

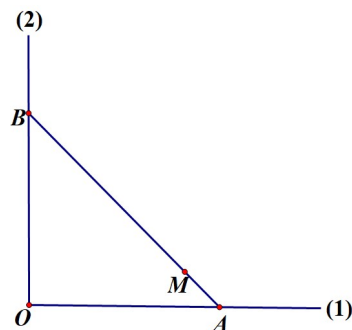
Câu 1. (7.0 điểm).

a) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + (m^2-2m)x + m^3 - 2m$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên $(0;1)$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 2x^2 + 3x = y^3 - y^2 + 2y - 2 \\ \sqrt{x^2 - 2y + 7} + 2\sqrt{4y + 1} = 4(x+1) \end{cases}, (x \in \mathbb{R}).$

Câu 2. (4.0 điểm).

a) Ở một địa phương, có 2 con đường (1) và (2) vuông góc với nhau tại O như hình vẽ. Một địa danh lịch sử có vị trí đặt tại M , vị trí M cách đường (1) một khoảng 1 km và cách đường (2) một khoảng 8 km. Người ta muốn làm một đoạn đường thẳng AB (A thay đổi trên đường (1), B thay đổi trên đường (2)) đi qua vị trí M , biết rằng giá tiền để làm 1 km đường là 1,2 tỷ đồng (giá tiền không phụ thuộc vào vị trí của A và B). Chọn vị trí của A và B để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành con đường là bao nhiêu? (Cho biết: $\sqrt{3} \simeq 1,732$, $\sqrt{5} \simeq 2,236$).



b) Một đội thanh niên tình nguyện trong chiến dịch “**tiếp sức mùa thi**” kỳ thi Tốt nghiệp THPT năm 2022 phụ trách tại cổng trường của một điểm thi gồm 7 nam và 6 nữ học sinh lớp 10; 5 nam và 8 nữ học sinh lớp 11. Đoàn trường chọn ngẫu nhiên 4 học sinh vào tổ giữ vật dụng cá nhân không được phép mang vào phòng thi của thí sinh dự thi (vị trí giữ đồ ở ngoài khu vực thi). Tính xác suất để 4 học sinh được chọn có nam lẫn nữ và có không quá 1 học sinh lớp 10.

Câu 3. (1.5 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $(b+c)bc = \frac{b^2+c^2}{a}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $P = \frac{a^2}{(a+1)^2} + \frac{b^2}{(b+1)^2} + \frac{c^2}{(c+1)^2} + \frac{4abc}{(a+1)(b+1)(c+1)}.$

Câu 4. (6.0 điểm). Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại đỉnh B . Gọi M là điểm thay đổi trên tia đối của tia $C'C$. Đặt $CM = x$, biết $AC = 2a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{3}$.

a) Khi $x = \frac{3\sqrt{3}a}{2}$, mặt phẳng $(AB'M)$ chia khối lăng trụ thành hai khối đa diện. Tính thể tích khối đa diện chứa đỉnh B .

b) Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên MB, MA . Tìm x để sin góc giữa đường thẳng HK và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

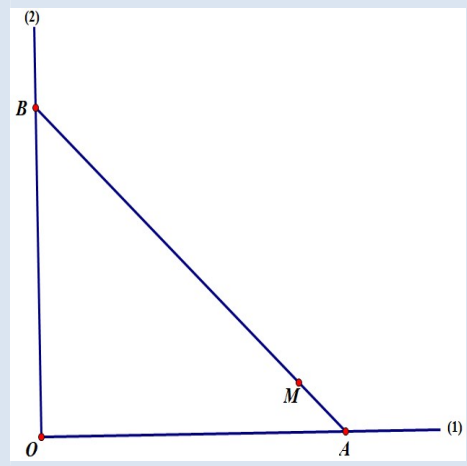
Câu 5. (1.5 điểm). Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a và M là điểm tùy ý bên trong hình vuông $ABCD$. Đường thẳng qua M , vuông góc với $(ABCD)$ cắt các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD), (SAD)$ lần lượt tại E, F, N, P . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

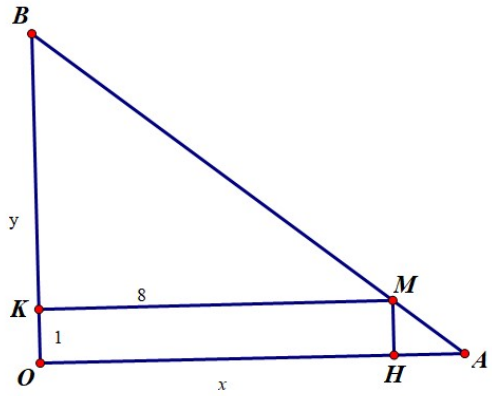
$$\frac{1}{ME^2} + \frac{1}{MF^2} + \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2}.$$

-----HẾT-----

Chú ý: Thí sinh không được phép sử dụng máy tính bỏ túi.

