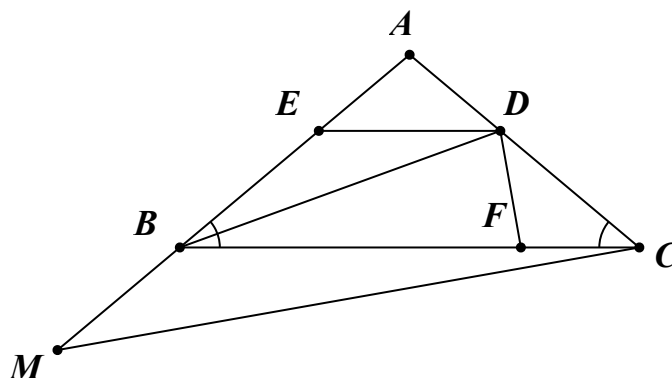
b) Lấy B' sao cho H là trung điểm của BB' . Tam giác $AB'C$ là tam giác gì? Vì sao?

Lời giải



- a) Tam giác BEH cân tại B nên $\angle E = \angle H_1$
 $2\angle E = \angle ABC = \angle E + \angle H_1 = 2\angle E$
 mà
 Nên $\angle BEH = \angle ACB$
 Chứng tỏ được $\triangle DHC$ cân tại D nên $DC = DH$ (1)
 Chứng minh được $\angle DAH = 90^\circ - \angle E$, $\angle DAH = 90^\circ - \angle H_2$
 Suy ra $\angle DAH = \angle AHD \Rightarrow \triangle DAH$ cân tại D nên $DA = DH$ (2)
 Từ (1) và (2) ta có $DC = DH = DA$
 b) $\triangle ABB'$ cân tại A nên $\angle AB'B = \angle ABB' = 2\angle E$ mà $\angle AB'B = \angle A_1 + \angle E$
 Vậy $2\angle E = \angle A_1 + \angle E \Rightarrow \angle A_1 = \angle E$
 $\Rightarrow \triangle AB'C$ cân tại B' .

Câu 13. (HSG 7 huyện Việt Yên 2017- 2018) Cho tam giác ABC cân tại A ($\angle B = \angle C = 40^\circ$). Kẻ phân giác BD ($D \in AC$). Trên tia AB lấy điểm M sao cho $AM = BC$. Chứng minh $BD + AD = BC$.
Lời giải



- Từ D kẻ $DE \parallel BC$, trên BC lấy điểm F sao cho $BD = BF$ (1)
 Chứng minh được $DE = BE$ (tam giác BED cân)
 Do tam giác AED cân nên $AD = AE \Rightarrow BE = CD \Rightarrow DE = CD$
 Tam giác BDF cân có $\angle DBF = 20^\circ$ nên $\angle BFD = 80^\circ \Rightarrow \angle FDC = 100^\circ$
 $\Rightarrow \angle FDC = \angle EAD = 100^\circ$

Vậy $\triangle DFC$ có $\widehat{FDC} = 40^\circ$

Chứng minh được $\triangle ADE = \triangle FCD$ (g.c.g)

$\Rightarrow AD = CF$ (2)

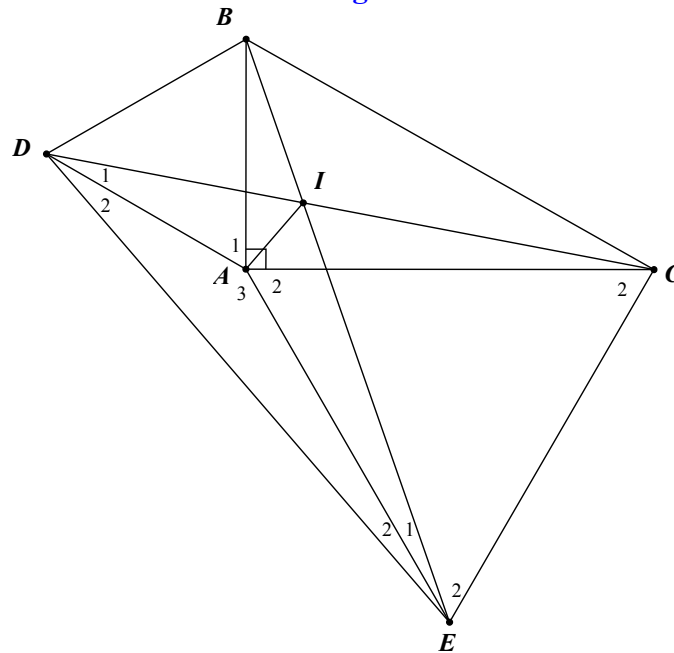
Từ (1) và (2) suy ra $BD + AD = BC$.

Câu 14. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2017- 2018) Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao điểm của BE và CD . Chứng minh rằng

a) $BE = CD$.

b) $\triangle BDE$ là tam giác cân.

Lời giải



$$\begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{A_1} + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \\ \widehat{BAE} = \widehat{A_2} + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BAE} \end{cases}$$

a) Ta có:

Xét $\triangle DAC$ và $\triangle BAE$ có

$DA = BA$ (gt)

$\widehat{BAC} = \widehat{BAE}$ (cmt)

$AC = AE$ (gt)

$\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE$ (c.g.c)

$\Rightarrow BE = CD$ (hai cạnh tương ứng)

$$\widehat{A_3} + \widehat{A_1} + \widehat{BAC} + \widehat{A_2} = 360^\circ$$

b) Ta có :

$$\Leftrightarrow \widehat{A_3} + 60^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{A_3} = 150^\circ = \widehat{BAC}$$

Xét $\triangle DAE$ và $\triangle BAE$ có

$DA = BA$ (gt)

$\widehat{A_3} = \widehat{BAC}$ (cmt)

AE chung

$\Rightarrow \triangle DAE = \triangle BAE$ (c.g.c)

$\Rightarrow DE = BE$

Vậy $\triangle BDE$ cân tại E .

