

Câu 1. (2,0 điểm)

- a) Rút gọn biểu thức: $P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8}$
- b) Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng : $f(x)$ chia cho $x + 2$ dư 10, $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 26, $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư

Câu 2. (2,0 điểm) Giải phương trình

a) $\frac{x+43}{57} + \frac{x+46}{54} = \frac{x+49}{51} + \frac{x+52}{48}$

b) $(2x+3)(x+2)^2(2x+5)=3$

Câu 3. (2,0 điểm)

- a) Chứng minh rằng: $Q = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 : 9$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$
- b) Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) . Các đường cao AE, BF, CG cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của BC, qua H vẽ đường thẳng a vuông góc với HM, a cắt AB, AC lần lượt tại I và K

- a) Chứng minh tam giác ABC đồng dạng với tam giác EFC
- b) Qua C kẻ đường thẳng b song song với đường thẳng IK , b cắt AH, AB theo thứ tự tại N và D. Chứng minh $NC = ND, HI = HK$
- c) Chứng minh $\frac{AH}{HE} + \frac{BH}{HF} + \frac{CH}{HG} > 6$

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$P = \frac{a^3 - 4a^2 - a + 4}{a^3 - 7a^2 + 14a - 8} = \frac{a(a^2 - 1) - 4(a^2 - 1)}{(a^3 - 8) - 7a(a - 2)} = \frac{(a^2 - 1)(a - 4)}{(a - 2)(a^2 - 5a + 4)}$$

$$= \frac{(a - 1)(a + 1)(a - 4)}{(a - 2)(a - 1)(a - 4)} = \frac{a + 1}{a - 2}$$

a)

$$\text{Vậy } P = \frac{a + 1}{a - 2} \text{ với } a \neq \{1; 2; 4\}$$

b) Giả sử $f(x)$ chia cho $x^2 - 4$ được thương là $-5x$ và còn dư là $ax + b$. Khi đó

$$f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + ax + b$$

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{cases} f(2) = 26 \\ f(-2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 26 \\ -2a + b = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 18 \end{cases}$$

Do đó $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + 4x + 18$

Vậy đa thức $f(x)$ cần tìm là $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (-5x) + 4x + 18$

Câu 2.

a) $pt \Leftrightarrow \frac{x + 43}{57} + 1 + \frac{x + 46}{54} + 1 = \frac{x + 49}{51} + 1 + \frac{x + 52}{48} + 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x + 100}{57} + \frac{x + 100}{54} - \frac{x + 100}{51} - \frac{x + 100}{48} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 100) \left(\frac{1}{57} + \frac{1}{54} - \frac{1}{51} - \frac{1}{48} \right) = 0 \Leftrightarrow x = -100$$

b) $(2x + 3)(x + 2)^2(2x + 5) = 3$

$$\Leftrightarrow (2x+3)(2x+5)(x+2)^2=3$$

$$\Leftrightarrow (4x^2+16x+15)(x^2+4x+4)=3(2)$$

Đặt $y = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 4x^2 + 16x + 16 = 4y - 1$

Khi đó $(2) \Leftrightarrow y(4y-1) - 3 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(4y-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ 4y+3=0 \end{cases}$

$y=1 \Leftrightarrow x^2+4x+4=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$

$4y+3 \Leftrightarrow 4x^2+16x+16+3=0(VN)$

Vậy $S = \{-1; -3\}$

Câu 3.

a) $Q = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$
 $= n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n^3 + 6n^2 + 12n + 8)$
 $= 3(n^3 + 3n^2 + 5n + 3)$

Đặt $C = n^3 + 3n^2 + 5n + 3 = n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n + 3n + 3$
 $= n^2(n+1) + 2n(n+1) + 3(n+1)$
 $= n(n+1)(n+2) + 3(n+1)$

Ta thấy $n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 3 (vì tích 3 số tự nhiên liên tiếp)