Câu	Đáp án	Điểm																			
1. (7,0đ)	a. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m - 1)x^2 + (m^2 - 2m)x + m^3 - 2m$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên $(0;1)$.																				
	Ta có: $y' = x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 2m$	0,5																			
	$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m - 1)x + m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m - 2 \end{cases}$	1,0																			
	BBT <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$m - 2$</td><td>m</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td colspan="5"></td></tr></table>	x	$-\infty$	$m - 2$	m	$+\infty$	y'		+	0	-	0	+	y							0,5
	x	$-\infty$	$m - 2$	m	$+\infty$																
	y'		+	0	-	0	+														
y																					
Do đó ycbt tm khi $(0;1) \subseteq (m - 2;m) \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$	1,0																				
Lại có $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1;2\}$.	0,5																				
	b. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 2x^2 + 3x = y^3 - y^2 + 2y - 2 \\ \sqrt{x^2 - 2y + 7} + 2\sqrt{4y + 1} = 4(x + 1) \end{cases}, (x \in \mathbb{R})$.																				
	$\text{ĐK: } \begin{cases} x^2 - 2y + 7 \geq 0 \\ 4y + 1 \geq 0 \end{cases}$ Ta có $x^3 + 2x^2 + 3x = y^3 - y^2 + 2y - 2$ $\Leftrightarrow (x + 1)^3 - (x + 1)^2 + 2(x + 1) = y^3 - y^2 + 2y (*)$ Ta xét hàm số: $f(t) = t^3 - t^2 + 2t, t \in \mathbb{R}$ $f'(t) = 3t^2 - 2t + 2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm $f(t)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ $(*) \Leftrightarrow f(x + 1) = f(y)$. Suy ra $x + 1 = y$	1,5																			
	Thay $y = x + 1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $\sqrt{x^2 - 2x + 5} + 2\sqrt{4x + 5} = 4(x + 1)$	1,0																			

	$\Leftrightarrow 4(x-1) - (\sqrt{x^2 - 2x + 5} - 2) - 2(\sqrt{4x + 5} - 3) = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)\left(4 - \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5} + 2} - \frac{8}{\sqrt{4x + 5} + 2}\right) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 4 - \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5} + 2} - \frac{8}{\sqrt{4x + 5} + 2} = 0 \end{cases}$	
	Ta c/m pt: $4 - \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5} + 2} - \frac{8}{\sqrt{4x + 5} + 3} = 0$ vô nghiệm Thật vậy $4 - \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5} + 2} - \frac{8}{\sqrt{4x + 5} + 3} = 0$ $\Leftrightarrow 1 - \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5} + 2} + 3 - \frac{8}{\sqrt{4x + 5} + 3} = 0$ Ta có: $\left \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5} + 2} \right = \left \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + 4} + 2} \right < 1 \Rightarrow 1 - \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5} + 2} > 0$ $3 - \frac{8}{\sqrt{4x + 5} + 2} = \frac{1 + 3\sqrt{4x + 5}}{\sqrt{4x + 5} + 3} > 0$ Do đó PT VN	0,5
	Vậy hệ có nghiệm duy nhất (1;2).	0,5
2. (4,0đ)	a) Ở một địa phương, có 2 con đường (1) và (2) vuông góc với nhau tại O như hình vẽ. Một địa danh lịch sử có vị trí đặt tại M, vị trí M cách đường (1) một khoảng 1 km và cách đường (2) một khoảng 8 km. Người ta muốn làm một đoạn đường thẳng AB (A thay đổi trên đường (1), B thay đổi trên đường (2)) đi qua vị trí M, biết rằng giá tiền để làm 1 km đường là 1,2 tỷ đồng (giá tiền không phụ thuộc vào vị trí của A và B). Chọn vị trí của A và B để hoàn thành con đường với chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành con đường là bao nhiêu? (Cho biết: $\sqrt{3} \simeq 1,732$, $\sqrt{5} \simeq 2,236$).	
	Đặt $OA = x$, $OB = y$ ($x > 0$, $y > 0$)	0,5