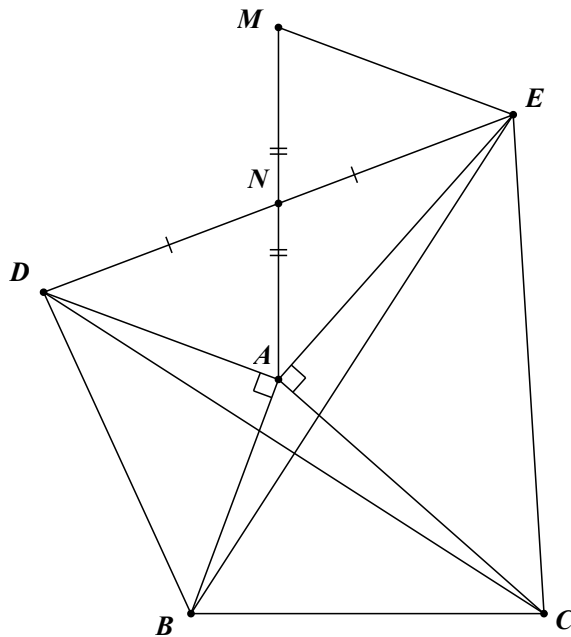
Câu 15. (HSG 7 huyện 2017- 2018) Cho tam giác ABC có $\angle A < 90^\circ$. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó hai đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB ; AE vuông góc và bằng AC .

$$DC = BE$$

a) Chứng minh

b) Gọi N là trung điểm của DE . Trên tia đối của tia NA lấy M sao cho $NA = NM$. Chứng minh $AB = ME$, $\triangle ABC = \triangle EMA$.

Lời giải



a) Xét $\triangle ADC$ và $\triangle BAE$ ta có

$$DA = AB \text{ (gt)}$$

$$AE = AC \text{ (gt)}$$

$$\angle DAC = \angle BAE (= 90^\circ + \angle BAC)$$

$$\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow DC = BE$$

Xét $\triangle AIE$ và $\triangle TIC$ có:

$$\angle I_1 = \angle I_2 \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\angle E_1 = \angle C_1 \text{ (}\triangle DAC = \triangle BAE\text{)}$$

$$\Rightarrow \angle EAI = \angle CTI$$

$$\Rightarrow \angle CTI = 90^\circ$$

$$\Rightarrow DC \perp BE$$

$$\triangle MNE = \triangle AND \text{ (c.g.c)}$$

b) Ta có:

$$\Rightarrow \angle D_1 = \angle MEN, AD = ME$$

$$\text{mà } AD = AB \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow AB = ME \text{ (1)}$$

$$\text{Vì } \angle D_1 = \angle MEN \Rightarrow DA \parallel ME$$

$$\Rightarrow \widehat{BAE} + \widehat{AEM} = 180^\circ \text{ (trong cùng phía)}$$

$$\text{Mà } \widehat{BAC} + \widehat{BAE} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{AEM} \quad (2)$$

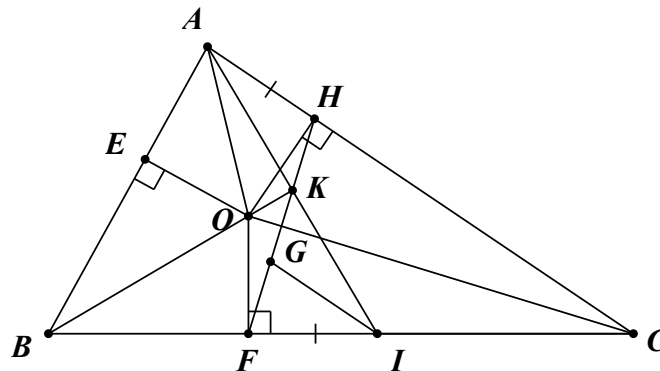
$$\text{Ta lại có } AC = AE \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\triangle ABC = \triangle EMA$ (đpcm).

Dạng 3. Chứng minh 3 điểm thẳng hàng

Câu 1. (HSG 7 trường Lý Thường Kiệt 2017- 2018) Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI . Chứng minh 3 điểm B, O, K thẳng hàng.

Lời giải



Ta có $\widehat{HO} = \widehat{FO} = 90^\circ$ (vì $OH \perp AC$, $OF \perp BC$)

Xét $\triangle CHO$ vuông và $\triangle CFO$ vuông có:

OC chung

$$\widehat{HCO} = \widehat{FCO} \text{ (} OC \text{ là phân giác } \widehat{C} \text{)}$$

Vậy $\triangle CHO = \triangle CFO$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$$\Rightarrow CH = CF \text{ (hai cạnh tương ứng).}$$

Vậy $\triangle FCH$ cân tại C .

Qua I vẽ $IG \parallel AC$ ($G \in FH$)

Ta có $\triangle FCH$ cân tại C (cmt) $\Rightarrow \widehat{CHF} = \widehat{CFH}$ (1)

Mà $\widehat{CHF} = \widehat{FGI}$ (đồng vị, $IG \parallel AC$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{CFH} = \widehat{FGI}$ hay $\widehat{HFG} = \widehat{IGF}$

Vậy $\triangle IFG$ cân tại I

$$\Rightarrow FI = GI$$

Mặt khác: $FI = AH$ nên $GI = AH (= FI)$

Ta lại có: $\widehat{IGK} = \widehat{AHK}$; $\widehat{HAK} = \widehat{GIK}$ (so le trong, $IG \parallel AC$)

