

Người làm: Mai Hồng Nhung

Zalo: Mai Nhung

- số đt zalo: 0399008878

Email: nhungmaiqn86@gmail.com

CD10: CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GTLN, GTNN

Dạng 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, huyện Nam Trà My, huyện Thăng Bình 2018 - 2019)

Cho $(a - b)^2 + 6ab = 36$. Giá trị lớn nhất của $x = a.b$ là:

- A. 6 B. -6 C. 7 D. 5

Lời giải

Ta có $(a - b)^2 + 6ab = 36$

Suy ra: $6ab = 36 - (a - b)^2 \leq 36$

$ab \leq \frac{36}{6}$

Suy ra

$\Rightarrow ab \leq 6$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = \pm\sqrt{6}$

Vậy x đạt giá trị lớn nhất bằng 6 khi $a = b = \pm\sqrt{6}$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, Nam Trà My, huyện Thăng Bình 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của A , biết: $A = |7x - 5y| + |2z - 3x| + |xy + yz + zx - 2000|$

Lời giải

Ta có $|7x - 5y| \geq 0; |2z - 3x| \geq 0$ và $|xy + yz + zx - 2000| \geq 0 \Rightarrow A \geq 0$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của A là 0. Dấu "=" xảy ra khi
$$\begin{cases} 7x = 5y \\ 2z = 3x \\ xy + yz + zx = 2000 \end{cases}$$

Dùng phương pháp thế, từ đó tìm được:
$$\begin{cases} x = 20, y = 28, z = 30 \\ x = -20, y = -28, z = -30 \end{cases}$$

Vậy $\min A = 0$. Dấu "=" xảy ra khi
$$\begin{cases} x = 20, y = 28, z = 30 \\ x = -20, y = -28, z = -30 \end{cases}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Hiệp Đức 2018 - 2019)

$$C = \frac{|x - 2017| + 2018}{|x - 2017| + 2019}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Lời giải

$$C = \frac{|x - 2017| + 2018}{|x - 2017| + 2019} = \frac{(|x - 2017| + 2019) - 1}{|x - 2017| + 2019} = 1 - \frac{1}{|x - 2017| + 2019}$$

Biểu thức C đạt giá trị nhỏ nhất khi $|x - 2017| + 2019$ có giá trị nhỏ nhất

Mà $|x - 2017| \geq 0$ nên $|x - 2017| + 2019 \geq 2019$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2017 \Rightarrow C = \frac{2018}{2019}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{2018}{2019}$ khi $x = 2017$

Câu 3. (HSG 7 trường Lý Tự Trọng, trường Phong Đạt 2018 - 2019)

$$A = |2x - 2| + |2x - 2003|$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức với x là số nguyên

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= |2x - 2| + |2x - 2003| = |2x - 2| + |2003 - 2x| \\ &\geq |2x - 2 + 2003 - 2x| = 2001 \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $(2x - 2)(2003 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{2003}{2}$

Câu 4. (HSG 7 huyện Phú Ninh 2018 - 2019)

$$A = |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x|$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Vì } |2015 - x| \geq 0 \text{ nên } A &= |2014 - x| + |2015 - x| + |2016 - x| \geq |2014 - x| + |2016 - x| \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2015$ (1)

$$\text{Ta có: } |2014 - x| + |2016 - x| = |x - 2014| + |2016 - x| \geq |x - 2014 + 2016 - x| = 2$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(x - 2014)(2016 - x) \geq 0$, suy ra $2014 \leq x \leq 2016$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2015$

Vậy A nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 2015$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2018 - 2019)

$$M = \frac{5 - x}{x - 2}$$

Cho biểu thức M . Tìm x nguyên để M có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$M = \frac{5 - x}{x - 2} = \frac{3 - (x - 2)}{x - 2} = \frac{3}{x - 2} - 1 \quad (x \neq 2)$$

Ta có:

$$M \text{ nhỏ nhất} \Rightarrow \frac{3}{x - 2} \text{ nhỏ nhất} \Rightarrow x - 2 \text{ lớn nhất và } x - 2 < 0 \Rightarrow x \text{ lớn nhất và } x < 2$$

$$\Rightarrow x = 1 \quad (x \in \mathbb{Z})$$

$$M = \frac{3}{1-2} - 1 = -4 \Leftrightarrow x = 1$$

Khi đó GTNN của M là

Câu 6. (HSG 7 huyện Lộc Hà 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |2x + 2| + |2x - 2013|$ với x là số nguyên.