	 Ta c/m được: $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = 1$ Ta có: $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = 1 \Rightarrow \frac{1}{y} = 1 - \frac{8}{x} = \frac{x-8}{x} \Rightarrow y = \frac{x}{x-8}$	
	Có $AB^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{x}{x-8}\right)^2$ Xét hàm số $f(x) = x^2 + \left(\frac{x}{x-8}\right)^2, x > 0$ $f'(x) = 2x + 2 \cdot \frac{x}{x-8} \cdot \frac{-8}{(x-8)^2} = 2x \cdot \left(1 - \frac{8}{(x-8)^3}\right)$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (KTM)} \\ 1 - \frac{8}{(x-8)^3} = 0 \Leftrightarrow (x-8)^3 = 8 \Leftrightarrow x = 10 \end{cases}$ Lập BBT ta có: $f(x) \geq f(10) = 5\sqrt{5}$	1,0
	Với $x = 10 \Rightarrow y = 5$ Vậy quãng đường ngắn nhất là $AB = 5\sqrt{5} (km)$ Khi đó chi phí thấp nhất để hoàn thành con đường là : $5\sqrt{5} \cdot 1,2 \simeq 13,416$ tỷ đồng	0,5
	b. Một đội thanh niên tình nguyện trong chiến dịch “<i>tiếp sức mùa thi</i>” kỳ thi Tốt nghiệp THPT năm 2022 phụ trách tại cổng trường của một điểm thi gồm 7 nam và 6 nữ học sinh lớp 10 ; 5 nam và 8 nữ học sinh lớp 11. Đoàn trường chọn ngẫu nhiên 4 học sinh vào tổ giữ vật dụng cá nhân không được phép mang vào phòng thi của thí sinh dự thi (ở ngoài khu vực thi). Tính xác suất để 4 học sinh được chọn có nam lẫn nữ và có không quá 1 học sinh lớp 10 .	
	Có tất cả 26 thành viên của đội nên $n(\Omega) = C_{26}^4 = 14950$	0,5
	Gọi A là biến cố chọn được 4 học sinh có nam lẫn nữ và có không quá 1 học sinh lớp 10.	
	TH1: Có đúng 01 HS lớp 10 là nữ có C_6^1 cách chọn Khi đó ta chọn ta cần chọn 3 HS lớp 11 trong đó có ít nhất 1 nam số cách chọn là: $C_{13}^3 - C_8^3$. Số cách chọn trong TH này là: $(C_{13}^3 - C_8^3) C_6^1 = 1380$ TH2: Có đúng 01 HS lớp 10 là nam có C_7^1 cách chọn	1,0