Xét $\triangle AHK$ và $\triangle IGK$ có:

$$\widehat{IGK} = \widehat{AHK} \text{ (cmt)}$$

$$GI = AH \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{HAK} = \widehat{GIK} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \Delta AHK = \Delta IGK (g.c.g)$$

$$\Rightarrow AK = KI \text{ (đpcm)}$$

$$OE \perp AB$$

Vẽ tại E,

ΔABC có 2 tia phân giác AO và CO cắt nhau tại O

Nên BO là tia phân giác thứ ba của ΔABC (*)

$$\Delta AOB = \Delta IOB (g.c.g) \text{ nên } AB = BI$$

Chứng minh được: $\Delta ABK = \Delta IBK (c.c.c)$

$$\Rightarrow \angle ABK = \angle IBK$$

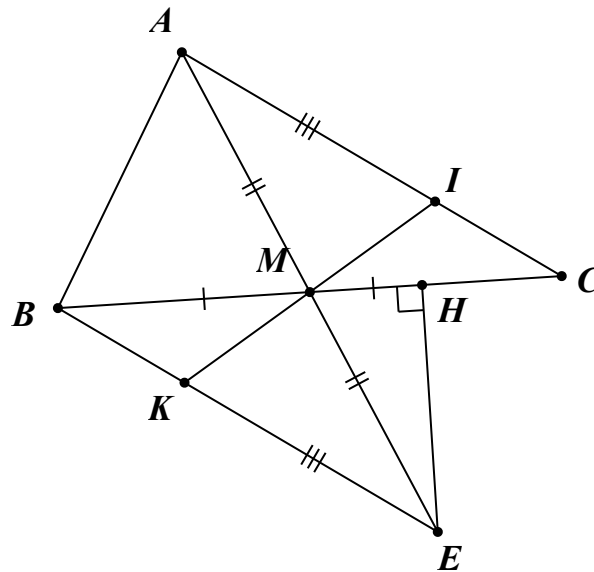
Từ đó suy ra BK là tia phân giác của ΔABC (**)

Từ (*) và (**) suy ra tia BK, BO trùng nhau

Hay B, O, K là ba điểm thẳng hàng.

Câu 2. (HSG 7 Huyện, 2017 - 2018) Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Gọi I là một điểm trên AC , K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K thẳng hàng.

Lời giải



Xét ΔAMC và ΔEMB có:

$$AM = EM$$

(gt)

$$\angle AMC = \angle EMB$$

(đối đỉnh)

$$BM = MC$$

(gt)

$$\Delta AMC = \Delta EMB (c.g.c)$$

Nên

$$\Rightarrow AC = EB$$

$\Delta AMC = \Delta EMB \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MEB}$ AC, EB cắt
 Vì , 2 góc ở vị trí so le trong được tạo bởi đường thẳng
 đường thẳng AE)
 $\Rightarrow AC \parallel BE$

Xét ΔAMI và ΔEMK có: $AM = EM$ (gt)
 $\widehat{MAI} = \widehat{MEK} (\Delta AMC = \Delta EMB)$

$AI = EK$
 (gt)
 $\Rightarrow \Delta AMI = \Delta EMK$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{EMK}$

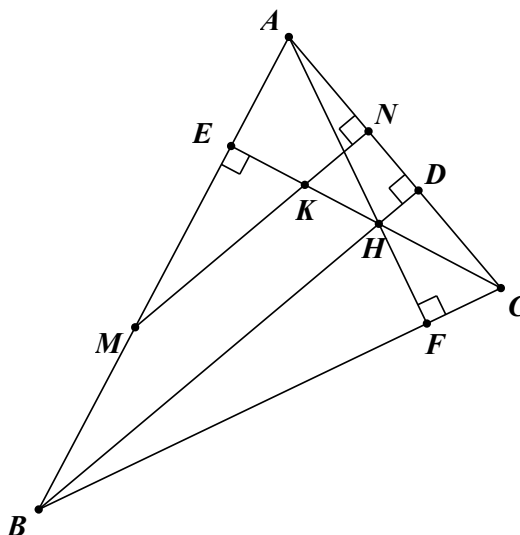
$\widehat{AMI} + \widehat{IME} = 180^\circ$
 Mà (Kề bù)
 $\Rightarrow \widehat{EMK} + \widehat{IME} = 180^\circ$

I, M, K
 Vậy ba điểm thẳng hàng.

Dạng 4. Bất đẳng thức trong tam giác

Câu 1. (HSG 7 trường Trần Hưng Đạo 2017- 2018) Cho tam giác nhọn ABC có $AB > AC$, ba đường cao BD, CE và AF cắt nhau tại H . Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = AC$. Gọi N là hình chiếu của M trên AC ; K là giao điểm của MN và CE . Chứng minh $AB + CE > AC + BD$.

Lời giải



Ta có $\Delta AEC = \Delta ANM$ (c.g.c) nên $CE = MN$

Giả sử $AB + CE > AC + BD$

Suy ra $AB - AC > BD - CE \Rightarrow AB - AM > BD - MN \Rightarrow BM > BD - MN$

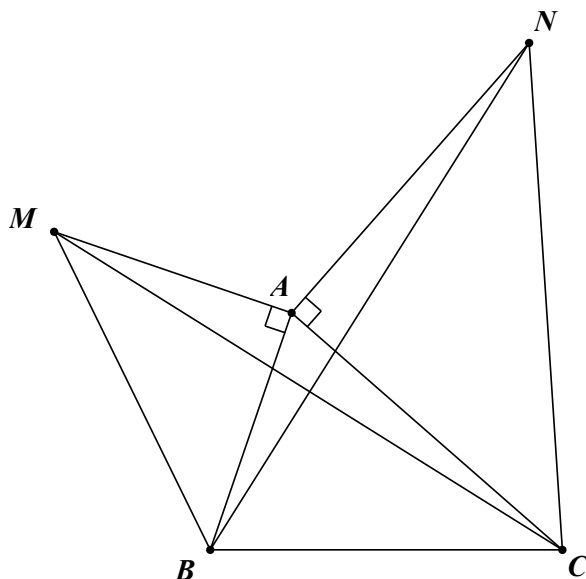
Vẽ $MI \perp BD \Rightarrow BM > BI$ (BM là cạnh huyền) (luôn đúng)

Vậy $AB + CE > AC + BD$.

Dạng 5. Chứng minh song song, vuông góc

Câu 1. (HSG 7 Huyện Vị Thanh, 2017 - 2018) Cho tam giác ABC có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$. Chứng minh $BN \perp CM$.

