

Bài 1: Cho biểu thức: $A = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)} \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}}$
a, Rút gọn biểu thức A.

b, Tính giá trị biểu thức A khi $x = 3 + \sqrt{5}$; $y = 3 - \sqrt{5}$

Bài 2: Cho 3 số a, b, c $\neq 0$ thỏa mãn: $a \neq b \neq c$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

$$P = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} ; \quad Q = \frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}$$

Chứng minh rằng : $P.Q = 9$.

Bài 3: Giải phương trình : $(4x - 1)\sqrt{x^2 + 1} = 2(x^2 + 1) + 2x - 1$.

Bài 4: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x - y + \sqrt{x} = \sqrt{y} \\ x + y + 18\sqrt{xy} = 4\sqrt{x} + 3\sqrt{y} + 13 \end{cases}$$

Bài 5: Cho 3 số x,y,z thỏa mãn $x + y + z = 3$ và $x^4 + y^4 + z^4 = 3xyz$. Hãy tính giá trị của biểu thức $M = x^{2006} + y^{2006} + z^{2006}$

Bài 6: Cho Parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và điểm A(3;0) ; Điểm M thuộc (P) có hoành độ a.

a) Xác định a để đoạn thẳng AM có độ dài ngắn nhất .

b) Chứng minh rằng khi AM ngắn nhất thì đường thẳng AM vuông góc với tiếp tuyến của (P) tại điểm M.

Bài 7: Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x^3 + x^2 + x + 1 = 2003^y$

Bài 8: Cho tam giác ABC vuông ở A. I là trung điểm của cạnh BC, D là một điểm bất kỳ trên cạnh BC. Đường trung trực của AD cắt các đường trung trực của AB, AC theo thứ tự tại E và F.

a) Chứng minh rằng: 5 điểm A,E,I,D,F cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng: $AE.AC = AF.AB$.

c) Cho $AC = b$; $AB = c$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AEF theo b, c

Bài 9: Cho tam giác ABC cân tại A. Một điểm P di động trên BC. Qua P vẽ $PQ \parallel AC$

($Q \in AB$) và $PR \parallel AB$ ($R \in AC$). Tìm quỹ tích các điểm D đối xứng với P qua QR.

Hướng dẫn chấm thi học sinh giỏi lớp 9
Môn : Toán

Bài	Lời giải	Biểu điểm
1	a) ĐKXĐ : $x > 0 ; y > 0 ; x \neq y$ $A = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{x+y+2\sqrt{xy}} + \frac{2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)} \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{xy\sqrt{xy}}$ $= \sqrt{\frac{x+y}{xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} + \frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 \cdot (\sqrt{x} \cdot \sqrt{y})}} \cdot \frac{xy\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ $= \sqrt{\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{xy(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}} \cdot \frac{xy\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ $= \frac{1}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{xy\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ b) Với $x = 3 + \sqrt{5}$ và $y = 3 - \sqrt{5}$ ta có : $x > y$ do đó $A = \frac{xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} > 0$ Mà $A^2 = \frac{(xy)^2}{x+y-2\sqrt{xy}} = \frac{[(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})]^2}{(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})-2\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}} = \frac{4^2}{6-2 \cdot 2} = 8$ Vậy : $A = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$	0,25 0,75 0,25 0,75
2	Ta có : $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ $\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = 0$ (1) Mà $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \neq 0$ (Do $a \neq b \neq c$) Do đó: (1) $\Leftrightarrow a+b+c = 0 \Rightarrow a+b = -c ; a+c = -b ; b+c = -a$ (2) Mặt khác : $p = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} = \frac{ab(b-a) + bc(b-c) + ac(c-a)}{abc}$ $p = \frac{ab(a-b) + b^2c - bc^2 + ac^2 - a^2c}{abc} = \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc} \quad (3)$ Hơn nữa : $\begin{cases} a-b=z \\ b-c=x \\ c-a=y \end{cases} \quad \text{Ta có} \quad \begin{cases} x-y=a+b-2c=-3c \\ y-z=b+c-2a=-3a \\ z-x=a+c-2b=-3b \end{cases} \quad (\text{do (2)})$ Đặt Vì thế :	0,5 0,5

