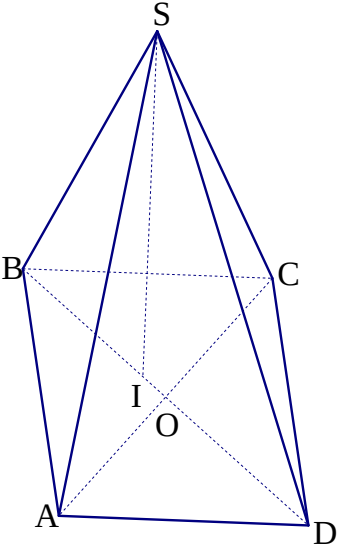


Câu	Nội dung	Biểu điểm (đ)
1.	Chứng minh (C) cắt trục hoành tại ba điểm có hoành độ lập thành cấp số nhân :	$\Sigma = 4$ đ
	Ta có $y = x^3 + px^2 + pqx + q^3$, đồ thị là (C); Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox là : $x^3 + px^2 + pqx + q^3 = 0$ (α) (vì Ox có phương trình là $y = 0$);	0,5 đ
	$\Leftrightarrow [x + q][x^2 + (p - q)x + q^2] = 0$;	0,75 đ
	$\Leftrightarrow x = -q$ hoặc $x^2 + (p - q)x + q^2 = 0$ (β).	0,25 đ
	Phương trình (β) có $\Delta = p^2 - 2pq - 3q^2 = (p + q)(p - 3q) > 0$ (vì $p > 3q > 0$),	0,5 đ
	Nên (β) có hai nghiệm phân biệt gọi là x_1, x_2 ;	0,5 đ
	Áp dụng định lý Viète ta có $x_1x_2 = q^2 > 0$;	0,5 đ
	Vậy $x_1, -q, x_2$ lập thành cấp số nhân với công bội bằng $\frac{-q}{x_1}$.	0,5 đ
	Mà $x_1, -q, x_2$ là ba số phân biệt (vì $\Delta > 0$ nên $x_1 \neq x_2$; nếu $x_1 = -q$ thì $x_2 = -q$, vô lý, vậy $x_1 \neq -q$; tương tự $x_2 \neq -q$).	0,25 đ
	Do đó (α) có ba nghiệm là $x_1, -q, x_2$ lập thành cấp số nhân; Đây là điều phải chứng minh.	0,25 đ
	Cách 2 :	$\Sigma = 4$ đ
	Ta có $y = x^3 + px^2 + pqx + q^3$, đồ thị là (C); Hoành độ giao điểm của (C) và Ox là nghiệm của phương trình $x^3 + px^2 + pqx + q^3 = 0$ (vì Ox có phương trình là $y = 0$);	0,5 đ
	$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{q}\right)^3 + \frac{p}{q}\left(\frac{x}{q}\right)^2 + \frac{p}{q} \cdot \frac{x}{q} + 1 = 0$ (do $q > 0$);	0,5 đ
	Đặt $r = \frac{p}{q} > 3, t = \frac{x}{q}$, thu được $t^3 + rt^2 + rt + 1 = 0$ (ξ);	0,25 đ
	$\Leftrightarrow [t + 1][t^2 + (r - 1)t + 1] = 0$;	0,25 đ
	$\Leftrightarrow t = -1$ hoặc $t^2 + (r - 1)t + 1 = 0$ (η);	
	Phương trình (η) có $\Delta = r^2 - 2r - 3 = (r + 1)(r - 3) > 0$;	0,5 đ
	Nên (η) có hai nghiệm phân biệt gọi là t_1, t_2 ;	0,5 đ
	Áp dụng định lý Viète ta có $t_1t_2 = 1$;	1 đ
	Vậy $t_1, -1, t_2$ lập thành cấp số nhân với công bội bằng $-t_2$.	