Lời giải

$$A = |2x + 2| + |2x - 2013| = |2x + 2| + |2013 - 2x| \geq |2x + 2 + 2013 - 2x| = 2015$$

Ta có:

$$(2x + 2)(2013 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{2013}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi

Vậy $Max A = 2015$ khi $x = -1$

Câu 7. (HSG 7 huyện Việt Yên 2018 - 2019)

Cho 4 số không âm a, b, c, d thỏa mãn $a + b + c + d = 1$. Gọi S là tổng các giá trị tuyệt đối của hiệu từng cặp số có được từ 4 số này. S có thể đạt được giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Giả sử $a \geq b \geq c \geq d$ khi đó:

$$S = |a - b| + |a - c| + |a - d| + |b - c| + |b - d| + |c - d|$$

$$S = (a - b) + (a - c) + (a - d) + (b - c) + (b - d) + (c - d)$$

$$S = (3a + b) - (c + 3d)$$

$$\text{Do } c + 3d \geq 0 \Rightarrow S \leq 3a + b; S = 3a + b \text{ khi } c = d = 0, \text{ lúc đó } a + b = 1$$

$$\text{Do } a \leq 1 \text{ ta có: } S = 2a + (a + b) = 2a + 1 \leq 2 \cdot 1 + 1 \text{ hay } S \leq 3$$

Vậy S có thể đạt được giá trị lớn nhất bằng 3.

Câu 8. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018 - 2019)

$$P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 90|$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

Lời giải

$$\text{Ta có: } P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 90|$$

$$P = (2x - 5y)^2 - (6x - 15y)^2 - |xy - 90|$$

$$P = (2x - 5y)^2 - 9 \cdot (2x - 5y)^2 - |xy - 90|$$

$$P = -[8 \cdot (2x - 5y)^2 + |xy - 90|]$$

$$\text{Ta thấy } (2x - 5y)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x, y \text{ nên } 8 \cdot (2x - 5y)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x, y$$

$$|xy - 90| \geq 0 \text{ với mọi } x, y$$

$$\text{Khi đó } 8 \cdot (2x - 5y)^2 + |xy - 90| \geq 0 \text{ với mọi } x, y$$

$$\text{Suy ra } -[8 \cdot (2x - 5y)^2 + |xy - 90|] \leq 0 \text{ với mọi } x, y$$

$$\text{Hay } P \leq 0 \text{ với mọi } x, y$$

$$\begin{cases} (2x - 5y)^2 = 0 \\ |xy - 90| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{2} \\ xy = 90 \end{cases}$$

Dấu "=" xảy ra khi

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = k \quad \text{Đặt} \quad \text{ta được} \quad x = 5k, y = 2k$$

$$\text{Mà } xy = 90 \text{ nên} \quad 5k \cdot 2k = 90 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = -3 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } k = 3 \Rightarrow x = 15, y = 6$$

$$\text{Nếu } k = -3 \Rightarrow x = -15, y = -6$$

$$\text{Vậy} \quad \text{Max} P = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15; y = 6 \\ x = -15; y = -6 \end{cases}$$

Câu 9. (HSG 7 trường Bình Hân 2018 - 2019)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = |x - 2001| + |x - 1|$

Lời giải

$$A = |x - 2001| + |x - 1| = |x - 2001| + |1 - x| \geq |x - 2001 + 1 - x| = 2000$$

Vậy biểu thức đạt GTNN là $2000 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2001$

Câu 10. (HSG 7 trường Thanh Cao 2018 - 2019)

Tìm GTNN của biểu thức : $A = |x - 2006| + |2007 - x|$

Lời giải

$$\text{Có } A = |x - 2006| + |2007 - x| \geq |x - 2006 + 2007 - x|$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow (x - 2006)(2007 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 2006 \leq x \leq 2007$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = 1 \Leftrightarrow 2006 \leq x \leq 2007$$

Câu 11. (HSG 7 trường Thanh Mai 2018 - 2019)

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = |x - 2008| + |x - 2009| + |y - 2010| + |x - 2011| + 2011$

Lời giải

Áp dụng tính chất $|a| = |-a|$ và $|a| + |b| \geq |a + b|$, dấu "=" xảy ra khi $ab \geq 0$ và $|a| \geq 0 \Rightarrow a = 0$

$$\text{Ta có: } |x - 2008| + |x - 2011| = |x - 2008| + |2011 - x| \geq |x - 2008 + 2011 - x| = 3$$

Dấu "=" xảy ra khi $2008 \leq x \leq 2011$ và $|x - 2009| \geq 0$, dấu "=" xảy ra khi $x = 2009$
 $|y - 2010| \geq 0$, dấu "=" xảy ra khi $y = 2010$

$$\Rightarrow A \geq 3 + 2010 = 2014. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } x = 2009, y = 2010$$

$$\text{Vậy} \quad A_{\min} = 2014 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2009 \\ y = 2010 \end{cases}$$

Câu 12. (HSG 7 trường Thanh Thùy 2018 - 2019)

Tìm số nguyên x để M đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó: $M = \frac{x-14}{4-x}$

Lời giải

$$M = \frac{x-14}{4-x} = \frac{-10-(4-x)}{4-x} = \frac{-10}{4-x} - 1$$

M nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{-10}{4-x}$ nhỏ nhất

Xét $x < 4$ thì $\frac{-10}{4-x} < 0$; $x > 4$ thì $\frac{-10}{4-x} > 0$

Ta chỉ xét $x < 4$ thì $\frac{-10}{4-x}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{10}{4-x}$ lớn nhất
 $\Rightarrow 4-x=1$ (vì mẫu nguyên dương nhỏ nhất)

Vậy $x=3$ khi đó $\text{Min} M = -11$

Dạng 2.1. Bất đẳng thức về chứng minh tổng phân số tự nhiên

Dạng 2.2. Bất đẳng thức về chứng minh tổng lũy thừa

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Vĩnh Yên 2018 - 2019)

Chứng tỏ: $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{2019}} < 0,75$

Lời giải

Đặt $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{2019}}$

Suy ra $3A = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{2019}{3^{2018}}$

$$3A - A = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{2019}{3^{2018}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{2019}}\right)$$

$$2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} - \frac{2019}{3^{2019}}$$

$$2A < 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}} \quad (1)$$

Đặt $B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}}$

Suy ra $3B = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2017}}$

$$3B - B = \left(3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2017}}\right) - \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{2018}}\right)$$

$$2B = 3 - \frac{1}{3^{2018}}$$

$$B = \frac{3}{2} - \frac{1}{3^{2018}} \cdot 2$$

$$B < \frac{3}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2A < \frac{3}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4} = 0,75$

Vậy $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{2019}{3^{2019}} < 0,75$

Câu 2. (HSG 7 trường Thanh Thùy 2018 - 2019)

$$B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}} < \frac{1}{2}$$

Chứng minh rằng:

Lời giải

Ta có $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}} + \frac{1}{3^{2013}}$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{2012}}$$

$$3B - B = 1 - \frac{1}{3^{2013}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2013}} < \frac{1}{2} \Rightarrow 2B = 1 - \frac{1}{3^{2013}}$$

Vậy $B < \frac{1}{2}$

Dạng 2.3. Bất đẳng thức về chứng minh tích của một dãy

Dạng 3. Bất đẳng thức dạng chữ

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Kinh Môn 2018 - 2019)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

Lời giải

$$(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Ta có:

$$b^2 + c^2 \geq 2bc; \quad c^2 + a^2 \geq 2ac$$

Tương tự ta cũng có:

$$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + ac + bc)$$

$$\Rightarrow ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2 \quad (1)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có:

$$\left. \begin{aligned} a+b > c &\Rightarrow ac+bc > c^2 \\ a+c > b &\Rightarrow ab+bc > b^2 \\ b+c > a &\Rightarrow ab+ac > a^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2+b^2+c^2 < 2(ab+ac+bc) \quad (2)$$

(1) (2) $ab+ac+bc \leq a^2+b^2+c^2 < 2(ab+ac+bc)$
 Từ và ta có:

Câu 2. (HSG 7 trường Lý Tự Trọng và huyện Lộc Hà 2018 - 2019)

Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$, chứng minh rằng $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

Vì $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ nên

$$(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab+1 \geq a+b \Leftrightarrow \frac{1}{ab+1} \leq \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b} \quad (1)$$

Tương tự $\frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c} \quad (2); \quad \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c} \quad (3)$.

Do đó $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (4)$

Mà $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2 \quad (5)$

Từ (4) và (5) suy ra $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$ (đpcm).

Câu 3. (HSG 7 huyện Tiên Phước 2018 - 2019)

Chứng minh rằng: Nếu $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ thì: $\frac{a_1+a_2+\dots+a_9}{a_3+a_6+a_9} < 3$

Lời giải

Ta có: $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_9$ nên suy ra:

$$a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3 \quad (1)$$

$$a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6 \quad (2)$$

$$a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9 \quad (3)$$

Cộng vế với vế của (1), (2), (3) ta được:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_9 < 3(a_3 + a_6 + a_9)$$

Vì $a_1 + a_2 + \dots + a_9 > 0$ nên ta được: $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3$