	$Q = \frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} = -\frac{1}{3} \left(\frac{x-y}{z} + \frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} \right)$ $= -\frac{1}{3} \cdot \frac{(x-y).(y-z).(x-z)}{xyz} \quad (\text{Biến đổi tương tự rút gọn P})$ $= -\frac{1}{3} \cdot \frac{(-3c).(-3a).[-(-3b)]}{(a-b).(b-c).c-a}$ $= \frac{-9abc}{(a-b)(b-c)(c-a)} \quad (4)$ Từ (3) và (4) ta có : $P.Q = \frac{(a-b).(b-c).(a-c)}{abc} \cdot \frac{-9abc}{(a-b).(b-c).(c-a)} = 9$ Vậy $P.Q = 9$	0,75 0,25
3	$(4x-1)\sqrt{x^2+1} = 2(x^2+1) + 2x - 1 \quad (5)$ Đặt $\sqrt{x^2+1} = y$ ($y \geq 1$) Ta có : $(5) \Leftrightarrow (4x-1).y = 2y^2 + 2x - 1$ $\Leftrightarrow 2y^2 - 4xy + 2x + y - 1 = 0$ $\Leftrightarrow (2y^2 - 4xy + 2y) - (y - 2x + 1) = 0$ $\Leftrightarrow 2y(y - 2x + 1) - (y - 2x + 1) = 0$ $\Leftrightarrow (y - 2x + 1)(2y - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = \frac{1}{2} < 1 (\text{loại}) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} = 2x - 1$ $\Leftrightarrow x^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 1$ $\Leftrightarrow x(3x - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$	0,25 1,0 0,75
4	$(I) \begin{cases} x - y + \sqrt{x} = \sqrt{y} (a) \\ x + y + 18\sqrt{xy} = 4\sqrt{x} + 3\sqrt{y} + 13 (b) \end{cases} \quad (\text{ĐKXĐ : } x \geq 0; y \geq 0)$ Ta có : $(a) \Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y} + 1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y}$ $\Leftrightarrow x = y \text{ thế vào (b) ta được :}$ $2x + 18x = 4\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 13 \Leftrightarrow 20x - 7\sqrt{x} - 13 = 0 \quad (6)$ Đặt $\sqrt{x} = t$ ($t \geq 0$) ta có : $(6) \Leftrightarrow 20t^2 - 7t - 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{-13}{20} < 0 (\text{loại}) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ Vậy hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x, y) = (1, 1)$	1,0 1,0

	$\left. \begin{aligned} \frac{x^4 + y^4}{2} &\geq \sqrt{x^4 \cdot y^4} = x^2 y^2 \\ \frac{y^4 + z^4}{2} &\geq \sqrt{y^4 \cdot z^4} = y^2 z^2 \\ \frac{z^4 + x^4}{2} &\geq \sqrt{z^4 \cdot x^4} = x^2 z^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ Theo BĐT Cô si ta có : $\Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \geq x^2 y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2 \quad (7)$ Mặt khác : $x^2 y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2 \geq xy^2 z + xyz^2 + x^2 yz$ (C/M tương tự quá trình trên) 5 $\Leftrightarrow x^2 y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2 \geq xyz (x + y + z)$ $\Leftrightarrow x^2 y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2 \geq 3xyz$ (8) (do $x + y + z = 3$) Do đó : $x^4 + y^4 + z^4 \geq 3xyz$ (9) Dấu “ = ” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = y^4; y^4 = z^4; z^4 = x^4 \\ x^2 y^2 = y^2 z^2; y^2 z^2 = z^2 x^2; z^2 x^2 = x^2 y^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z \quad (10)$ Hơn nữa $x + y + z = 3$ (11) Từ (10) và (11) $\Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = z = 1$ $\Rightarrow x^{2006} + y^{2006} + z^{2006} = 1 + 1 + 1 = 3$ Vậy : $M = 3$	0,75 0,75 0,5
6	a) Ta có : $A(3; 0)$ và $M(a; a^2)$ do đó : $\begin{aligned} AM^2 &= (a - 3)^2 + (a^2 - 0)^2 = a^4 + a^2 - 6a + 9 \\ &= (a^4 - 2a^2 + 1) + 3(a^2 - 2a + 1) + 5 \\ &= (a^2 - 1)^2 + 3(a - 1)^2 + 5 \geq 5 \end{aligned}$ $\Rightarrow AM \geq \sqrt{5}$ $\Rightarrow \min AM = \sqrt{5}$ khi và chỉ khi $a = 1$ b) Theo câu a : AM có độ dài ngắn nhất $\Leftrightarrow a = 1$, Khi đó $M(1;1)$ Do đó phương trình đường thẳng AM là: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ (do $A(3;0)$) (c) Gọi phương trình đường thẳng đi qua điểm M (1;1) và tiếp xúc với (P) tại điểm M là (d) : $y = ax + b$ ta có : $a \cdot 1 + b = 1$ (12) (Do $M(1;1) \in (d)$) và phương trình : $x^2 = ax + b$ có nghiệm kép (13) (do (d) tiếp xúc với (P)) Mà : $x^2 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - (ax + b) = 0$ (14) Phương trình (14) có $\Delta = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-b) = a^2 + 4b$ Nên : (13) $\Leftrightarrow a^2 + 4b = 0$ (15) Từ (12) và (15) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a + b = 1 \\ a^2 + 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 4(1 - a) = 0 \\ b = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$ Vì thế phương trình đường thẳng đi qua điểm M(1;1) và tiếp xúc với	1.0 0,25

