

I. MỞ ĐẦU

1. Lí do chọn đề tài:

Bài toán tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số nói riêng và bất đẳng thức nói chung là một trong những chủ đề quan trọng và hấp dẫn trong chương trình giảng dạy và học bộ môn toán ở trường phổ thông. Trong các đề thi môn toán của các kì thi đại học, cao đẳng, tốt nghiệp và thi học sinh giỏi các cấp những năm gần đây các bài toán liên qua đến giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số thường xuyên có mặt và thường là câu hỏi khó của đề thi.

Để tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số hay của biểu thức có nhiều phương pháp như: Sử dụng bất đẳng thức cô si, bất đẳng thức Bunhia; phương pháp lượng giác hóa; phương pháp miền giá trị; phương pháp đồ thị và hình học; phương pháp chiều biến thiên.... Nhưng tôi thấy trong những năm gần đây, trong các đề thi việc sử dụng đạo hàm để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất thường xuyên được sử dụng, chính vì vậy trong quá trình giảng dạy của mình tôi muốn hình thành cho học sinh có tư duy và kỹ năng sử lí các bài toán này dựa vào đạo hàm. Nên tôi xin trình bày sáng kiến kinh nghiệm: **“Phát triển tư duy và kỹ năng của học sinh qua bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất dựa vào đạo hàm”**.

2. Mục đích nghiên cứu:

Khi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức có nhiên ản tôi nhận thấy:

- Học sinh sợ, bỏ qua, không hứng thú.
- Lúng túng, thụ động, không biết xử lí từ đâu.

Vậy vấn đề đặt ra là:

- Cần giúp cho học sinh hệ thống và ghi nhớ đầy đủ các kiến thức liên quan : đạo hàm và các bất đẳng thức cô si, bunhiacôpxki
- Giúp học sinh hình thành và phát triển tư duy linh hoạt, sáng tạo trong các bài toán liên quan.

3. Đối tượng nghiên cứu:

Để giải quyết vấn đề đó tôi đề xuất ý tưởng sau:

- Cần cho học sinh tự hệ thống lại kiến thức trọng tâm sau mỗi buổi học từ đó khắc sâu được kiến thức.
- Từ các bài toán cụ thể, dẫn dắt học sinh tự đúc kết ra các kinh nghiệm giải toán qua đó tự tìm ra thuật giải cho các lớp bài toán khác nhau.
- Cho học sinh thấy được mối liên hệ của kiến thức đang học với thực tiễn cuộc sống.

4. Phương pháp nghiên cứu:

- Xuất phát từ các bài toán cụ thể, cho học sinh nhìn rõ vấn đề và tìm ra phương pháp giải cụ thể cho các bài toán có sử dụng đạo hàm.
- Đúc kết ra thuật toán của các lớp bài toán khác nhau có sử dụng đạo hàm.
- Thực nghiệm sử dụng đạo hàm trong các bài toán tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

II. NỘI DUNG SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM:

1. Cơ sở của sáng kiến kinh nghiệm:

1.1. Bất đẳng thức cô si :

Cho hai số không âm, ta có : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b$.

Tổng quát: Cho n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$. Ta có:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} . \text{Dấu bằng xảy ra khi } a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

1.2. Bất đẳng thức Bunhia_ Côpski:

Cho hai cặp số $(a; b)$ và $(c; d)$, ta có:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

Dấu bằng xảy ra : $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

1.3. Khái niệm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất :

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu :
 $f(x) \leq M \quad \forall x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D : f(x_0) = M$.

Kí hiệu : $M = \max_D f(x)$

- Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu :
 $f(x) \geq m \quad \forall x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D : f(x_0) = m$.

Kí hiệu : $m = \min_D f(x)$

2. Thực trạng của vấn đề trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm:

Sau khi học xong khái niệm đạo hàm và ứng dụng của đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số, trong buổi ôn tập tôi lần lượt đặt ra các ví dụ để học sinh tự giải. Sau thời gian từ năm đến mười phút thực hiện kiểm chứng trên 47 học sinh của lớp 12a7 năm học 2016 -2017

Đặc điểm của lớp thực nghiệm là:

Số học sinh của lớp: 47

Kết quả học tập về môn toán năm học 2015 – 2016 là:

7 học sinh có học lực giỏi

13 học sinh có học lực khá

23 học sinh có học lực trung bình

4 học sinh có học lực yếu.