	Mà $t_1, -1, t_2$ là ba số phân biệt (vì $\Delta > 0$ nên $t_1 \neq t_2$; nếu $t_1 = -1$ thì $t_2 = -1$, vô lý, vậy $t_1 \neq -1$; tương tự $t_2 \neq -1$).	0,25 đ
	Vậy (ξ) có ba nghiệm là $t_1, -1, t_2$ lập thành cấp số nhân; Từ đó ta có điều phải chứng minh.	0,25 đ
	Cách 3 :	$\Sigma = 4$ đ

1. (tiếp)	Ta có $y = x^3 + px^2 + pqx + q^3$, đồ thị là (C); Tập xác định $D = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 + 2px + pq$;	0,25 đ
	$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2px + pq = 0$ (λ); $\Delta' = p(p - 3q) > 0$ (do $p > 3q > 0$) vậy (λ) có hai nghiệm gọi là x_1, x_2 ;	0,25 đ
	Từ đó hàm số đã cho đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 .	0,25 đ
	Vì $y = \frac{1}{9}(3x + p).y' + r(x)$, với $r(x) = \frac{3q - p}{9}[2px + q(p + 3q)]$; Nên $y(x_1) = r(x_1), y(x_2) = r(x_2)$;	0,5 đ
	Khi đó $y(x_1).y(x_2) < 0 \Leftrightarrow r(x_1)r(x_2) < 0$; $\Leftrightarrow 4p^2x_1x_2 + 2pq(p + 3q)(x_1 + x_2) + q^2(p + 3q)^2 < 0$; $\Leftrightarrow \frac{4}{3}p^3q - \frac{4}{3}p^2q(p + 3q) + q^2(p + 3q)^2 < 0$	0,5 đ
	(áp dụng định lý Viète cho (λ)); $\Leftrightarrow 4p^3 - 4p^2(p + 3q) + 3q(p + 3q)^2 < 0$; $\Leftrightarrow q[(p + 3q)^2 - 4p^2] < 0$; $\Leftrightarrow 3(3q - p)(p + q) < 0$;	0,5 đ
	Đây là mệnh đề đúng, vậy $y(x_1).y(x_2) < 0$; $\Leftrightarrow$ Hai điểm cực trị của (C) nằm về hai phía của Ox; Do đó (C) cắt Ox tại ba điểm phân biệt, gọi hoành độ của các giao điểm là x_A, x_B, x_C .	0,25 đ
	Mà x_A, x_B, x_C lập thành cấp số nhân với cộng bội bằng $\frac{x_B}{x_A}$ $\Leftrightarrow x_Ax_C = (x_B)^2$ (vì $(0; 0) \notin (C)$ nên x_A, x_B, x_C đều khác 0); $\Leftrightarrow (x_B)^3 = x_Ax_Bx_C$ (μ)	0,5 đ
	Mặt khác x_A, x_B, x_C là ba nghiệm đa thức $(x^3 + px^2 + pqx + q^3)$; $\Leftrightarrow x^3 + px^2 + pqx + q^3 = (x - x_A)(x - x_B)(x - x_C), \forall x \in \mathbb{R}$; $\Leftrightarrow x^3 - (x_A + x_B + x_C)x^2 + (x_Ax_B + x_Bx_C + x_Cx_A)x - x_Ax_Bx_C = x^3 + px^2 + pqx + q^3, \forall x \in \mathbb{R}$; $\Rightarrow x_Ax_Bx_C = -q^3$.	0,25 đ
	Nên (μ) $\Leftrightarrow x_B = -q$, đây là điều đúng vì $(-q; 0) \in (C)$; Vậy ba số $x_A, x_B = -q, x_C$ lập thành cấp số nhân; Do đó có được điều phải chứng minh.	0,25 đ
2.	<i>Giải phương trình :</i>	$\Sigma = 4$ đ
	Ta có $\frac{\sin x - \cos x}{\sin 3x - \cos 3x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \cos x}$ (i); Điều kiện $\sin 3x - \cos 3x \neq 0 \neq \sin x + \cos x$ (ii).	0,25 đ
	Khi đó (i) $\Leftrightarrow [\sin x - \cos x][(\sin 3x - \cos 3x)(1 + \sin x \cos x) - (\sin x + \cos x)] = 0$;	0,25 đ