Và $3(n+1):3 \Rightarrow C$ chia hết cho 3

Nên $Q = 3C$ chia hết cho 9

b) Đặt $b+c-a=x>0; c+a-b=y>0; a+b-c=z>0$

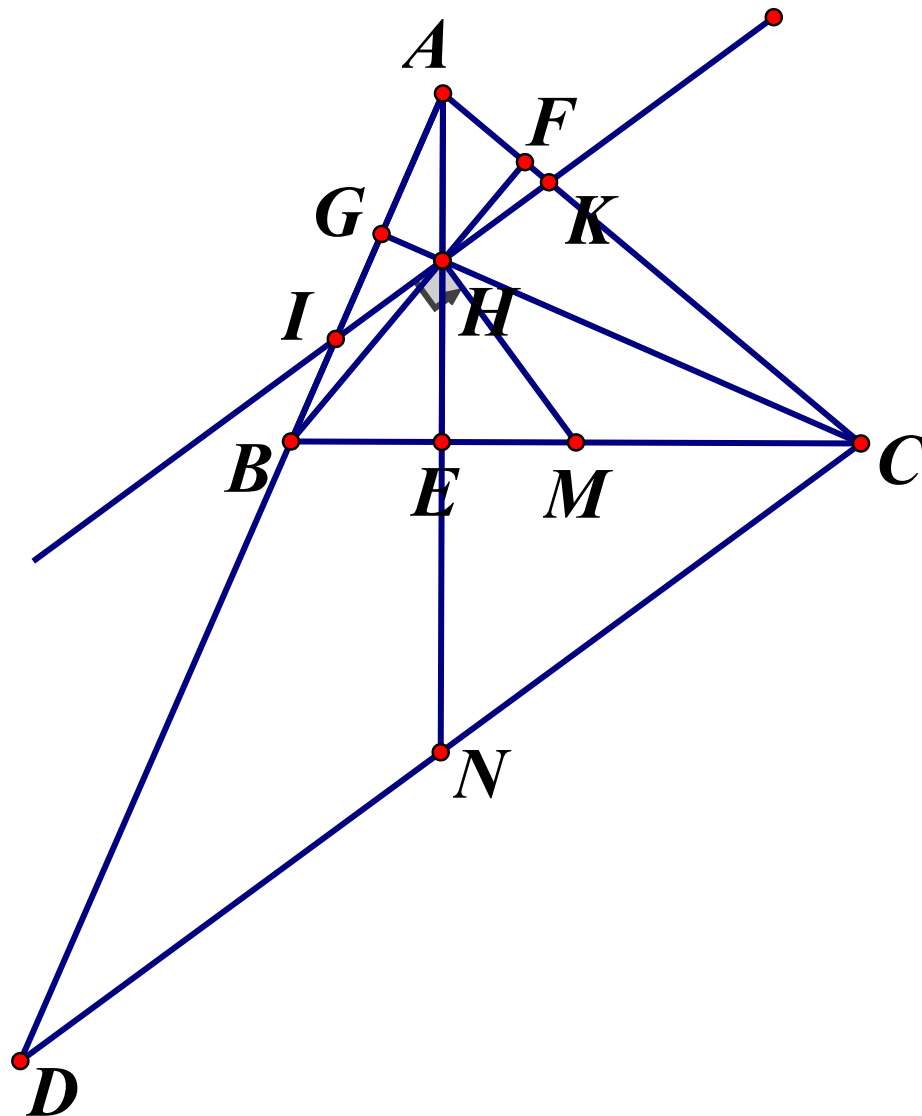
Từ đó suy ra $a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$

Thay vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{1}{2} [2+2+2] \Leftrightarrow A \geq 3$$

Câu 4.



a) Ta có $\triangle AEC \sim \triangle BFC (g.g) \Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{CA}{CB}$

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle EFC$ có $\frac{CE}{CF} = \frac{CA}{CB}$, $\angle C$ chung
 $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle EFC (cgc)$

b) Vì $CN \parallel IK, HM \perp IK \Rightarrow HM \perp CN \Rightarrow M$ là trực tâm $\triangle HNC$
 $\Rightarrow MN \perp CH$ mà $CH \perp AD$ (H là trực tâm $\triangle ABC$) $\Rightarrow MN \parallel AD$
 Do M là trung điểm BC $\Rightarrow NC = ND$

$$\frac{IH}{DN} = \frac{AH}{AN} (Vi...IH // DN) \quad \frac{HK}{CN} = \frac{AH}{AN} (Vi.....KH // CN)$$

$$\Rightarrow IH = IK$$

c) Ta có:
$$\frac{AH}{HE} = \frac{S_{AHC}}{S_{CHE}} = \frac{S_{ABH}}{S_{BHE}} = \frac{S_{AHC} + S_{ABH}}{S_{CHE} + S_{BHE}} = \frac{S_{AHC} + S_{ABH}}{S_{BHC}}$$

$$\frac{BH}{HF} = \frac{S_{BHC} + S_{BHA}}{S_{AHC}}, \quad \frac{CH}{HG} = \frac{S_{BHC} + S_{AHC}}{S_{BHA}}$$

Tương tự ta có:

$$\Rightarrow \frac{AH}{HE} + \frac{BH}{HF} + \frac{CH}{HG} = \frac{S_{AHC}}{S_{BHC}} + \frac{S_{ABH}}{S_{BHC}} + \frac{S_{BHC}}{S_{AHC}} + \frac{S_{BHA}}{S_{AHC}} + \frac{S_{BHC}}{S_{BHA}} + \frac{S_{AHC}}{S_{BHA}} \geq 6$$

Dấu "=" xảy ra khi $\triangle ABC$ đều mà theo gt $AB < AC$ nên không xảy ra dấu bằng.

Câu 5.

Trước tiên ta chứng minh BĐT: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*) \quad \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

. Dấu "=" xảy ra

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:
$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn... đúng)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

Dấu "=" xảy ra

Áp dụng BĐT (**) ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Dấu "=" xảy ra

Ta có:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) ta có:

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+ac+bc)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (Vi \quad abc=1)$$

Hay
$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Mà
$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 3 \quad \text{nên} \quad \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$$

Vậy
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$