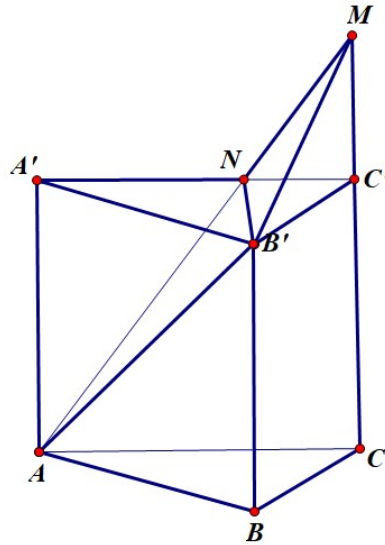
	Khi đó ta chọn ta cần chọn 3 HS lớp 11 trong đó có ít nhất 1 nữ, số cách chọn là: $C_{13}^3 - C_5^3$. Số cách chọn trong TH này là: $(C_{13}^3 - C_5^3)C_7^1 = 1932$ TH3: Không có HS lớp 10 số cách chọn là: $C_{13}^4 = 715$ Suy ra: $n(A) = 4027$	
	Vậy XS cần tính là: $p(A) = \frac{4027}{14950}$	0,5
3. (1,5đ)	Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $(b+c)bc = \frac{b^2 + c^2}{a}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a^2}{(a+1)^2} + \frac{b^2}{(b+1)^2} + \frac{c^2}{(c+1)^2} + \frac{4abc}{(a+1)(b+1)(c+1)}$.	
	Ta có: $(b+c)bc = \frac{b^2 + c^2}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$ Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$. ($x > 0, y > 0, z > 0$) Do đó ta chuyển bài toán về bài toán: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $y + z = x(y^2 + z^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(y+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{4}{(x+1)(y+1)(z+1)}$	0,5
	Theo giả thiết $y + z = x(y^2 + z^2) \geq \frac{1}{2}x(y+z)^2 \Rightarrow y + z \leq \frac{2}{x}$. Ta có $\frac{1}{(y+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^2} \geq \frac{2}{(y+1)(z+1)} \geq \frac{8}{(y+z+2)^2} \geq \frac{8}{\left(\frac{2}{x} + 2\right)^2} = \frac{2x^2}{(x+1)^2}$. $\frac{1}{(x+1)(y+1)(z+1)} \geq \frac{4}{(x+1)(y+z+2)^2} \geq \frac{4}{(x+1)\left(\frac{2}{x} + 2\right)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^3}$	0,5
	Suy ra $P \geq \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2x^2}{(x+1)^2} + \frac{4x^2}{(x+1)^3} = \frac{2x^3 + 6x^2 + x + 1}{(x+1)^3}$ Xét hàm $f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 + x + 1}{(x+1)^3}, x > 0$ tìm được giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $\frac{91}{108}$ khi $x = \frac{1}{5}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{91}{108}$ khi $x = \frac{1}{5}, y = z = 5$.	0,5
4. (6đ)	Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại đỉnh B. Gọi M là điểm thay đổi trên tia đối của tia $C'C$. Đặt $CM = x$, biết $AC = 2a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{3}$ a. Khi $x = \frac{3\sqrt{3}a}{2}$, mặt phẳng $(AB'M)$ chia khối lăng trụ thành hai khối đa diện. Tính thể tích khối	

đa diện chứa đỉnh B .

b. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên MB, MA . Tìm x để sin góc giữa đường thẳng HK và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

a.

3,0



0,5

Ta có: $AB = BC = a\sqrt{2}$ và $MC' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong $(ACC'A')$ gọi $N = AM \cap A'C'$,

Áp dụng định lí Ta-lét ta có: $\frac{C'N}{AC} = \frac{MC'}{MC} = \frac{1}{3} = \frac{C'N}{A'C'}$ suy ra $A'N = \frac{2}{3}A'C' = \frac{4a}{3}$

1,0

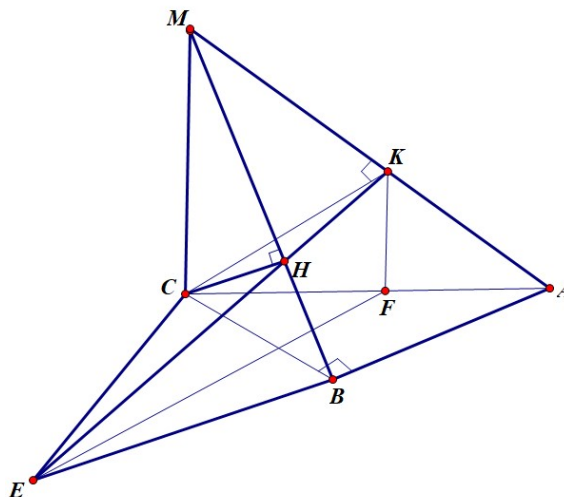
$$\Rightarrow \frac{S_{NA'B'}}{S_{A'B'C'}} = \frac{NA'}{A'C'} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{NA'B'} = \frac{2}{3} \cdot S_{A'B'C'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{2a^2}{3}$$

Nên $V_{ABC.A'B'C'} = a^3\sqrt{3}$ và $V_{A.NA'B'} = \frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$ suy ra $V_{ABC.N'B'C'} = \frac{7a^3\sqrt{3}}{9}$

1,5

b.

