**ĐỀ 80**

**Câu 1. (4,0 điểm)**

1. Cho x, y là các số tự nhiên sao cho $x^{2}+y^{2}+2xy+x+3y+2$ là một số chính phương. Tính giá trị của biểu thức S = $5x-5y+2022$
2. Cho a, b, c là các số tự nhiên thỏa mãn a + b + c = 30. Tìm dư của phép chia $a^{5}+b^{5}+c^{5}+2022$ cho 30

**Câu 2. (4,0 điểm)**

1. Cho parabol (P): $y=3x^{2}$ và đường thẳng (d): $y=(10-4m)x-3m-7$ (m là tham số). Tìm các giá trị nguyên của m để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là các số dương.
2. Giải phương trình $\left(2x+1\right)\sqrt{4x^{2}-4x+3}=4x^{2}+1$

**Câu 3. (4,0 điểm)**

1. Cho x là số thực thoả mãn $\frac{2}{3}$ $\leq $ x $\leq $ 2. Rút gọn biểu thức

T = $\sqrt{3x+2+4\sqrt{3x-2}}+\sqrt{3x+2-4\sqrt{3x-2}}$

1. Cho a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh của một tam giác và thoả mãn

a + b + c = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

M = $27\left(a^{2}+b^{2}+c^{2}\right)+108abc$

**Câu 4. (4,0 điểm)**

1. Cho tam giác ABC vuông tại A có trọng tâm G và BD là đường phân giác của góc $\hat{ABC} $(D thuộc cạnh AC). Biết $\hat{GDC}$ = 90⁰. Tính $\hat{ABC}$
2. Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC, E là giao điểm của CM và DN. Chứng minh tam giác AED cân.

**Câu 5. (4,0 điểm)**

1. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (T), tâm O. Từ điểm A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với (T) (B và C là các tiếp điểm). Gọi M là trung điểm của AB, CM cắt (T ) tại điểm D (D khác C ). Tính $\frac{CD.CM}{BC^{2}}$
2. Cho tam giác ABC (AB < AC) có trọng tâm G và có diện tích bằng 2022. Xét đường thẳng d thay đổi đi qua điểm G và cắt các cạnh AB, AC của tam giác ABC lần lượt tại D và E. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích các tam giác BDE và CDE.

**-----------HẾT------------**

**HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Câu 1. (4,0 điểm)**

1. Cho x, y là các số tự nhiên sao cho $x^{2}+y^{2}+2xy+x+3y+2$ là một số chính phương. Tính giá trị của biểu thức S = $5x-5y+2022$

**Lời giải**

Đặt M = $x^{2}+y^{2}+2xy+x+3y+2$

Ta có: M > $x^{2}+2xy+y^{2}$ $⇔$ M > $\left(x+y\right)^{2}$.

Mà M < $x^{2}+y^{2}+4xy+4x+4y+4$ $⇔$ M > $\left(x+y+2\right)^{2}.$

Ta lại có: $\left(x+y\right)^{2}$.$\left(x+y+1\right)^{2}.\left(x+y+2\right)^{2}$ là các số chính phương liên tiếp

Suy ra M = $\left(x+y+1\right)^{2}$ $⇔$ $x-y=1$

Do đó S = $5x-5y+2022=2027$

1. Cho a, b, c là các số tự nhiên thỏa mãn a + b + c = 30. Tìm dư của phép chia $a^{5}+b^{5}+c^{5}+2022$ cho 30

**Lời giải**

Ta có $a^{5}-a=a(a^{4}-1)=(a-1)a(a+1)(a^{2}+1)$

Do $(a-1)a(a+1) chia hết cho 2 và 3, mà (2;3)=1 nên $

$(a-1)a(a+1) chia hết cho 6$

Nếu a chia hết cho 5 được dư 1; 0; 4 thì $(a-1)a(a+1) chia hết cho $5.

Nếu a chia hết cho 5 được dư là 2 thì $a^{2}+1=(a-2)(a+2)+5 chia hết cho $5.

Nếu a chia hết cho 5 được dư là 3 thì $a^{2}+1=(a-3)(a+3)+10 chia hết cho $5.

Do (5;6) = 1 nên $a^{5}-a$ chia hết cho 30; tương tự $b^{5}-b$; $c^{5}-c$ chia hết cho 30.

Khi đó: $a^{5}+b^{5}+$ $c^{5}$ + 2022 = ($a^{5}-a$) + ($b^{5}-b$) + ($c^{5}-c$) + 68.30 + 12

Vậy dư của phép chia $a^{5}+b^{5}+$ $c^{5}$ + 2022 cho 30 là 12.

**Câu 2. (4,0 điểm)**

1. Cho parabol (P): $y=3x^{2}$ và đường thẳng (d): $y=(10-4m)x-3m-7$ (m là tham số). Tìm các giá trị nguyên của m để (P) cắt (d) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là các số dương.