Nhận biết(nắm vững lý thuyết)		Thông hiểu(có thể vận dụng lý thuyết để thực hành)		Vận dụng linh hoạt trong giải toán	
Số học sinh	Phần trăm	Số học sinh	Phần trăm	Số học sinh	Phần trăm
47	100%	27	57,4%	10	21,3%

3. Các giải pháp sử dụng để giải quyết vấn đề:

Hình thành tư duy và kỹ năng của học sinh qua việc giải các bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất:

Bài toán 1 : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D.

Đây là cách sử dụng trực tiếp chiều biến thiên của hàm số để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, các bài toán này thường gặp trong các đề thi tốt nghiệp, đại học và cao đẳng các khối D, B.

Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D:

Bước 1: Lập bảng biến thiên của hàm số trên D :

- Tính y' và tìm các điểm tới hạn
- Tính giới hạn vô cực và giới hạn tại vô cực (nếu có).

Bước 2: So sánh giá trị của hàm số tại các điểm đặc biệt (thông thường là các điểm cực đại, cực tiểu, các điểm không tồn tại đạo hàm). Từ phép so sánh ấy để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất phải tìm.

Ví dụ 1 : (Đại học khối D năm 2011)

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \frac{2x^2 + 3x + 3}{x + 1} \quad \text{trên } [0; 2]$$

Giải: Ta có :

$$y' = \frac{2x^2 + 4x}{(x + 1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên :

t	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'		+		
Y		3	$\frac{17}{3}$	

Vậy :

$$\max_{[0;2]} y = y(2) = \frac{17}{3}$$

$$\min_{[0;2]} y = y(0) = 3$$

Chú ý : Đối với bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ ta còn có thể áp dụng phương pháp sau đây :

Bước 1: Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n$ trên $[a; b]$ tại đó $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 2: Tính $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$.

Bước 3: Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên và kết luận:

$$\max_{[a;b]} y = M, \quad \min_{[a;b]} y = m$$

Các bài toán trên thực sự rất đơn giản, học sinh không cần hiểu bản chất của bài toán vẫn tìm được kết quả của bài toán. Ta có thể làm như sau :

$$y' = \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}$$

Ta có

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Trong đó nghiệm thỏa mãn trên đoạn $[0 ; 2]$ là $x = 0$

$$\text{Ta có } y(0) = 3 \text{ và } y(2) = \frac{17}{3}$$

$$\text{Vậy } \min_{[0;2]} y = y(0) = 3 \text{ và } \max_{[0;2]} y = y(2) = \frac{17}{3}$$

Ví dụ 2: (Đại học khối D năm 2010)

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10} \text{ trên miền xác định của nó.}$$

Ta thấy bài toán này khác so với ví dụ 1 là bài toán chưa cho ta biết tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập nào, nên bước đầu tiên ta phải chỉ ra tập xác định của hàm số.

Giải

Tập xác định của hàm số $D = [-2 ; 5]$

Ta có :

$$y' = \frac{(4 - 2x)\sqrt{-x^2 + 3x + 10} - (3 - 2x)\sqrt{-x^2 + 4x + 21}}{2\sqrt{-x^2 + 4x + 21}\sqrt{-x^2 + 3x + 10}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{3}$	5	$+\infty$
y'			-	0	+
y					

$$\text{Vậy } \min_{[-2;5]} y = y\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt{2}$$

Ví dụ 3: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \frac{4x}{1+x^4}$$

Ta thấy : Trong ví dụ này khó hơn ví dụ 2, vì tập xác định của hàm số là tập $\mathbb{R}$, như vậy khi lập bảng biến thiên học sinh phải có kiến thức về giới hạn vô cực. Giáo viên nhắc lại kiến thức cơ bản về giới hạn vô cực:

Cho hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ với $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức.

