

ĐỀ SỐ 4- A1K75 THPT NGUYỄN XUÂN ÔN

Câu 1(7 điểm).

1. Giải phương trình sau:
$$\frac{\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x + 1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 4 \sin 3x$$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+3y-1} + \sqrt{x+y} = 5 \\ 5x - 2y = -1 \end{cases}$$

Câu 2(2 điểm). Cho hai đường thẳng song song a và b. Trên đường thẳng a lấy 6 điểm với khoảng cách giữa hai điểm liên tiếp bằng 1cm, trên đường thẳng b lấy 8 điểm với khoảng cách giữa hai điểm liên tiếp bằng 1cm. Hỏi từ các điểm trên ta có bao nhiêu tứ giác không phải là hình bình hành ?

Câu 3(5 điểm). Cho tứ diện ABCD, gọi M là trung điểm cạnh AB, I là trọng tâm tam giác BCD.

1. Xác định giao điểm G của đường thẳng AI và mp(MCD). Tính tỉ số $\frac{GA}{GI}$

2. Giả sử mp(α) thay đổi luôn qua M cắt các cạnh BC, CD, DA lần lượt tại N,P,Q. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $\frac{NB}{NC} + \frac{PC}{PD} + \frac{QD}{QA}$.

Câu 4 (2 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 2019 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2018^2}{u_n^2 - u_n + 4036}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Đặt $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k^2 + 2018}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tính $\lim v_n$.

Câu 5 (4 điểm).

1. Giải phương trình sau: $2x + 4 + 2\sqrt{x^2 - 1} = (2x + 3)\sqrt{x + 1} + (2x - 3)\sqrt{x - 1}$

2. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

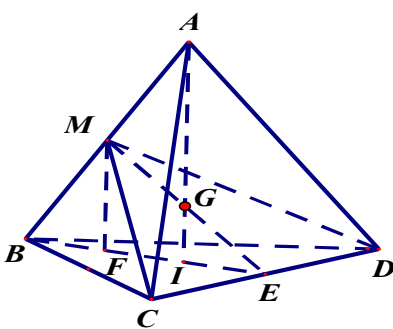
$$\frac{b+1}{8-\sqrt{a}} + \frac{c+1}{8-\sqrt{b}} + \frac{a+1}{8-\sqrt{c}} \leq \frac{6}{7}.$$

-----//-----

ĐÁP ÁN

Câu	ý	Nội dung	Điểm
1 7đ	1 3,5đ	ĐK: $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	0,5
		$pt \Leftrightarrow \frac{\sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x + 1}{\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2} \sin 3x$ $\Leftrightarrow \frac{(\sin x + \cos x)^2 - \sqrt{3}(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x} = 2\sqrt{2} \sin 3x$	1,0
		$\Leftrightarrow \sin x + \cos x - \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3} \sin x = 2\sqrt{2} \sin 3x$ $\Leftrightarrow (1 + \sqrt{3}) \sin x + (1 - \sqrt{3} \cos x) = 2\sqrt{2} \sin 3x$	1,0
		$\Leftrightarrow \sin 3x = \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x - \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ 3x = \pi - x + \frac{\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{24} + k\pi \quad (tm) \\ x = \frac{13\pi}{48} + k\frac{\pi}{2} \quad (tm) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$	1,0
		Vậy, các nghiệm của pt là $x = -\frac{\pi}{24} + k\pi$ và $x = \frac{13\pi}{48} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$	
	2 3,5đ	Điều kiện xác định $x + 3y - 1 \geq 0; x + y \geq 0$.	1
		Đặt $u = x + 3y - 1 \geq 0; v = x + y \geq 0$. Ta có $\begin{cases} x = 3v^2 - u^2 - 1 \\ 2y = u^2 - v^2 + 1 \end{cases}$	
		Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u + v = 5 \\ 16v^2 - 6u^2 = 10 \end{cases}$	1,0
		Giải ra ta được $\begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x + 3y = 10 \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$	1,5
		Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (1;3).	
2 2đ		Số tứ giác có đỉnh là các điểm đã cho trên hai đường thẳng a và b là: $C_6^2 \cdot C_8^2 = 420$	0,5
		Trong số các tứ giác trên thì: Số hình bình hành có cạnh trên hai đường thẳng a, b và độ dài 1cm là: $5 \times 7 = 35$ Số hình bình hành có cạnh trên hai đường thẳng a, b và độ dài 2cm là: $4 \times 6 = 24$	1,0

		...	
		Số hình bình hành có cạnh trên hai đường thẳng a, b và độ dài 5cm là: $1 \times 3 = 3$	
		Số hình bình hành có được là: $35 + 24 + 15 + 8 + 3 = 85$	
		Vậy, các tứ giác không phải hình bình hành là 335	0,5