Lời giải

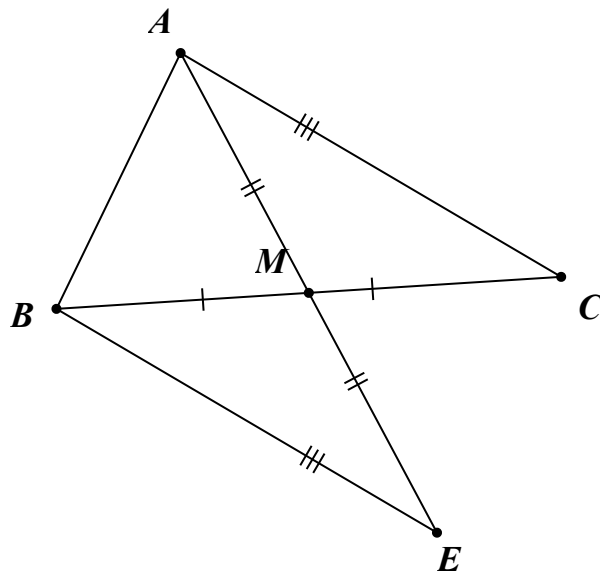


Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$ có: $AM = AB$ ($\triangle AMB$ vuông cân)
 $AC = AN$ ($\triangle ACN$ vuông cân)
 $\Rightarrow \angle MAC = \angle NAB (=90^\circ + \angle BAC) \Rightarrow \triangle AMC = \triangle ABN (c.g.c)$

Gọi I là giao điểm của BN, AC . K là giao điểm của BN, MC
 Xét $\triangle KIC$ và $\triangle AIN$ có: $\angle ANI = \angle CKI$ ($\triangle AMC = \triangle ABN$)
 $\angle AIN = \angle KIC$ (đối đỉnh)
 $\Rightarrow \angle KCI = \angle NAI = 90^\circ$, do đó: $MC \perp BN$

Câu 2. (HSG 7 Huyện, 2017 - 2018) Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng $AC \parallel BE$.

Lời giải



Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có:

$$AM = EM \quad (\text{gt})$$

$$\angle AMC = \angle EMB \quad (\text{đối đỉnh})$$

$$BM = MC \quad (\text{gt})$$

$$\triangle AMC = \triangle EMB \text{ (c.g.c)}$$

Nên

$$\Rightarrow AC = EB$$

Vì $\triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \angle MAC = \angle MEB$, 2 góc ở vị trí so le trong được tạo bởi đường thẳng AC, EB cắt đường thẳng AE)
 $\Rightarrow AC \parallel BE$

Câu 3. (HSG 7 huyện 2017- 2018) Cho tam giác ABC có $\angle A < 90^\circ$. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó hai đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB ; AE vuông góc và bằng AC .

$$DC \perp BE$$

a) Chứng minh .

b) Gọi N là trung điểm của DE . Trên tia đối của tia NA lấy M sao cho $NA = NM$. Chứng minh $AB = ME$ $\triangle ABC = \triangle EMA$.

c) Chứng minh $MA \perp BC$.

Lời giải

Xét $\triangle AHC$ và $\triangle EPA$ có:

$\angle EAH = \angle AEP$ (cùng phụ với $\angle PAE$)

$AE = CA$ (gt)

$\angle PAE = \angle HCA$ (do $\triangle ABC = \triangle EMA$)

$\Rightarrow \triangle AHC = \triangle EPA$

$\Rightarrow \angle EPA = \angle AHC$

$\Rightarrow \angle AHC = 90^\circ$

Vậy $MA \perp BC$ (đpcm).

Dạng 6. Hình khối trong thực tiễn

Câu 1. (HSG 7 trường 2017- 2018)

Lời giải

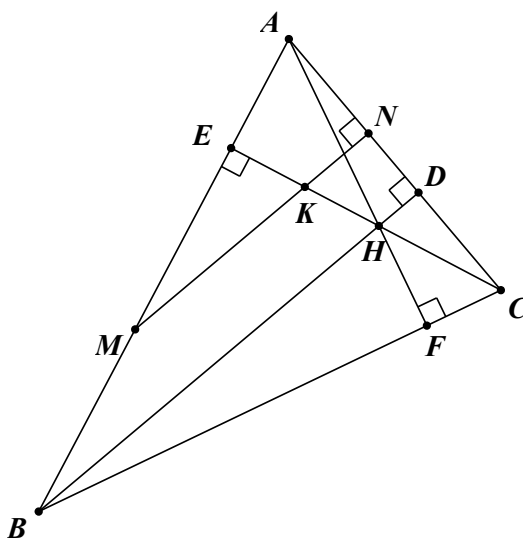
Dạng 7. Bài toán chứng minh tổng hợp

Câu 1. (HSG 7 trường Trần Hưng Đạo 2017- 2018) Cho tam giác nhọn ABC có $AB > AC$, ba đường cao BD , CE và AF cắt nhau tại H . Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = AC$. Gọi N là hình chiếu của M trên AC ; K là giao điểm của MN và CE .

a) Chứng minh hai góc KAH và MCB bằng nhau.

b) Chứng minh $AB + CE > AC + BD$.

Lời giải



a) $\triangle AMC$ có 2 đường cao MN và CE cắt nhau tại K

Nên K là trực tâm của $\triangle AMC$

Suy ra AK là đường cao thứ 3

hay $AK \perp MC \Rightarrow \angle KAH = \angle MCB$.

b) Ta có $\triangle AEC = \triangle ANM$ (c.g.c) nên $CE = MN$

Giả sử $AB + CE > AC + BD$

Suy ra $AB - AC > BD - CE \Rightarrow AB - AM > BD - MN \Rightarrow BM > BD - MN$

Vẽ $MI \perp BD \Rightarrow BM > BI$ (BM là cạnh huyền) (luôn đúng)

Vậy $AB + CE > AC + BD$.

Câu 2. (HSG 7 trường Lý Thường Kiệt 2017- 2018) Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là

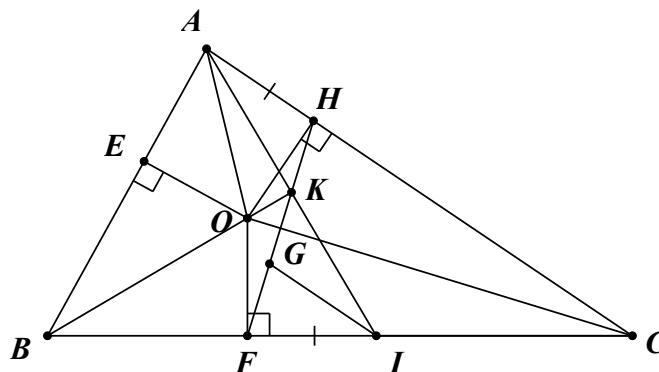
hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI .

a) Chứng minh $\triangle FCH$ cân.

b) Chứng minh $AK = KI$.

c) Chứng minh 3 điểm B, O, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có $\angle HO = \angle FO = 90^\circ$ (vì $OH \perp AC$, $OF \perp BC$)

Xét $\triangle CHO$ vuông và $\triangle CFO$ vuông có:

OC chung

$\angle HCO = \angle FCO$ (OC là phân giác $\angle C$)

Vậy $\triangle CHO = \triangle CFO$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow CH = CF$ (hai cạnh tương ứng).

Vậy $\triangle FCH$ cân tại C .

b) Qua I vẽ $IG \parallel AC$ ($G \in FH$)

Ta có $\triangle FCH$ cân tại C (cmt) $\Rightarrow \angle HCF = \angle FCH$ (1)

Mà $\angle HCF = \angle FGI$ (đồng vị, $IG \parallel AC$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle FCH = \angle FGI$ hay $\angle FCG = \angle FGI$

Vậy $\triangle IFG$ cân tại I

$\Rightarrow FI = GI$

Mặt khác: $FI = AH$ nên $GI = AH (= FI)$

Ta lại có: $\angle GIK = \angle HKI$; $\angle HAK = \angle GIK$ (so le trong, $IG \parallel AC$)

Xét $\triangle AHK$ và $\triangle IGK$ có:

$\angle GIK = \angle HKI$ (cmt)

$GI = AH$ (cmt)

$\angle HAK = \angle GIK$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle AHK = \triangle IGK$ (g.c.g)

$\Rightarrow AK = KI$ (đpcm)

c) Vẽ $OE \perp AB$ tại E

$\triangle ABC$ có 2 tia phân giác AO và CO cắt nhau tại O

Nên BO là tia phân giác thứ ba của $\triangle ABC$ (*)

$\triangle AOB = \triangle IOB$ (g.c.g) nên $AB = BI$

Chứng minh được: $\triangle ABK = \triangle IBK$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \angle ABK = \angle IBK$$

Từ đó suy ra BK là tia phân giác của $\angle ABC$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra tia BK, BO trùng nhau

Hay B, O, K là ba điểm thẳng hàng.

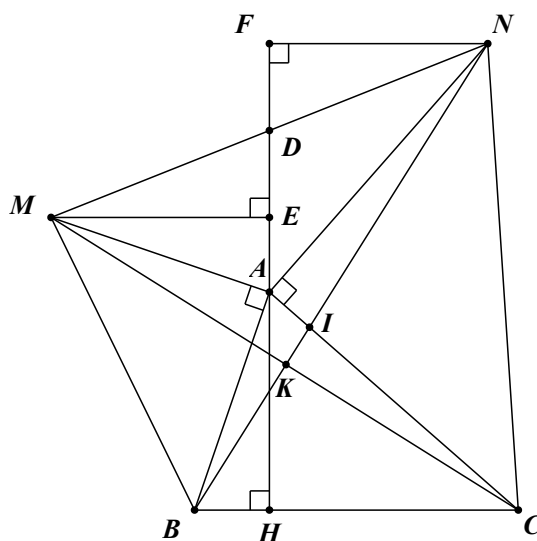
Câu 3. (HSG 7 Huyện Vị Thanh, 2017 - 2018) Cho tam giác ABC có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$.

a) Chứng minh rằng $\triangle AMC = \triangle ABN$.

b) Chứng minh $BN \perp CM$.

c) Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN .

Lời giải



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$ có: $AM = AB$ ($\triangle AMB$ vuông cân)

$AC = AN$ ($\triangle ACN$ vuông cân)

$$\Rightarrow \angle MAC = \angle NAB (=90^\circ + \angle BAC) \Rightarrow \triangle AMC = \triangle ABN \text{ (c.g.c)}$$

b) Gọi I là giao điểm của BN, AC . K là giao điểm của BN, MC

Xét $\triangle KIC$ và $\triangle AIN$ có: $\angle ANI = \angle KCI$ ($\triangle AMC = \triangle ABN$)

$$\angle AIN = \angle KIC \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \angle IKC = \angle NAI = 90^\circ \Rightarrow MC \perp BN, \text{ do đó:}$$

c) Kẻ $ME \perp AH$ tại E, $NF \perp AH$ tại F. Gọi D là giao điểm của MN và AH

$$\angle BAH + \angle MAE = 90^\circ \text{ (vì } \angle MAB = 90^\circ \text{)}$$

Ta có:

$$\angle MAE + \angle AEM = 90^\circ \text{ (vì } \angle MAE = \angle BAH \text{)}$$

Lại có: nên

Xét $\triangle MAE$ và $\triangle ABH$ vuông tại E và H ta có:

$$\widehat{AME} = \widehat{BAH}$$

$$MA = AB$$

$$\Rightarrow \triangle MAE = \triangle ABH \text{ (ch - gn)}$$

$$\Rightarrow ME = AH$$

$$\triangle AFN = \triangle CHA \Rightarrow FN = AH$$

Chứng minh tương tự ta có

Xét $\triangle MED$ và $\triangle NFD$ vuông tại E và F có:

$$ME = NF (=AH)$$

$$\widehat{EMD} = \widehat{FND} \quad \widehat{MDE} = \widehat{FDN} \quad \widehat{MDE} = \widehat{FDN}$$

(cùng phụ với $\widehat{EDF}$ và $\widehat{EDF}$ mà

$$\Rightarrow \triangle MED = \triangle NFD$$

$$\Rightarrow MD = ND$$

Vậy AH đi qua trung điểm của MN .