- Nếu bậc $f(x) > \text{bậc } g(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y, \lim_{x \rightarrow -\infty} y$ kết quả bằng vô cực.
- Nếu bậc $f(x) = \text{bậc } g(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{a}{b}$ với a, b lần lượt là hệ số của x có số mũ cao nhất trong các đa thức $f(x)$ và $g(x)$.
- Nếu bậc $f(x) < \text{bậc } g(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$

Giải : Tập xác định: $\mathbb{R}$

Giới hạn :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$$

Ta có :

$$y' = \frac{4(1 - 3x^4)}{(1 + x^4)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \end{cases}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			$-\sqrt[4]{27}$		$\sqrt[4]{27}$		0

Vậy $\max y = y\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = \sqrt[4]{27}$ và $\min y = y\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) = -\sqrt[4]{27}$

Ví dụ 4: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(0; 1)$

$$y = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$$

Giải : Xét hàm số $y = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; 1)$

Ta có :

$$y' = \frac{2}{(1-x)^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{2} \\ x = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0	$-1+\sqrt{2}$	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		$-\infty$	$3+2\sqrt{2}$	$+\infty$	

Vậy $\min_{(0;1)} y = y(-1+\sqrt{2}) = 3+2\sqrt{2}$

Ví dụ 5: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \frac{\cos x + 1}{\cos^2 x + \cos x + 1}$$

Ta thấy : Đối với hàm số trên nếu ta tính đạo hàm đối với hàm số lượng giác thì lập bảng biến thiên rất khó khăn, nên ở đây ta kết hợp với việc đặt ẩn phụ để đưa về các ví dụ trên.

Giải :

Đặt $t = \cos x$, $|t| \leq 1$. Hàm số trở thành :

$$y = \frac{t+1}{t^2+t+1} \quad \text{với } t \in [-1; 1]$$

Ta có :

$$y' = \frac{-t^2 - 2t}{(t^2 + t + 1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+\infty$
y'		+	0	-		
y		0	1	$\frac{2}{3}$		

Vậy $\max y = 1$ đạt được khi $t = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\min y = 0$ đạt được khi $t = -1 \Rightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Chú ý : Việc đi tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số trên có rất nhiều ứng dụng trong khi giải phương trình, bất phương trình, hệ phương trình có tham số, xuất hiện rất nhiều trong các đề thi đại học những năm gần đây, như trong đề thi đại học khối B năm 2004 như sau :

Tìm m để phương trình sau có nghiệm :

$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$$

Giải:

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq t \leq 2$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{1-x^4} = 2 - t^2. \text{ Phương trình trở thành :}$$

$$m(t+2) = 2 - t^2 - t, \quad \text{với } t \in [0; \sqrt{2}]$$

$$\Leftrightarrow \frac{-t^2 - t + 2}{t+2} = m$$

Xét hàm số :

$$f(t) = \frac{-t^2 - t + 2}{t + 2}, \quad t \in [0; \sqrt{2}]$$

$$f'(t) = \frac{-t^2 - 4t}{(t + 2)^2} < 0 \quad \forall t \in [0; \sqrt{2}]$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
f'(x)		-		
f(x)		1	$\sqrt{2} - 1$	

$$\Rightarrow \min_{[0; \sqrt{2}]} y = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 \quad \text{và} \quad \max_{[0; \sqrt{2}]} y = f(0) = 1$$

Khi đó : Phương trình có nghiệm $\sqrt{2} - 1 \leq m \leq 1$

Như vậy, trong bài toán 1 công việc tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D không khó khăn nhiều với học sinh. Học sinh đã vượt qua mức độ tư duy và kỹ năng tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số hay biểu thức có một ẩn. Học sinh gặp bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức có nhiều ẩn thì học sinh phải làm như thế nào ?

Bài toán 2 : Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức có nhiều ẩn:

Đây là bài toán khó nhất trong các đề thi đại học, cao đẳng những năm gần đây và cũng như các đề thi học sinh giỏi các cấp. Bài toán này có nhiều phương pháp giải quyết, nêu sử dụng phương pháp chiều biến thiên (sử dụng đạo hàm) thì học sinh phải làm được :

- **Bước 1:** Biến đổi, đánh giá (sử dụng các bất đẳng thức cơ bản) để đưa biểu thức có nhiều ẩn về biểu thức có một ẩn.
- **Bước 2:** Tìm điều kiện đầy đủ của ẩn số.
- **Bước 3:** Quay lại bài toán 1 (xét hàm số trên một tập nào đó).

Ví dụ 6: Cho hai số x, y thỏa mãn : $x \geq 0, y \geq 0, x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$$

Ta thấy : Biểu thức P có hai ẩn x, y ta phải biến đổi P chỉ chứa một ẩn xy như sau :

$$\begin{aligned} P &= \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} \\ &= \frac{x(x+1) + y(y+1)}{(x+1)(y+1)} \\ &= \frac{(x+y)^2 - 2xy + 1}{xy + x + y + 1} \\ &= \frac{2 - 2xy}{2 + xy} \end{aligned}$$

Vấn đề tiếp theo là ta phải tìm điều kiện của xy như thế nào ?

- vì $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$
- Ta có :

$$1 = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 0 \leq xy \leq \frac{1}{4}$$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$f(t) = \frac{2-2t}{2+t}, \quad t \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$$

Ta có : $f'(t) = -\frac{6}{(2+t)^2} < 0 \quad \forall t \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
f(t)		-		
F(t)		1	$\frac{2}{3}$	

Vậy

$$\min_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow \min P = \frac{2}{3} \text{ đạt được khi } \begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$$

$$\max_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f(0) = 1 \Rightarrow \max P = 1 \text{ đạt được khi } \begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Chú ý : Khi gặp bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P có nhiều ẩn mà sử dụng đạo hàm học sinh thường gặp khó khăn :

- Biến đổi, đánh giá biểu thức P có nhiều ẩn về biểu thức có một ẩn.
- Tìm điều kiện đầy đủ của ẩn. (Học sinh hay mắc sai lầm và khó khăn ở công việc này)
- Xét dấu đạo hàm.

Ví dụ 7 : Cho $x > 0, y > 0, z > 0$ và $x+y+z \leq \frac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Giải :

$$\text{Ta có } (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq P \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$$

$$\Rightarrow P \geq x+y+z + \frac{9}{x+y+z}$$

Đặt $t = x + y + z$, $0 < t \leq \frac{3}{2}$

Xét hàm số: $f(t) = t + \frac{9}{t}$ với $0 < t \leq \frac{3}{2}$

$f'(t) = 1 - \frac{9}{t^2} < 0$ với $0 < t \leq \frac{3}{2}$

Bảng biến thiên :

t	0	$\frac{3}{2}$
$f'(t)$	-	
$f(t)$		$\frac{15}{2}$

$\Rightarrow f(t) \geq \frac{15}{2}, \quad \forall t \in \left(0; \frac{3}{2}\right]$

$\Rightarrow P \geq \frac{15}{2}$

Vậy $\min P = \frac{15}{2}$ đạt được khi $\begin{cases} x + y + z = \frac{3}{2} \\ x = y = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$

Ví dụ 8: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$P = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

Với x, y khác 0.

Giải:

Đặt : $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad |t| \geq 2$

Khi đó :

$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = t^2 - 2$

$\frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} = (t^2 - 2)^2 - 2$

Biểu thức P trở thành :

$P = (t^2 - 2)^2 - 2 - (t^2 - 2) + t$
 $= t^4 - 5t^2 + t + 4$

Xét hàm số : $f(t) = t^4 - 5t^2 + t + 4 \quad (|t| \geq 2)$

Ta có:

$f'(t) = 4t^3 - 10t + 1$

$f''(t) = 12t^2 - 10 > 0 \quad \forall |t| \geq 2$

Suy ra $f'(t)$ đồng biến trên $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

Khi đó :

$t \geq 2 \Rightarrow f'(t) \geq f'(2) = 13 > 0$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[2; +\infty)$

$t \leq -2 \Rightarrow f'(t) \leq f'(2) = -11 < 0$ suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $(-\infty; -2]$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$f'(x)$	-			+	
$f(x)$	$+\infty$	-2		2	$+\infty$

$\Rightarrow \min f(x) = -2$

Vậy $\min P = -2$ đạt được với $t = -2 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$

$$\Leftrightarrow x = -y \neq 0$$

Chú ý : Bài toán trên có một khó khăn đó là xét dấu $f'(x)$. Việc đi tìm điều kiện của ẩn đối với bài này không khó khăn lắm với $x, y \neq 0$. Trong các ví dụ 6, 7, 8 học sinh có thể dự đoán được kết quả của bài toán về giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất đạt được khi ẩn bằng nhau. Với các bài toán này đôi khi ta có thể sử dụng bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất như ví dụ 7 :

$$\text{Ta có } T \geq x + y + z + \frac{9}{x + y + z} \geq x + y + z + \frac{9}{4(x + y + z)} + \frac{27}{4(x + y + z)} \geq 3 + \frac{9}{2} \geq \frac{15}{2}$$

Nhưng với những bài tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất đạt được khi các ẩn nhận những giá trị khác nhau thì phương pháp đạo hàm cực kì hiệu quả.

Ta sẽ mở rộng bài toán nếu thay đổi điều kiện của x, y như sau :

Cho x, y thỏa mãn : $1 \leq x \leq 2$ và $3 \leq y \leq 4$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất :

$$P = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Giải :

Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

Với $1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{2}{3}$

Xét hàm số : $f(u) = u + \frac{1}{u}$ với $\frac{1}{4} \leq u \leq \frac{2}{3}$

$$f'(u) = 1 - \frac{1}{u^2} < 0 \quad \forall u \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3} \right]$$

Bảng biến thiên :

y		$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	
$f'(x)$		-		
$f(x)$		$\frac{17}{4}$	$\frac{13}{6}$	

$$\Rightarrow \frac{13}{6} \leq t \leq \frac{17}{4}$$

Bài toán trên trở thành bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của

$$F(t) = t^5 - 5t^2 + t + 4 \text{ với } \frac{13}{6} \leq t \leq \frac{17}{4}$$

$$F'(t) = 4t^3 - 10t + 1 = 4t(t^2 - 4) + 6t + 1 > 0 \quad \forall t \in \left[\frac{13}{6}, \frac{17}{4} \right]$$

Bảng biến thiên :

t		$\frac{13}{6}$		$\frac{17}{4}$	
F'(t)			+	$\frac{4249}{16}$	
F(t)		$\frac{1083}{54}$			

Vậy $\min F(t) = \frac{1083}{54} \Rightarrow \min P = \frac{108}{54}$ đạt được khi

$$t = \frac{13}{6} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{17}{4} \\ 1 \leq x \leq 2 \\ 3 \leq y \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

$\max F(t) = \frac{4249}{16} \Rightarrow \max P = \frac{4249}{16}$ đạt được khi :

$$t = \frac{17}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \\ 1 \leq x \leq 2 \\ 3 \leq y \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Ví dụ 9: (Đề thi đại học khối B năm 2011)

Cho hai số a, b thỏa mãn: $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 4 \left(\frac{a^3}{b^3} + \frac{b^3}{a^3} \right) - 9 \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right)$$

Hướng dẫn:

Đặt: $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

Khó khăn trong bài này: Ta phải biến đổi xuất hiện t từ giả thiết và đánh giá t dựa vào giả thiết để tìm điều kiện của t.

Ta có: $2(a^2 + b^2) + ab = (a + b)(ab + 2)$

$$2(a^2 + b^2) + ab = a^2b + ab^2 + 2(a + b)$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + 2 = a + b + 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
a+b+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) &\geq 2\sqrt{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} = 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+4} \\
\Rightarrow 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+1 &\geq 2\sqrt{2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+4} \\
\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a} &\geq \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Bài toán trở thành : Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$f(t) = 4(t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2)$$

$$= 4t^3 - 9t^2 - 12t + 18 \quad \forall t \geq \frac{5}{2}$$

Ta có : $f'(t) = 6(2t^2 - 3t - 2) > 0 \quad \forall t \geq \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow \min_{\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)} f(t) = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{23}{4}$$

$$\Rightarrow \min P = -\frac{23}{4} \quad \text{đạt được khi}$$

$$t = \frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{5}{2} \\ a+b = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

Ví dụ 10 : (Đề thi học sinh giỏi cấp tỉnh Thanh Hóa năm 2010_2012)

Cho các số a, b, c thỏa mãn : $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 6 \\ ab + bc + ca = -3 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức: $P = a^6 + b^6 + c^6$.