**Lời giải**

Hoành độ giao điểm của (P) và (d ) là nghiệm của phương trình

$3x^{2}=(10-4m)x-3m-7$

$⇔$ $3x^{2}-2(5-2m)x+3m+7=0$ (\*)

Yêu cầu bài toán được thoả khi (\*) có hai nghiệm phân biệt đều dương. Điều này xảy ra khi

$\left\{\begin{array}{c}∆'>0\\P>0\\S>0\end{array}\right.$ $⇔\left\{\begin{array}{c}4m^{2}-29m+4>0\\ \frac{3m+1}{3}>0\\ \frac{2(5-2m)}{3}>0\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}4m^{2}-29m+4>0\\ m>-\frac{7}{3}\\ m>\frac{5}{2}\end{array}\right.$

$⇔$ $\left\{\begin{array}{c}4m^{2}-29m+4>0 (1)\\-\frac{7}{3} <m<\frac{5}{2} (2)\end{array}\right.$

Do m nguyên nên từ (2) suy ra m = $-2, m=-1,m=0,m=1,m=2$

Lần lượt thay m = $-2, m=-1,m=0,m=1,m=2$ vào (1) ta thấy m = $-2, m=-1,m=0$ thỏa mãn. Vậy m = $-2, m=-1,m=0$ là các giá trị cần tìm

1. Giải phương trình $\left(2x+1\right)\sqrt{4x^{2}-4x+3}=4x^{2}+1$

**Lời giải**

Điều kiện: 2x + 1 > 0

Phương trình đã cho tương đương với

$2x\sqrt{4x^{2}-4x+3}+\sqrt{4x^{2}-4x+3}=\left(\sqrt{4x^{2}-4x+3}\right)^{2}+4x-2$

$⇔$ $\left(\sqrt{4x^{2}-4x+3}\right)^{2}-\sqrt{4x^{2}-4x+3}-2-2x\left(\sqrt{4x^{2}-4x+3}-2\right)=0$

$⇔\left(\sqrt{4x^{2}-4x+3}-2\right)\left(\sqrt{4x^{2}-4x+3}+1-2x\right)=0$

$⇔$ $\left[\begin{array}{c}\sqrt{4x^{2}-4x+3}=2\\\sqrt{4x^{2}-4x+3}=2x-1\end{array}\right.$

Với $\sqrt{4x^{2}-4x+3}=2$ $⇔$ $4x^{2}-4x-1=0⇔x=$ $\frac{1\pm \sqrt{2}}{2}$ (thỏa điều kiện)

Với $\sqrt{4x^{2}-4x+3}=2x-1$ $⇔$ $\left\{\begin{array}{c}2x-1\geq 0\\3=1\end{array}\right.$ phương trình vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=$ $\frac{1\pm \sqrt{2}}{2}$

**Câu 3. (4,0 điểm)**

1. Cho x là số thực thoả mãn $\frac{2}{3}$ $\leq $ x $\leq $ 2. Rút gọn biểu thức

T = $\sqrt{3x+2+4\sqrt{3x-2}}+\sqrt{3x+2-4\sqrt{3x-2}}$

**Lời giải**

Ta có: T = $\sqrt{3x+2+4\sqrt{3x-2}}+\sqrt{3x+2-4\sqrt{3x-2}}$

= $\sqrt{\left(\sqrt{3x-2}+2\right)^{2}}+\sqrt{\left(\sqrt{3x-2}-2\right)^{2}}$

= $\left|\sqrt{3x-2}+2\right|+\left|\sqrt{3x-2}-2\right|$

= $\sqrt{3x-2}+2$ + $\left|\sqrt{3x-2}-2\right|$

Do $\frac{2}{3}$ $\leq $ x $\leq $ 2 nên $\sqrt{3x-2}-2\leq 0$

Vậy T = $\sqrt{3x-2}+2+2-\sqrt{3x-2}=4$

1. Cho a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh của một tam giác và thoả mãn

a + b + c = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

M = $27\left(a^{2}+b^{2}+c^{2}\right)+108abc$

**Lời giải**

Ta có: $a^{2}-\left(b-c\right)^{2}\leq a^{2}$ $⇔$ $\left(a-b+c\right)\left(a+b-c\right)$ $\leq a^{2}$

Tương tự $\left(b-a+c\right)\left(b+a-c\right)$ $\leq b^{2}$; $\left(c-a+b\right)\left(c+a-b\right)$ $\leq c^{2}$

Từ đó suy ra $abc\geq \left(a+b-c\right)\left(b+a-c\right)\left(c+a-b\right)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi *a = b = c.*

Do *a + b + c =* 1 nên ta có

$abc\geq \left(1-2a\right)\left(1-1b\right)\left(1-2c\right)=1-2(a+b+c)+4(ab+bc+ca)-8bc$

$⇔$ $abc\geq $ $-\frac{1}{9}$ *+* $\frac{4}{9}\left(ab+bc+ca\right)$

Khi đó: M $\geq $ $27\left(a+b+c\right)^{2}-54\left(ab+bc+ca\right)-12+48\left(ab+bc+ca\right)$

Hay M $\geq 15-6\left(ab+bc+ca\right)$

Ta lại có: $\left(a+b+c\right)^{2}\geq 3\left(ab+bc+ca\right)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

a = b = c

Suy ra M $\geq 15-2\left(a+b+c\right)^{2}=13$; M = 13 khi a = b = c = $\frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức M là 13.