Câu 4. (HSG 7 Huyện ..., 2017 - 2018) Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng

$$AC = EB \quad AC \parallel BE$$

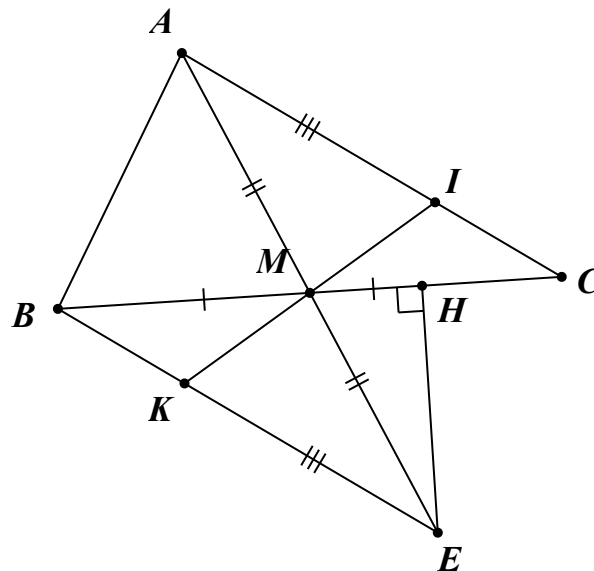
a) và .

b) Gọi I là một điểm trên AC , K là một điểm trên EB sao cho $AI = EK$. Chứng minh ba điểm I, M, K

thẳng hàng

c) Từ E kẻ $EH \perp BC (H \in BC)$. Biết $\widehat{HBE} = 50^\circ$, $\widehat{MEB} = 25^\circ$. Tính $\widehat{HEM}$ và $\widehat{BME}$.

Lời giải



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có:

$$AM = EM \quad (\text{gt})$$

$$\angle AMC = \angle EMB \quad (\text{đối đỉnh})$$

$$BM = MC \quad (\text{gt})$$

$$\triangle AMC = \triangle EMB \text{ (c.g.c)}$$

Nên

$$\Rightarrow AC = EB$$

Vì $\triangle AMC = \triangle EMB \Rightarrow \angle MAC = \angle MEB$, 2 góc ở vị trí so le trong được tạo bởi đường thẳng AC, EB cắt đường thẳng AE)
 $\Rightarrow AC \parallel BE$

b) Xét $\triangle AMI$ và $\triangle EMK$ có: $AM = EM$ (gt)

$$\angle MAI = \angle MEK (\triangle AMC = \triangle EMB)$$

$$AI = EK \quad (\text{gt})$$

$$\Rightarrow \triangle AMI = \triangle EMK \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \angle AMI = \angle EMK$$

Mà $\angle AMI + \angle EME = 180^\circ$ (Kề bù)

$$\Rightarrow \angle EMK + \angle EME = 180^\circ$$

Vậy ba điểm I, M, K thẳng hàng.

c) Trong tam giác vuông BHE ($\angle H = 90^\circ$) có $\angle HBE = 50^\circ \Rightarrow \angle HEB = 40^\circ$
 $\Rightarrow \angle HEM = \angle HEB - \angle MEB = 40^\circ - 25^\circ = 15^\circ$

$\angle BME$ là góc ngoài tại đỉnh M của $\triangle HEM$ nên $\angle BME = \angle HEM + \angle MHE = 15^\circ + 90^\circ = 105^\circ$
 (định lý góc ngoài của tam giác)

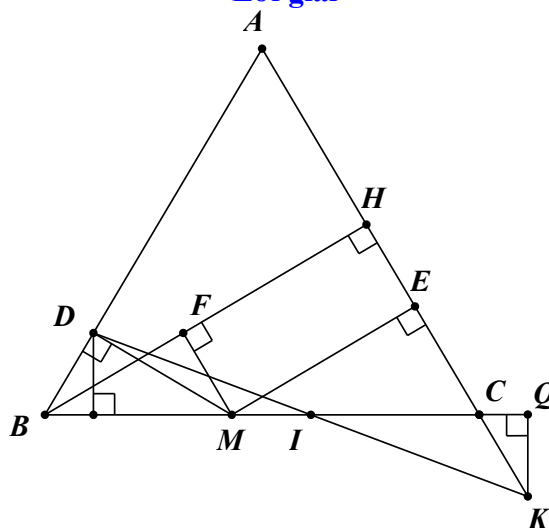
Câu 5. (HSG 7 huyện Mỹ Cày 2017- 2018) Cho tam giác ABC cân tại A , BH vuông góc với AC tại H . Trên cạnh BC lấy điểm M bất kỳ (khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH đến $, ,$.
 $\triangle DBM = \triangle FMB$

a) Chứng minh .

b) Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng $MD + ME$ có giá trị không đổi.

b) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = EH$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK .

Lời giải



$$\triangle DBM = \triangle FMB \text{ (ch - gn)}$$

a) Chứng minh được

$$\triangle DBM = \triangle FMB \text{ (ch - gn)}$$

b) Ta có:

$$\Rightarrow MD = BF \quad (1)$$

$$\triangle MFH = \triangle HEM$$

Chứng minh

$$\Rightarrow ME = FH \quad (2)$$

(1) (2)

$$MD + ME = BF + FH = BH$$

Từ và suy ra

$$BH \Rightarrow MD + ME$$

không đổi

không đổi (đpcm)

c) Vẽ $DP \perp BC$ tại P , $KQ \perp BC$ tại Q , gọi I là giao điểm của DK và BC .

$$BD = FM = EH = CK$$

Chứng minh

$$\triangle BDP = \triangle CKQ \text{ (ch - gn)} \Rightarrow DP = KQ$$

Chứng minh

(hai cạnh tương ứng)

$$\triangle IDP = \triangle IKQ$$

Chứng minh

$$\Rightarrow \triangle DPI = \triangle KQI \text{ (c.g.c)}$$

$$ID = IK$$

Suy ra (đpcm).

Câu 6. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2017- 2018) Cho tam giác ABC có $\angle B < 90^\circ$ và $\angle B = 2\angle C$. Kẻ đường cao AH . Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$. Đường thẳng HE cắt AC tại D .

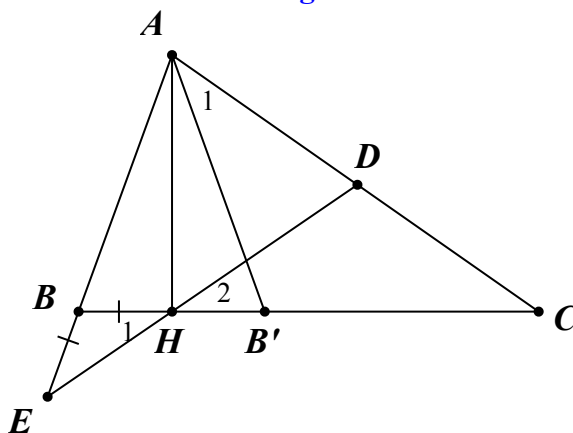
$$\angle BEH = \angle ACB$$

a) Chứng minh

b) So sánh độ dài của ba đoạn thẳng DH , DC và DA .

b) Lấy B' sao cho H là trung điểm của BB' . Tam giác $AB'C$ là tam giác gì? Vì sao?

Lời giải



a) Tam giác BEH cân tại B nên $\angle E = \angle H_1$

$$2\angle C = \angle ABC = \angle E + \angle H_1 = 2\angle E$$

mà

$$\text{Nên } \angle BEH = \angle ACB$$

b) Chứng tỏ được $\triangle DHC$ cân tại D nên $DC = DH$ (1)

Chứng minh được $\angle BAH = 90^\circ - \angle C$, $\angle BAH = 90^\circ - \angle H_2$

Suy ra $\angle BAH = \angle AHD \Rightarrow \triangle DAH$ cân tại D nên $DA = DH$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $DC = DH = DA$

c) $\triangle ABB'$ cân tại A nên $\angle AB'B = \angle ABB' = 2\angle C$ mà $\angle AB'B = \angle A_1 + \angle C$

$$\text{Vậy } 2\angle C = \angle A_1 + \angle C \Rightarrow \angle A_1 = \angle C$$

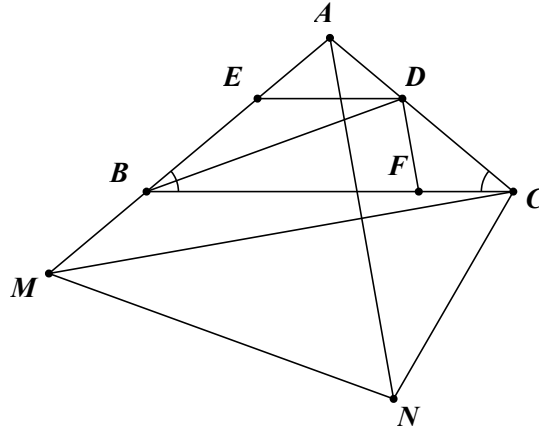
$\Rightarrow \triangle AB'C$ cân tại B' .

Câu 7. (HSG 7 huyện Việt Yên 2017- 2018) Cho tam giác ABC cân tại A ($\angle B = \angle C = 40^\circ$). Kẻ phân giác BD ($D \in AC$). Trên tia AB lấy điểm M sao cho $AM = BC$.

a) Chứng minh $BD + AD = BC$.

b) Tính $\angle AMC$.

Lời giải



a) Từ D kẻ $DE \parallel BC$, trên BC lấy điểm F sao cho $BD = BF$ (1)

Chứng minh được $DE = BE$ (tam giác BED cân)

Do tam giác AED cân nên $AD = AE \Rightarrow BE = CD \Rightarrow DE = CD$

Tam giác BDF cân có $\angle DBF = 20^\circ$ nên $\angle BFD = 80^\circ \Rightarrow \angle FDC = 100^\circ$

$\Rightarrow \angle FDC = \angle AED = 100^\circ$

Vậy $\triangle DFC$ có $\angle FDC = 40^\circ$

Chứng minh được $\triangle ADE = \triangle FCD$ (g.c.g)

$\Rightarrow AD = CF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BD + AD = BC$.

b) Dựng tam giác đều AMN sao cho N và C ở cùng một phía so với AB

Xét $\triangle BAC$ và $\triangle NCA$ có

AC chung

$BC = AN (= AM)$

$\angle ACB = \angle ANA = 40^\circ$

Nên $\triangle BAC = \triangle NCA$

$\Rightarrow AC = CN = AB$

Vậy MC là trung trực của AN nên $\angle AMC = \frac{1}{2} \angle AMN = 30^\circ$.

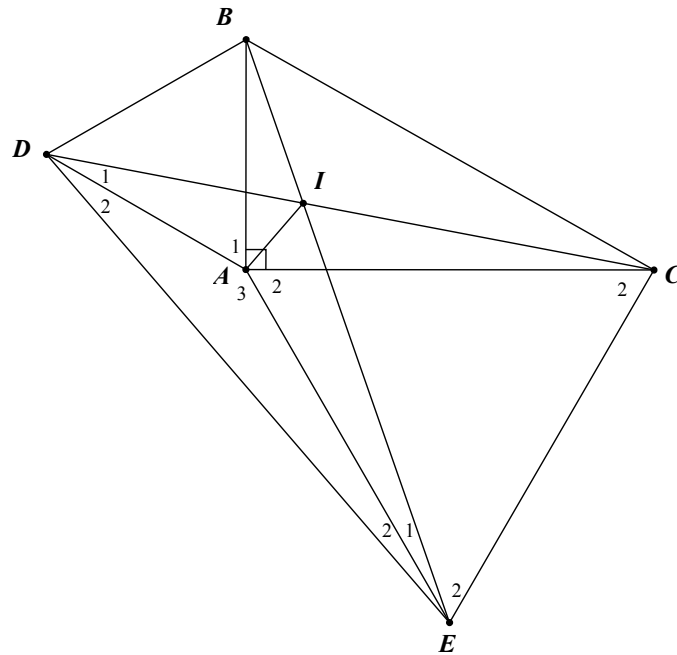
Câu 8. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2017- 2018) Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao điểm của BE và CD . Chứng minh rằng

a) $BE = CD$.

b) $\triangle BDE$ là tam giác cân.

c) $\angle EIC = 60^\circ$ và IA là tia phân giác của $\angle DIE$.

Lời giải



$$\begin{cases} \angle DAC = \angle A_1 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \\ \angle BAE = \angle A_2 + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \Rightarrow \angle DAC = \angle BAE \end{cases}$$

a) Ta có:

Xét $\triangle DAC$ và $\triangle BAE$ có

$$DA = BA \text{ (gt)}$$

$$\angle DAC = \angle BAE \text{ (cmt)}$$

$$AC = AE \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow BE = CD \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\angle A_3 + \angle A_1 + \angle BAC + \angle A_2 = 360^\circ$$

b) Ta có :

$$\Leftrightarrow \angle A_3 + 60^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \angle A_3 = 150^\circ = \angle DAC$$

Xét $\triangle DAE$ và $\triangle BAE$ có

$$DA = BA \text{ (gt)}$$

$$\angle A_3 = \angle DAC \text{ (cmt)}$$

$$AE \text{ chung}$$

$$\Rightarrow \triangle DAE = \triangle BAE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow DE = BE$$

Vậy $\triangle BDE$ cân tại E

c) Ta có: $\triangle DAC = \triangle BAE$ (cmt)

$$\Rightarrow \angle E_1 = \angle E_1 \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Lại có: $\angle F_1 + \angle E_2 + \angle FCE = 180^\circ$ (tổng 3 góc trong $\triangle ICE$)

$$\Leftrightarrow \angle F_1 + (\angle AEC - \angle E_1) + (\angle E_1 + \angle E_2) = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \angle F_1 + 60^\circ - \angle E_1 + \angle E_1 + 60^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \angle F_1 + 120^\circ = 180^\circ \text{ (}\angle E_1 = \angle E_1\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \angle F_1 = 60^\circ$$

Vì $\triangle DAE = \triangle BAE$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{E_2}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow EA$ là tia phân giác của $\widehat{DEI}$ (1)

Vì $\begin{cases} \triangle DAC = \triangle BAE \\ \triangle DAE = \triangle BAE \end{cases} \Rightarrow \triangle DAC = \triangle DAE \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ (hai góc tương ứng)

$\Rightarrow DA$ là tia phân giác của $\widehat{EDC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow A$ là giao điểm của 2 tia phân giác trong $\triangle DIE$

$\Rightarrow IA$ là đường phân giác thứ 3 trong $\triangle DIE$

Vậy IA là tia phân giác của $\widehat{DIE}$.

Câu 9. (HSG 7 huyện 2017- 2018) Cho tam giác ABC có $\widehat{A} < 90^\circ$. Vẽ ra phía ngoài tam giác đó hai đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AB ; AE vuông góc và bằng AC .

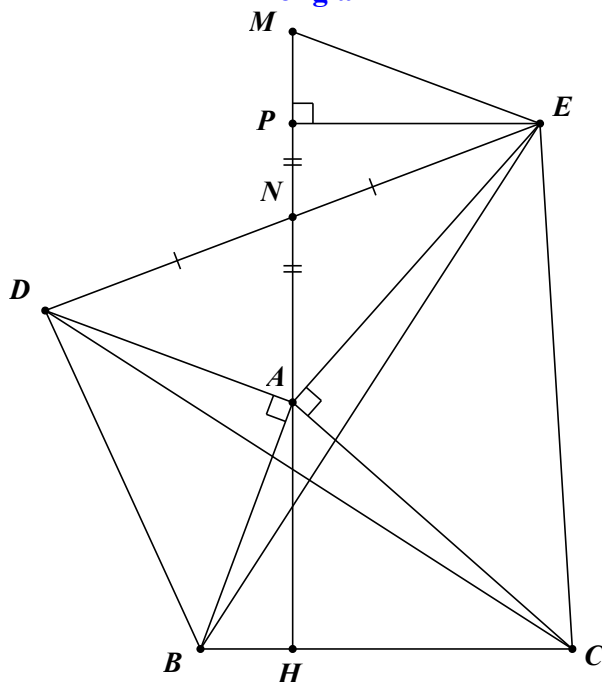
$DC \perp BE$

a) Chứng minh

b) Gọi N là trung điểm của DE . Trên tia đối của tia NA lấy M sao cho $NA = NM$. Chứng minh $AB = ME$ $\triangle ABC = \triangle EMA$

c) Chứng minh $MA \perp BC$.

Lời giải



a) Xét $\triangle ADC$ và $\triangle BAE$ ta có

$DA = BA$ (gt)

$AE = AC$ (gt)

$\widehat{DAC} = \widehat{BAE} (= 90^\circ + \widehat{BAC})$

$\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE$ (c.g.c)

$\Rightarrow DC = BE$

Xét $\triangle AIE$ và $\triangle TIC$ có:

$\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$ (đối đỉnh)

$\widehat{E_1} = \widehat{C_1}$ ($\triangle DAC = \triangle BAE$)

$$\Rightarrow \widehat{EAI} = \widehat{CTI}$$

$$\Rightarrow \widehat{CTI} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow DC \perp BE$$

$$\Delta MNE = \Delta AND \text{ (c.g.c)}$$

b) Ta có:

$$\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{MEN} \quad AD = ME$$

$$\text{mà } AD = AB \quad (\text{gt})$$

$$\Rightarrow AB = ME \quad (1)$$

(đpcm)

$$\text{Vi } \widehat{D_1} = \widehat{MEN} \Rightarrow DA \parallel ME$$

$$\Rightarrow \widehat{DAE} + \widehat{AEM} = 180^\circ \text{ (trong cùng phía)}$$

$$\text{Mà } \widehat{BAC} + \widehat{DAE} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{AEM} \quad (2)$$

$$\text{Ta lại có } AC = AE \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra } \Delta ABC = \Delta EMA \text{ (đpcm).}$$

c) Kéo dài MA cắt BC tại H. Từ E hạ $EP \perp MH$

Xét ΔAHC và ΔEPA có:

$$\widehat{CAH} = \widehat{AEP} \text{ (cùng phụ với } \widehat{PAE} \text{)}$$

$$AE = CA \text{ (gt)}$$

$$\widehat{PAE} = \widehat{HCA} \text{ (do } \Delta ABC = \Delta EMA \text{)}$$

$$\Rightarrow \Delta AHC = \Delta EPA$$

$$\Rightarrow \widehat{EPA} = \widehat{AHC}$$

$$\Rightarrow \widehat{AHC} = 90^\circ$$

Vậy $MA \perp BC$ (đpcm).

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>