	$\Leftrightarrow \sin x - \cos x = 0$ (iii) hoặc $(\sin 3x - \cos 3x)(1 + \sin x \cos x) - (\sin x + \cos x) = 0$ (iv).	0,25 đ
	- Giải phương trình (iii) : (iii) $\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$;	0,25 đ

2. (tiếp)	$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$	0,25 đ
	Thử lại thỏa (ii).	0,25 đ
	- Giải phương trình (iv) : (iv) $\Leftrightarrow [3(\sin x + \cos x) - 4(\sin^3 x + \cos^3 x)][2 + \sin 2x] - 2(\sin x + \cos x) = 0$ (v) (vì $\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x = 2\sin x(1 - \sin^2 x) + (1 - 2\sin^2 x)\sin x = 3\sin x - 4\sin^3 x$; tương tự $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$);	0,5 đ
	(v) $\Leftrightarrow [\sin x + \cos x][(2\sin 2x - 1)(2 + \sin 2x) - 2] = 0;$	0,25 đ
	$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x + 3\sin 2x - 4 = 0$, do (ii);	0,25 đ
	$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{-3 + \sqrt{41}}{4}$ hoặc $\sin 2x = \frac{-3 - \sqrt{41}}{4}$ (vô nghiệm);	0,5 đ
	$\Leftrightarrow x = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin\left(\frac{\sqrt{41}-3}{4}\right) + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z};$	0,5 đ
	Thử lại thỏa (ii).	0,25 đ
	Do đó phương trình đã cho chỉ có các nghiệm : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin\left(\frac{\sqrt{41}-3}{4}\right) + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$	0,25 đ
	Cách 2 :	$\Sigma = 4$ đ
	Ta có $\frac{\sin x - \cos x}{\sin 3x - \cos 3x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x + \cos x}$ (i);	0,25 đ
	Điều kiện $\sin 3x - \cos 3x \neq 0 \neq \sin x + \cos x$ (ii).	
	Khi đó (i) $\Leftrightarrow (\sin 3x - \cos 3x)(\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) = -\cos 2x;$	0,5 đ
	$\Leftrightarrow (\sin 3x \cdot \sin x + \cos 3x \cdot \cos x - \sin 3x \cdot \cos x - \cos 3x \cdot \sin x)(2 + \sin 2x) + 2\cos 2x = 0$	0,5 đ
	$\Leftrightarrow (\cos 2x - \sin 4x)(2 + \sin 2x) + 2\cos 2x = 0;$	
	$\Leftrightarrow \cos 2x[(1 - 2\sin 2x)(2 + \sin 2x) + 2] = 0;$	0,25 đ
	$\Leftrightarrow \cos 2x(2\sin^2 2x + 3\sin 2x - 4) = 0;$	
	$\Leftrightarrow \cos 2x = 0$ (iii') hoặc $2\sin^2 2x + 3\sin 2x - 4 = 0$ (iv').	0,25 đ
	- Giải phương trình (iii') :	
	Ta có (iii') $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z};$	0,25 đ
	Thử lại điều kiện (ii) được $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$	0,5 đ
	- Giải phương trình (iv') ... kết luận (như cách 1).	1,5 đ
3.	<i>Giải hệ phương trình :</i>	$\Sigma = 4$ đ
	Ta có $\begin{cases} x^2 - 2xy + x + y = 0 \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad (I);$	0,5 đ
	Nhận thấy $x = y = 0$ là một nghiệm của (I).	
	Xét trường hợp còn lại $x \neq 0$; vì $x = 0$ thỏa (I) $\Leftrightarrow y = 0$ thỏa (I) :	0,25 đ
	Khi đó (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{y}{x} - 2y + 1 = 0 \quad (1) \\ x^2 + \frac{y^2}{x^2} - 4y + 3 = 0 \quad (2) \end{cases};$	0,75 đ

3. (tiếp)	Mà (2) $\Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{x}\right)^2 - 6y + 3 = 0$ (3);	0,25 đ
	Từ (1) và (3) suy ra $\left(x + \frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{y}{x}\right) = 0$;	0,5 đ
	$\Leftrightarrow x + \frac{y}{x} = 0$ hoặc $x + \frac{y}{x} = 3$.	0,25 đ
	- Với $x + \frac{y}{x} = 0$, kết hợp với (1) thu được $y = \frac{1}{2}$; Khi đó $x + \frac{1}{2x} = 0$, phương trình này vô nghiệm.	0,5 đ
	- Với $x + \frac{y}{x} = 3$, kết hợp với (1) thu được $y = 2$; Khi đó $x + \frac{2}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$.	0,5 đ
	Thử lại (1 ; 2), (2 ; 2) đều thỏa (I).	0,25 đ
	Do đó hệ đã cho chỉ có ba nghiệm (0 ; 0), (1 ; 2), (2 ; 2).	0,25 đ
	Cách 2 :	$\Sigma = 4$ đ
	Ta có $\begin{cases} x^2 - 2xy + x + y = 0 \\ x^4 - 4x^2y + 3x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ Vì $x = \frac{1}{2}$ không thỏa hệ, nên hệ đã cho tương đương với :	0,25 đ
	$\begin{cases} y = \frac{x^2 + x}{2x - 1} \\ x^4 - \frac{4x^2(x^2 + x)}{2x - 1} + 3x^2 + \left(\frac{x^2 + x}{2x - 1}\right)^2 = 0 (*) \end{cases}$;	1 đ
	Mà (*) $\Leftrightarrow x^4(2x - 1)^2 - 4x^3(x + 1)(2x - 1) + 3x^2(2x - 1)^2 + x^2(x + 1)^2 = 0$;	0,25 đ
	$\Leftrightarrow x^2(2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2) = 0$;	0,25 đ
	$\Leftrightarrow x^2(x - 1)(2x^3 - 4x^2 + x - 2) = 0$;	0,5 đ
	$\Leftrightarrow x^2(x - 1)(x - 2)(2x^2 + 1) = 0$;	0,5 đ
	$\Leftrightarrow x = 0 (\Rightarrow y = 0)$ hoặc $x = 1 (\Rightarrow y = 2)$ hoặc $x = 2 (\Rightarrow y = 2)$;	1 đ
	Từ đó hệ đã cho chỉ có ba nghiệm (0 ; 0), (1 ; 2), (2 ; 2).	0,25 đ
4.	Tìm ước chung lớn nhất :	$\Sigma = 3,5$ đ
	Ta có $m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 + n^2) - mn(m + n)$; Gọi d là ước chung lớn nhất của $(m^2 + n^2)$ và $(m^3 + n^3)$, Suy ra $mn(m + n) : d @$.	0,5 đ
	Mà m và $(m + n)$ là hai số nguyên tố cùng nhau (vì gọi d_1 là ước chung lớn nhất của m và $(m + n)$ thì $n : d_1$, suy ra d_1 là ước chung của m và n nên $d_1 = 1$, do m và n là hai số nguyên tố cùng nhau); Tương tự n và $(m + n)$ là hai số nguyên tố cùng nhau;	0,5 đ
	Vậy $@ \Leftrightarrow m : d$ hoặc $n : d$ hoặc $(m + n) : d$.	0,25 đ

4. (tiếp)	- Trường hợp $m : d$ Khi đó $n^2 : d$ (vì $m^2 + n^2 : d$)	0,25 đ
	Vậy $d = 1$ (nếu $d > 1$ thì tồn tại số nguyên tố p là ước số của d ; lúc đó $n^2 : p$, nên $n : p$; kết hợp $m : p$, từ đó p là ước chung của m và n ; kéo theo $p = 1$, mâu thuẫn với p là số nguyên tố).	0,25 đ
	- Trường hợp $n : d$ Tương tự $d = 1$.	0,5 đ
	- Trường hợp $m + n : d$ Khi đó $2mn : d$ (vì $(m + n)^2 - 2mn = (m^2 + n^2) : d$);	0,25 đ
	Mặt khác m là số chẵn, m và n là hai số nguyên tố cùng nhau nên n là số lẻ, suy ra $m + n$ là số lẻ, kéo theo d là số lẻ;	0,25 đ
	Vậy $mn : d \Leftrightarrow m : d$ hoặc $n : d$ (vì m và n là hai số nguyên tố cùng nhau);	0,25 đ
	Tương tự $d = 1$.	0,25 đ
	Do đó ước chung lớn nhất của $(m^2 + n^2)$ và $(m^3 + n^3)$ bằng 1.	0,25 đ
5. 1)	Chứng minh $SD < \sqrt{3}a$:	$\Sigma = 2$ đ
		0,25 đ (chưa vẽ O, I)
	Gọi O là tâm của hình thoi ABCD (suy ra O là trung điểm của BD, AC); Ta có $\triangle SAC = \triangle BAC$ (vì $SA = BA = SC = BC = a$), Nên $SO = BO$, Vậy $SO = BO = OD$; Suy ra $\triangle SBD$ là tam giác vuông tại S.	0,75 đ
	Từ đó $SD^2 = BD^2 - SB^2 = BD^2 - a^2$;	0,25 đ
	Mặt khác trong $\triangle ABD$ có $BD < AB + AD = 2a$; Do đó $SD^2 < 3a^2$; $\Leftrightarrow SD < \sqrt{3}a$.	0,75 đ
	Cách 2 :	$\Sigma = 2$ đ
	Hình vẽ như cách 1.	0,25 đ

5.1 (tiếp)	Gọi O là tâm của hình thoi ABCD (suy ra O là trung điểm của BD, AC); Áp dụng công thức đường trung tuyến trong ΔSBD ta có $4SO^2 = 2SB^2 + 2SD^2 - BD^2$;	0,75 đ
	Tương tự $4SO^2 = 2SA^2 + 2SC^2 - AC^2$; Vậy $2SD^2 = 2a^2 + BD^2 - AC^2 < 2a^2 + BD^2$ (do $SA = SB = SC = a$).	0,25 đ
	Mặt khác trong ΔABD có $BD < AB + AD = 2a$; Do đó $SD^2 < 3a^2$; $\Leftrightarrow SD < \sqrt{3}a$.	0,75 đ
5. 2)	Xác định SD (giải tiếp theo cách 1 của phần 5.1) :	$\Sigma = 2,5$ đ
	Ta có $AC \perp BD$ (vì ABCD là hình thoi), Và $AC \perp SO$ (vì ΔSAC cân tại S và O là trung điểm AC); Nên $AC \perp (SBD)$.	0,25 đ
	Vẽ đường cao SI của ΔSBD (nghĩa là $SI \perp BD$); Suy ra $SI \perp AC$, do $AC \perp (SBD)$; Từ đó $SI \perp (ABCD)$.	0,25 đ
	Vậy khối chóp S.ABCD có thể tích $V = \frac{1}{3}SI.T$ (với T là diện tích hình thoi ABCD);	0,25 đ
	Mà $\frac{1}{SI^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SD^2}$ (vì SI là đường cao của tam giác vuông SBD); Đặt $SD = x$, với $0 < x < \sqrt{3}a$; Suy ra $SI = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.	0,25 đ
	Mặt khác $T = \frac{1}{2}AC.BD$;	0,25 đ
	Mà $BD = \sqrt{SB^2 + SD^2} = \sqrt{x^2 + a^2}$ (do ΔSBD vuông tại S); Và $AC^2 = 4AO^2 = 4(AB^2 - BO^2) = 4a^2 - 4BO^2 = 4a^2 - BD^2$ $= 3a^2 - x^2$ (do ΔABO vuông tại O); Nên $AC = \sqrt{3a^2 - x^2}$; Từ đó $V = \frac{a}{6}.x\sqrt{3a^2 - x^2}$.	0,25 đ
	Xét hàm số $f(x) = x\sqrt{3a^2 - x^2}$ trên $(0 ; \sqrt{3}a)$; Hàm số xác định trên $(0 ; \sqrt{3}a)$; $f'(x) = \sqrt{3a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{3a^2 - x^2}} = \frac{3a^2 - 2x^2}{\sqrt{3a^2 - x^2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ (do $0 < x < \sqrt{3}a$);	0,25 đ (d3)

5. 2) (tiếp)	Bảng biến thiên :			0,5 đ (d2)
	x	0	$\frac{a\sqrt{6}}{2}$	
	f'(x)	+	0	
	f(x)		$\frac{a^3}{4}$	
		0	0	
	SD = x = $\frac{a\sqrt{6}}{2}$, kiểm tra dựng được hình chóp thỏa bài toán; Do đó V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi SD = $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.			0,25 đ
	Chú ý có thể thay các bước (d3) và (d2) ở cách giải trên bởi :			$\Sigma = 0,75$ đ
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy $V \leq \frac{a}{12} [x^2 + (3a^2 - x^2)] = \frac{a^3}{4}$;			0,5 đ
	Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.			0,25 đ
	Cách 2 (giải tiếp theo cách 1 của phần 5.1) :			$\Sigma = 2,5$ đ
	Đặt AC = u, với $0 < u < 2a$ (vì AC < AB + BC); khi đó ΔABC có diện tích $\tau = \frac{u}{4} \sqrt{4a^2 - u^2}$ (áp dụng công thức Heron).			0,25 đ
	Gọi (I ; R) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC , Vì SA = SB = SC nên SI là trục của ΔABC , vậy $SI \perp (ABCD)$; Trong tam giác vuông SBI có $SI^2 = SB^2 - BI^2 = a^2 - R^2$;			0,5 đ
	Mặt khác $\tau = \frac{a^2 u}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - u^2}}$; vậy $SI = \frac{a\sqrt{3a^2 - u^2}}{\sqrt{4a^2 - u^2}}$.			0,25 đ
	Vậy khối chóp S.ABCD có thể tích $V = \frac{2}{3} SI \cdot \tau = \frac{a}{6} \cdot u \sqrt{3a^2 - u^2}$			0,5 đ
	$\leq \frac{a}{12} [u^2 + (3a^2 - u^2)] = \frac{a^3}{4}$ (áp dụng bất đẳng thức Cauchy);			0,5 đ
	Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $u^2 = 3a^2 - u^2 \Leftrightarrow AC^2 = \frac{3a^2}{2}$; $\Leftrightarrow BD = \frac{a\sqrt{10}}{2}$ (do ΔABO vuông tại O) $\Leftrightarrow SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.			0,25 đ
	Khi đó, kiểm tra dựng được hình chóp thỏa điều kiện bài toán; Do đó V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi SD = $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.			0,25 đ

Lưu ý :

Nếu thí sinh giải cách khác đúng thì được điểm tối đa theo quy định và thống nhất cách cho điểm thành phần trên cơ sở của hướng dẫn và biểu điểm này;

Sở GDĐT yêu cầu Tổ Giám khảo môn Toán căn cứ hướng dẫn và biểu điểm này, hợp thống nhất trước khi chấm theo quy định./