**Câu 4. (4,0 điểm)**

1. Cho tam giác ABC vuông tại A có trọng tâm G và BD là đường phân giác của góc $\hat{ABC} $(D thuộc cạnh AC). Biết $\hat{GDC}$ = 90⁰. Tính $\hat{ABC}$

**Lời giải**

****

Đặt M là trung điểm của BC và E là trung điểm của AG.

Do $ED=\frac{1}{2}AG$ nên $△$EAD cân tại E, suy ra $\hat{EDA}$ = $\hat{EAD}$ (1)

Do $AM=\frac{1}{2}BC$ nên $△$MAC cân tại M, suy ra $\hat{MAC}$ = $\hat{MCA}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\hat{EDA}$ = $\hat{MCA}$. Khi đó ED//MC $⇒$ $\frac{DA}{DC}$ = $\frac{EA}{EM}$ = $\frac{1}{2}$

Do tính chất phân giác, ta có $\frac{AB}{BC}$ = $\frac{DA}{DC}$ . Suy ra $\frac{AB}{BC}$ = $\frac{1}{2}$ hay $\hat{ABC}$ = 60⁰

1. Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC, E là giao điểm của CM và DN. Chứng minh tam giác AED cân.

**Lời giải**

****

Đặt P là trung điểm của CD, H là giao điểm của AP và DN.

Ta có: tứ giác APCM là hình bình hành (AM = CP và AM//CP) nên PH//CE.

Suy ra PH là đường trung bình của tam giác CDE hay H là trung điểm của DE .

Do đó AH là đường trung tuyến của tam giác AED. (3)

Ta lại có: $\hat{PAD}$ = $\hat{NDC}$ (Vì $△$PAD = $△$NDC)

Mà $\hat{PAD}$ + $\hat{APD}$ = 90⁰

Suy ra $\hat{NDC}$ + $\hat{APD}$ = 90⁰ hay AH $⊥DE$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $△$AED có AH vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên $△$AED cân tại H)

**Câu 5. (4,0 điểm)**

1. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (T), tâm O. Từ điểm A vẽ các tiếp tuyến AB, AC với (T) (B và C là các tiếp điểm). Gọi M là trung điểm của AB, CM cắt (T ) tại điểm D (D khác C ). Tính $\frac{CD.CM}{BC^{2}}$

**Lời giải**

****

Đặt E là điểm đối xứng của C qua M .

Do $\hat{ACE}$ = $\hat{BEC}$ (BCAE là hình bình hành) và $\hat{ACE}$ = $\hat{CBD}$ (cùng chắn cung CD)

Suy ra $\hat{CBD}$ = $\hat{BEC}$ hay $△$CBD đồng dạng $△$CEB

$⇒$ $\frac{BC}{EC}$ = $\frac{CD}{CB}⇒$ $BC^{2}=CD.CE$ $⇒$ $BC^{2}=2CD.CM⇒\frac{CD.CM}{BC^{2}}$ = $\frac{1}{2}$

1. Cho tam giác ABC (AB < AC) có trọng tâm G và có diện tích bằng 2022. Xét đường thẳng d thay đổi đi qua điểm G và cắt các cạnh AB, AC của tam giác ABC lần lượt tại D và E. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích các tam giác BDE và CDE.

**Lời giải**

****

Đặt M là trung điểm của BC. Kẻ BI, CK cùng song song với d ( I, K thuộc AM ). Kẻ

BP, AH, MT, CQ cùng vuông góc với d ( P, H, T, Q thuộc d ); dt: diện tích.

Ta có: $△$MIB = $△$MKC nên MI = MK

Ta lại có: $\frac{AB}{AD}$ + $\frac{AC}{AE}$ $=\frac{AI}{AG}$ + $\frac{AK}{AG}$ $=\frac{AM-IM+AM+MK}{AG}$ $=\frac{2AM}{AG}$ $=3$

Khi đó: dt$△$BDE + dt$△$CDE = $\frac{1}{2}$ DE(BP+CQ) = DE.MT = $\frac{1}{2}$ DE.AH = dt$△$ADE

Suy ra $\frac{dt△BDE + dt△CDE}{dt△ABC}$ = $\frac{AD}{AB}$ . $\frac{AE}{AC}$

Mà $\frac{AB}{AD}$ . $\frac{AC}{AE}$ $\leq $ $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{AB}{AD}+\frac{AC}{AE}\right)^{2}$= $\frac{9}{4}$ đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{AD}{AB}$ = $\frac{AE}{AC}$

Suy ra $\frac{dt△BDE + dt△CDE}{dt△ABC}$ $\geq $ $\frac{4}{9}$ $⇔$ $dt△BDE + dt△CDE$ $\geq $ $\frac{2696}{3}$

Hay $dt△BDE + dt△CDE$ = $\frac{2696}{3}$ khi $\frac{AD}{AB}$ = $\frac{AE}{AC}$ hay d//BC

Vây giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích các tam giác BDE và CDE bằng $\frac{2696}{3}$

**-----------HẾT------------**