Giải:

$$\text{Ta có: } (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = 0$$

$$\Rightarrow a+b+c = 0$$

$$\Rightarrow b+c = -a$$

$$\text{Mà } ab+bc+ca = 6 \Rightarrow a(b+c) + bc = -3$$

$$\Rightarrow bc = a^2 - 3$$

$$\text{Và } a^2 + b^2 + c^2 = 6 \Rightarrow b^2 + c^2 = 6 - a^2$$

Ta thấy:

$$(b-c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 \geq 2bc$$

$$\Leftrightarrow 6 - a^2 \geq 2(a^2 - 3)$$

$$\Leftrightarrow a^2 \leq 4$$

$$\Rightarrow 0 \leq a^2 \leq 4$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}
 P &= a^6 + b^6 + c^6 \\
 &= a^6 + (b^2 + c^2) \left[(b^2 + c^2)^2 - 3b^2c^2 \right] \\
 &= a^6 + (6 - a^2) \left[(6 - a^2)^2 - 3(a^2 - 3)^2 \right] \\
 &= 3a^6 - 18a^4 + 27a^2 + 54
 \end{aligned}$$

Đặt $a^2 = t$ ($0 \leq t \leq 4$)

Bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:

$$f(t) = 3t^3 - 18t^2 + 27t + 54 \quad \forall t \in [0; 4]$$

Ta có:

$$f'(t) = 9t^2 - 36t + 27$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	3	4	$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+
f(x)		54	66	54	66	

$\Rightarrow \max f(t) = 66 \Rightarrow \max P = 66$ đạt được khi bộ số (a; b; c) là hoán vị của các bộ số (2; 1; 1) hoặc (2; -1; -1) hoặc (-2; 1; 1) hoặc (-2; -1; -1).

Ví dụ 11: (Đại học khối A năm 2011)

Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn [1; 4] và $x \geq y$; $y \geq z$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức: $P = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}$

Hướng dẫn:

Khó khăn của bài này là biểu thức P có 3 ẩn x, y, z ta sử dụng bất đẳng thức phụ để đánh giá đưa biểu thức P về biểu thức có một ẩn. Dựa vào bất đẳng thức phụ:

Xét $a > 0, b > 0, ab \geq 1$ ta có:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$$

Giải:

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } P &= \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \\
 &= \frac{1}{2+3\frac{y}{x}} + \frac{1}{1+\frac{z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{1+\frac{z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}} \geq \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{1}{2+3\frac{y}{x}} + \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$ do $x \geq y$ với $x, y \in [1; 4] \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{y} \leq 4$

Suy ra $1 \leq t \leq 2$

$$\Rightarrow P \geq \frac{1}{2+\frac{3}{t^2}} + \frac{2}{1+t} \Leftrightarrow P \geq \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t}$$

Xét hàm số: $f(t) = \frac{t^2}{2t^2+3} + \frac{2}{1+t} \quad (1 \leq t \leq 2)$

$$\text{Ta có: } f'(t) = \frac{6t}{(2t^2+3)^2} - \frac{2}{(1+t)^2} = \frac{-2 \cdot [t^3(4t-3) + 3t(2t-1) + 9]}{(2t^2+3)^2 \cdot (1+t)^2} < 0$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	1	2	$+\infty$
f(t)			-	
f(t)			$\frac{34}{33}$	

$$\Rightarrow f(t) \geq f(2) = \frac{34}{33}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{34}{33}$$

$$\Rightarrow \min P = \frac{34}{33} \text{ đạt được khi: } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = 2 \\ \sqrt{x \cdot y} = 2 \\ x = y \\ x, y, z \in [1; 4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Chú ý: Trong ví dụ 11 thì biến đổi biểu thức P thành biểu thức có một ẩn dựa vào sử dụng bất đẳng thức phụ ta có thể làm theo cách sau đây có vẻ tự nhiên hơn, đó là sự kết hợp giữa bài toán 1 và bài toán 2 như sau:

Coi P như là một hàm số của z, xét hàm số ẩn z:

$$P = P(z) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \quad (z \in [1; x])$$

$$\text{Ta có } P'(z) = -\frac{y}{(y+z)^2} + \frac{x}{(z+x)^2} = \frac{(x-y)(z^2 - xy)}{(y+z)^2 \cdot (z+x)^2}$$

$$\text{Với } x = y \Rightarrow P(z) = \frac{y}{5y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+y} = \frac{6}{5} \quad \forall z \in [1; x]$$

$$\text{Với } x > y \Rightarrow P'(z) = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{xy}$$

Bảng biến thiên:

z	$-\infty$	1	$\sqrt{xy}$	x	$+\infty$
$P'(z)$			- 0 +		
$P(z)$					

$$\Rightarrow P(z) \geq P(\sqrt{xy}) = \frac{x}{2x+3y} + \frac{y}{y+\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}+x}$$

$$\Leftrightarrow P(z) \geq \frac{x}{2x+3y} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow P(z) \geq \frac{1}{2+3\frac{y}{x}} + \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

Khi đó ta quay lại ví dụ 11

4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm:

Trong chương trình THPT “đạo hàm” là một công cụ khá đặc lực trong giải toán. Nhờ có công cụ đạo hàm mà nhiều bài toán khó được giải quyết với lời giải logic và trình bày ngắn gọn xúc tích. Việc ôn tập và hệ thống kiến thức cho học sinh là thực sự cần thiết, vì vậy tôi đã thực hiện đề tài này với mong muốn học sinh lớp 12 ôn tập tốt để dự thi các kỳ thi học sinh giỏi và đại học, cao đẳng,

Trong quá trình giảng dạy, bồi dưỡng học sinh dự thi học sinh giỏi, phụ đạo học sinh yếu kém, tôi đã tích lũy được một số kinh nghiệm sử dụng đạo hàm trong bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất như trên. Đây thực sự là một tài liệu hữu ích đã được tôi kiểm chứng thực tế và cho kết quả tốt.

Thường thì các em học sinh có học lực khá và giỏi sẽ giải toán tương đối nhanh và đạt được mức độ thời gian theo quy định, còn đối tượng học sinh còn lại tỏ ra khá chậm chạp trong tư duy nhất là trong quá trình tìm và kiểm tra nghiệm của bài toán. Sau khi triển khai hướng dẫn 47 học sinh của lớp sử dụng đạo hàm trong quá trình tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất thì thu được kết quả tương đối khả quan:

Nhận biết(nắm vững lý thuyết)		Thông hiểu(có thể vận dụng lý thuyết để thực hành trên máy tính)		Vận dụng linh hoạt (sử dụng tốt máy tính trong giải toán)	
Số học sinh	Phần trăm	Số học sinh	Phần trăm	Số học sinh	Phần trăm
47	100%	47	100%	40	85%

III. KẾT LUẬN, KIẾN NGHỊ:

1. Kết luận:

Trên đây tôi đã giới thiệu một số kỹ năng sử dụng đạo hàm trong thực hành giải toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Tôi đã áp dụng trực tiếp đối với học sinh mà mình dạy và trao đổi rút kinh nghiệm với các đồng nghiệp thấy thu được nhiều kết quả tốt: học sinh ham học hơn, tiếp thu kiến thức tốt và thực hành thuần thục hơn.

2. Kiến nghị:

Tuy nhiên theo quy định hạn hẹp của số trang trong một sáng kiến kinh nghiệm và phạm vi áp dụng chưa rộng nên không tránh được những sai sót khi thực hiện đề tài. Mong được sự góp ý của các bạn đồng nghiệp để sáng kiến kinh nghiệm được hoàn chỉnh hơn.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ

Thanh Hóa, ngày 20 tháng 5 năm 2017

Tôi xin cam đoan đây là SKKN của
mình viết, không sao chép nội dung của
người khác.

Lương Ngọc Hòa