	$\Rightarrow$ Tứ Giác AIDF nội tiếp (18) Từ (17) ; (18) $\Rightarrow$ 5 điểm A , E , I , D , F cùng thuộc đường tròn b)Ta có EF là đường trung trực của AD nên : AE = ED ; FA =FD $\Rightarrow \triangle AEF = \triangle DEF$ (c. c.c) $\Rightarrow \angle AEF = \angle DEF = \frac{1}{2} \angle AED = \frac{1}{2} \cdot 2 \angle B = \angle B$ +) Tương tự $\angle AEF = \angle C$ Suy ra $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (g.g) $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AE.AC = AF.AB$ c) Theo câu b) Ta có : $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = k$ (k là tỉ số đồng dạng) $\Rightarrow AE = kc ; AF = kb$. Ta có : $\triangle AEF$ vuông tại A (do $\triangle ABC$ vuông tại A và $\triangle AEF \sim \triangle ABC$) Nên diện tích $\triangle AEF$ là $S = \frac{1}{2} AE.AF \Rightarrow 2S = k^2 bc$ (19) Mặt khác $S = \frac{1}{2} AM.EF \Leftrightarrow 2S = AM . EF \Leftrightarrow 4S^2 = AM^2 . EF^2$ $\Leftrightarrow 4S^2 = \left(\frac{AD}{2}\right)^2 . (k^2b^2 + k^2c^2)$ (20) Từ (19) và (20) $\Rightarrow 2S = \frac{AD^2}{4} \cdot \frac{b^2 + c^2}{bc} \Rightarrow S = \frac{b^2 + c^2}{8bc} . AD^2$ (21) Do đó : S nhỏ nhất $\Leftrightarrow AD$ nhỏ nhất Mà $AD \geq AH$ (AH $\perp$ BC , H $\in$ BC) Lại có $AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}} \Rightarrow AD \geq \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$ (22) Từ (21) ; (22) $\Rightarrow S \geq \frac{b^2 + c^2}{8bc} \cdot \frac{(bc)^2}{b^2 + c^2} = \frac{bc}{8}$ Vậy Min $S = \frac{bc}{8}$ (Khi D $\equiv$ H)	0,5
--	--	-----

9	a) Phần thuận Giả sử D là điểm đối xứng với P qua QR ta có : * $QP = QB = QD \Rightarrow P, B, D$ thuộc đường tròn (Q) A $\Rightarrow \widehat{BDP} = \frac{1}{2} \widehat{BQP} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} \quad (23)$ * Tương tự : $\widehat{CDP} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} \quad (24)$ Từ (23) ; (24) $\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{BAC}$ $\Rightarrow$ điểm D thuộc cung BAC (Của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC) b) Phần đảo Lấy điểm D' thuộc cung BAC ($D' \neq B, C$), Gọi Q' là giao điểm của AB với đường trung trực của D'B ; qua Q' kẻ Q'P' // AC qua P' kẻ P'R' // AB ta có Q'R' là đường trung trực của D'P' Vậy quỹ tích các điểm D là cung BAC của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (trừ 2 điểm B,C)	1,0 1,0
---	---	-----------------------