3 5đ	1 2đ	 +) Xác định giao điểm của đường thẳng AI và mp(MCD): Gọi E là trung điểm cạnh CD, G là giao điểm của hai đường thẳng ME và AI. Vì $ME \subset (MCD)$ nên $G = AI \cap (MCD)$.	1,0
		+) Tính tỉ số $\frac{GA}{GI}$ Gọi F là trung điểm đoạn BI ta có: $AI = 2MF$ I là trung điểm EF nên $MF = 2GI$. Do đó, $AI = 4GI$. Vậy $\frac{GA}{GI} = 3$.	1,0
	2 3đ	Trước hết, ta chứng minh $\frac{NB}{NC} \frac{PC}{PD} \frac{QD}{QA} = 1.$ TH1: $MN \parallel AC$. Giả sử $MN \parallel AC$ theo định lý về giao tuyến của ba mặt phẳng phân biệt ta có $QP \parallel AC$. Khi đó, $\frac{NB}{NC} \frac{PC}{PD} \frac{QD}{QA} = \frac{MB}{MA} \frac{PC}{PD} \frac{PD}{PC} = 1.$	1,0
		TH2: MN cắt AC. Gọi O là giao điểm của hai đường thẳng MN và AC, khi đó O, P, Q thẳng hàng. Kẻ $CE \parallel AB$ ($E \in MO$); $CF \parallel AD$ ($F \in MO$) ta có: $\begin{aligned} \frac{NB}{NC} \frac{PC}{PD} \frac{QD}{QA} &= \frac{MB}{CE} \frac{CF}{QD} \frac{QD}{QA} \\ &= \frac{MA}{CE} \frac{CF}{QA} = \frac{AO}{CO} \frac{CO}{AO} = 1 \end{aligned}$	1,0
		Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho ba số dương ta có: $\frac{NB}{NC} + \frac{PC}{PD} + \frac{QD}{QA} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{NB}{NC} \frac{PC}{PD} \frac{QD}{QA}} = 3.$ Đẳng thức xảy ra khi N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD, DA.	1,0

		Vậy, giá trị nhỏ nhất của tổng $\frac{NB}{NC} + \frac{PC}{PD} + \frac{QD}{QA}$ là 3.	
4 2đ		Ta chứng minh bằng quy nạp $u_n = 2019, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy, với $n = 1$ thì $u_1 = 2019$. Với $n = 2$ thì $u_2 = \frac{u_1^3 + 2018^2}{u_1^2 - u_1 + 4036} = \frac{2019^3 + 2018^2}{2019^2 - 2019 + 4036} = 2019.$ Giả sử khẳng định đúng với $n = k (k \geq 2, k \in \mathbb{N})$ tức là $u_k = 2019$. Khi đó $u_{k+1} = \frac{u_k^3 + 2018^2}{u_k^2 - u_k + 4036} = \frac{2019^3 + 2018^2}{2019^2 - 2019 + 4036} = 2019.$ Vậy $u_n = 2019, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k^2 + 2018} = \frac{n}{2019^2 + 2018}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ Vậy $\lim v_n = \lim \frac{n}{2019^2 + 2018} = +\infty,$ vì $\lim n = +\infty; \lim \frac{1}{2019^2 + 2018} = \frac{1}{2019^2 + 2018}.$	1,0
5 4Đ	1 2đ	Điều kiện xác định của phương trình: $x \geq 1$ $pt \Leftrightarrow (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2 + 4 = 2x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) + 3(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$	0,5
		Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} > 0$ ta có $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \frac{2}{t}$; $2x = \frac{1}{2} \left((\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2 + (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^2 \right) = \frac{1}{2} \left(t^2 + \frac{4}{t^2} \right)$	0,5

		Ta có phương trình $t^2 + 4 = \frac{1}{2} \left(t^2 + \frac{4}{t^2} \right) t + \frac{6}{t} \Leftrightarrow t^4 - 2t^3 - 8t + 16 = 0 \Leftrightarrow t = 2$	0,5
		Với $t = 2$: $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 - 1} = 2$ $\Leftrightarrow 2 - x = \sqrt{x^2 - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ (2-x)^2 = x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$ Vậy, pt có nghiệm duy nhất $x = \frac{5}{4}$.	0,5
2	2đ	Từ $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3 \Rightarrow 0 < a, b, c < 3$ Xét hàm số: $f(x) = \frac{1}{8 - \sqrt{x}}$ với $x \in (0; 3)$ Có $f(x) - \frac{x+13}{98} = \frac{1}{8 - \sqrt{x}} - \frac{x+13}{98} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}-6)}{98(8 - \sqrt{x})} \leq 0$ với $x \in (0; 3)$	0,5
		$\Rightarrow f(x) \leq \frac{x+13}{98} \quad ; \forall x \in (0; 3)$ $\Rightarrow f(a) \leq \frac{a+13}{98}; \quad f(b) \leq \frac{b+13}{98}; \quad f(c) \leq \frac{c+13}{98}.$	0,5
		Khi đó : $VT \leq \frac{1}{98} [(a+13)(b+1) + (b+13)(c+1) + (c+13)(a+1)] =$ $\frac{1}{98} [(ab+bc+ca) + 14(a+b+c) + 39] = \frac{1}{98} [(ab+bc+ca) + 81]$	0,5
		Mà $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = 3$, nên $VT \leq \frac{1}{98}(3+81) = \frac{6}{7}$ (đpcm)	0,5