3,0

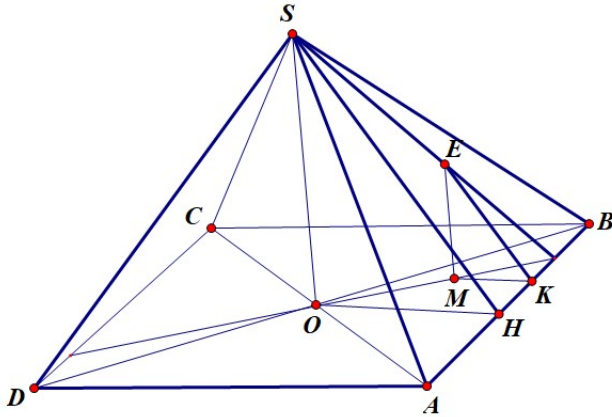


0,5

Ta có $AH \perp (MAB)$

Gọi E là giao điểm HK với AB ,

0,5

	Ta có. $MA \perp (CHK)$ suy ra $MA \perp CE$ và $CE \perp (MCA)$ và tam giác CEA vuông cân tại C do đó $EC = 2a$	
	Gọi F là hình chiếu vuông góc của K lên AC , ta có $KF \perp (ABC)$ Do đó $\widehat{KEF}$ là góc giữa HK và (ABC) .	0,5
	Ta có $\frac{KA}{MA} = \frac{KF}{MC} \Rightarrow KF = \frac{KA}{MA} \cdot MC = \left(\frac{CA}{MA}\right)^2 \cdot MC = \left(\frac{4a^2}{4a^2 + x^2}\right)x$ $CK^2 = \frac{4a^2 x^2}{4a^2 + x^2} \Rightarrow CF = \frac{2ax^2}{4a^2 + x^2} \Rightarrow EF = 2a \sqrt{1 + \frac{x^4}{(4a^2 + x^2)^2}}$	0,5
	Ta có $\sin \widehat{KEF} = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \tan \widehat{KEF} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\tan \widehat{KEF} = \frac{KF}{FE} \Leftrightarrow \frac{2ax}{\sqrt{(4a^2 + x^2)^2 + x^4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\Leftrightarrow x^4 - 6a^2 x^2 + 8a^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2a^2 \\ x^2 = 4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\sqrt{2} \\ x = 2a \end{cases}$	0,5
	Vậy có 1 giá trị x thỏa mãn ycbt: $x = 2a$;	0,5
5. (1,5đ)	Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a và M là điểm tùy ý trong tứ giác $ABCD$. Đường thẳng qua M , vuông góc với $(ABCD)$ cắt các mặt phẳng (SAB) , (SBC) , (SCD) , (SAD) lần lượt tại E, F, N, P . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{1}{ME^2} + \frac{1}{MF^2} + \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2}$.	
		0,5
	Gọi O là tâm hình vuông. Ta có $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ Kẻ $MK \perp AB (K \in AB)$ Dễ thấy $\tan \widehat{SHO} = \tan \widehat{EKM} \Rightarrow \frac{SO}{OH} = \frac{ME}{MK} \Rightarrow ME = \frac{MK \cdot SO}{OH} = \frac{dt(MAB)}{dt(OAB)} \cdot SO$ Tương tự ta cũng có $MF = \frac{dt(MBC)}{dt(OBC)} \cdot SO$; $MN = \frac{dt(MCD)}{dt(OC D)} \cdot SO$; $MP = \frac{dt(MAD)}{dt(OAD)} \cdot SO$; Lại có $dt(OAB) = dt(OBC) = dt(OC D) = dt(OAD)$	0,5

	Suy ra: $ME + MF + MN + MP = \frac{dt(MAB) + dt(MBC) + dt(MCD) + dt(MAD)}{dt(OAB)}. SO = 4.SO = 2a\sqrt{2}$	
	$\frac{1}{ME^2} + \frac{1}{MF^2} + \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ME} + \frac{1}{MF} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{MN} + \frac{1}{MP} \right)^2$ $\geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{ME} + \frac{1}{MF} + \frac{1}{MN} + \frac{1}{MP} \right)^2$ Lại có: $\frac{1}{ME} + \frac{1}{MF} + \frac{1}{MN} + \frac{1}{MP} \geq \frac{16}{MF + ME + MN + MP} = \frac{16}{2a\sqrt{2}} = \frac{8}{a\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \frac{1}{ME^2} + \frac{1}{MF^2} + \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{MP^2} \geq \frac{1}{4} \left(\frac{8}{a\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{8}{a^2} . \text{ Dấu } = \text{ xảy ra khi } M \text{ trùng } O.$	0,5

--- Hết ---

Ghi chú: Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa