

BÀI 16. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

CHƯƠNG 5. GIỚI HẠN

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

Dạng 1. Giới hạn tại 1 điểm

- Câu 1.** (SGK-KNTT 11-Tập 1) Cho hàm số $f(x) = \frac{4-x^2}{x-2}$.
- a) Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$.
- b) Cho dãy số $x_n = \frac{2n+1}{n}$. Rút gọn $f(x_n)$ và tính giới hạn của dãy (u_n) với $u_n = f(x_n)$.
- c) Với dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n \neq 2$ và $x_n \rightarrow 2$, tính $f(x_n)$ và tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$.

Lời giải

- a) Biểu thức $f(x)$ có nghĩa khi $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Do đó, tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- b) Ta có:

$$f(x_n) = \frac{4 - \left(\frac{2n+1}{n}\right)^2}{\frac{2n+1}{n} - 2} = \frac{4 - \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right) - 2} = \frac{4 - \left(4 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n}\left(4 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = -4 - \frac{1}{n}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-4 - \frac{1}{n}\right) = -4.$$

$$f(x_n) = \frac{4 - x_n^2}{x_n - 2} = \frac{(2 - x_n)(2 + x_n)}{-(2 - x_n)} = -2 - x_n.$$

- c) Ta có:

$$\text{Vì } x_n \neq 2 \text{ và } x_n \rightarrow 2 \text{ với mọi } n \text{ nên } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2.$$

$$\text{Do đó, } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2 - x_n) = -2 - 2 = -4.$$

- Câu 2.** (SGK-KNTT 11-Tập 1) Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

Lời giải

Do mẫu thức có giới hạn là 0 khi $x \rightarrow 1$ nên ta không thể áp dụng ngay quy tắc tính giới hạn của thương hai hàm số.

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1$$

Lại có:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 1} 1 = \sqrt{1} + 1 = 2$$

Do đó

- Câu 3.** (SGK-KNTT 11-Tập 1) Cho hai hàm số $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ và $g(x) = x+1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- a) $f(x) = g(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

Lời giải

+) Biểu thức $f(x)$ có nghĩa khi $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Ta có: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$, với mọi $x \neq 1$.

Biểu thức $g(x) = x + 1$ có nghĩa với mọi x .

Do đó, điều kiện xác định của hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ khác nhau, vậy khẳng định a) là sai.

+) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ nên khẳng định b) là đúng.

Câu 4. Tính giới hạn

a. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(3x+1)(2-3x)}{x+1}$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2+x^3}{1+x}$

c. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2+1} - x}{x-1}$

d. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{5x-1}{2x+7}}$ e. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}$

f. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-2}$

Lời giải

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(3x+1)(2-3x)}{x+1} = 40$

a.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2+x^3}{1+x} = 1$

b.

c. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2+1} - x}{x-1} = \frac{-3}{2}$

d. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{5x-1}{2x+7}} = \sqrt{\frac{5-1}{2+7}} = \frac{2}{3}$

e. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x-1} = \frac{\sqrt{4-2+1}}{2-1} = \sqrt{3}$

f.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-2} = \frac{\sqrt{1+8} - 3}{1-2} = 0$

Câu 5. Tính giới hạn

a. $\lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{(x+1)(2-x)}{x-1} \right|$ b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2+x-1}}{|x+1|}$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -3} \left| \frac{(x+1)(2-x)}{x-1} \right| = \left| \frac{(-3+1)(2+3)}{-3-1} \right| = \frac{5}{2}$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x^2 + x - 1}}{|x+1|} = \frac{\sqrt{2+1-1}}{|1+1|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

b.

Câu 6. Tính giới hạn

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 2x^2} \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x}$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x(x+5) - 6}$$

$$\text{d. } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} \quad \text{e. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}$$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 2x^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^2(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x^2 + 4)}{x^2} = -8$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x-1)(x+4)}{x(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x-1}{x} = \frac{5}{4}$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x(x+5) - 6} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+6)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x+6} = \frac{3}{7}$$

c.

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x+5)(x-3)}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -5} (x-3) = -8$$

d.

$$\text{e. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1 + x^2 - 1 + \dots + x^n - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{x^2 - 1}{x - 1} + \dots + \frac{x^n - 1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} (1 + x + 1 + \dots + x^{n-1} + x^{n-2} + 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\underbrace{1 + \dots + 1}_n + \underbrace{x + \dots + x}_{n-1} + \dots + \underbrace{x^{n-2} + \dots + x^{n-2}}_2 + x^{n-1} \right) = (n + n - 1 + n - 2 + \dots + 1) = \frac{n}{2}(n+1)$$

Câu 7. Tính giới hạn

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{4x} \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x - 1}$$

a.

Lời giải

a.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+x} - 2)(\sqrt{4+x} + 2)}{4x(\sqrt{4+x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4+x-4}{4x(\sqrt{4+x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(\sqrt{4+x} + 2)} = \frac{1}{16}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x+7} - 2)(\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4)}{(x-1)(\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4)}$$

b.

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+7-2^3}{(x-1)(\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4)} = \frac{1}{12}$$

Câu 8. Tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{\sqrt{x+2} - 2}$$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - \sqrt{3x-2}}{x-1}$

a.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{\sqrt{x+2} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x+5} - 3)(\sqrt{2x+5} + 3)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{2x+5} + 3)(\sqrt{x+2} + 2)}$$

a.

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x+5-9)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x+2-4)(\sqrt{2x+5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(\sqrt{x+2} + 2)}{\sqrt{2x+5} + 3} = \frac{4}{3}$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - \sqrt{3x-2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1) - (\sqrt{3x-2} - 1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^3 - 1}{x-1} - \frac{\sqrt{3x-2} - 1}{x-1} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left[x^2 + x + 1 - \frac{3x-2-1}{(x-1)(\sqrt{3x-2} + 1)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[x^2 + x + 1 - \frac{3}{\sqrt{3x-2} + 1} \right] = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Câu 9. Tính giới hạn

a. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[4]{x+2} - 1}{\sqrt[3]{x+2} - 1}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x+3}}{x-1}$

Lời giải

a. Đặt $t = \sqrt[12]{x+2} \Rightarrow x = t^{12} - 2$ khi đó $x \rightarrow -1$ thì $t \rightarrow 1$. Do đó:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[4]{x+2} - 1}{\sqrt[3]{x+2} - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{t^3 - 1}{t^4 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{t^2+t+1}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x+3}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x+7} - 2) - (\sqrt{x+3} - 2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x-1} - \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x+7-2^3}{(x-1)(\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4)} - \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4} - \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} \right] = \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Câu 10. Tính giới hạn

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{3x}$$

a.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{x-1} = \frac{1}{2}$$

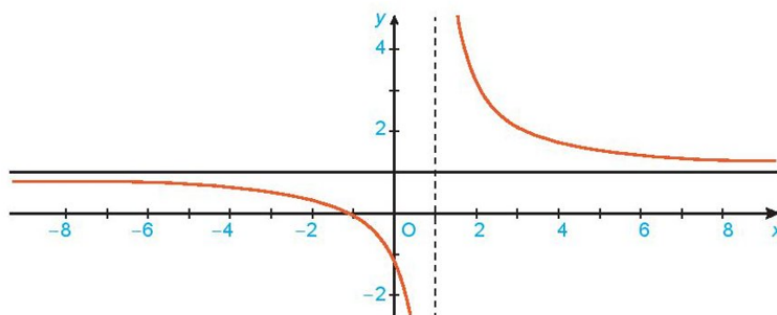
a.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+2x} - 1)(\sqrt{1+2x} + 1)}{3x(\sqrt{1+2x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x(\sqrt{1+2x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3(\sqrt{1+2x} + 1)} = \frac{1}{3}$$

b.

Dạng 2. Giới hạn của hàm số tại vô cực

Câu 11. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Cho hàm số $f(x) = 1 + \frac{2}{x-1}$ có đồ thị như Hình 5.4.



Hình 5.4.

Giả sử (x_n) là dãy số sao cho $x_n > 1, x_n \rightarrow +\infty$. Tính $f(x_n)$ và tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$.

Lời giải

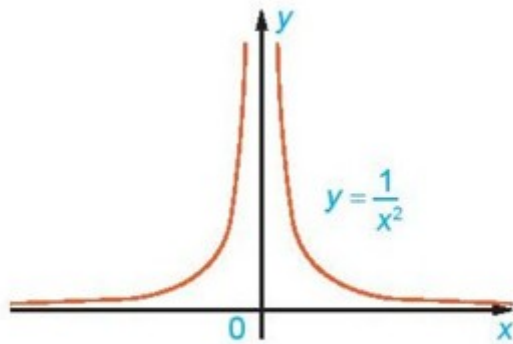
Với (x_n) là dãy số sao cho $x_n > 1, x_n \rightarrow +\infty$.

$$\text{Ta có: } f(x_n) = 1 + \frac{2}{x_n - 1}$$

$$\text{Khi } x_n \rightarrow +\infty \text{ thì } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{x_n - 1} = 0$$

Do đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x_n - 1} \right) = 1$.

Câu 12. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^2}$ có đồ thị như Hình 5.6.



Hình 5.6

Cho $x_n = \frac{1}{n}$, chứng tỏ rằng $f(x_n) \rightarrow +\infty$.

Lời giải

Ta có: $x_n = \frac{1}{n}$, do đó

$$f(x_n) = \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = n^2$$

Vì $n \rightarrow +\infty$ nên $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ và $f(x_n) \rightarrow +\infty$.

Câu 13. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x + 1}$.

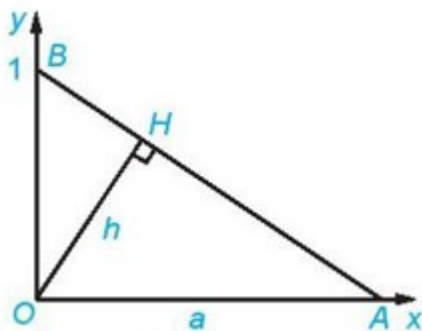
Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}}$$

Ta có

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1}}{1} = 1.$$

Câu 14. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Cho tam giác vuông OAB với $A = (a; 0)$ và $B = (0; 1)$ như Hình 5.5. Đường cao OH có độ dài là h .



Hình 5.5

a) Tính h theo a .

b) Khi điểm A dịch chuyển về O , điểm H thay đổi thế nào? Tại sao?

c) Khi A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương của trục Ox , điểm H thay đổi thế nào? Tại sao?

Lời giải

a) Ta có: $A=(a;0) \Rightarrow OA=a; B=(0;1) \Rightarrow OB=1$

Tam giác OAB vuông tại O có đường cao OH nên ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$

$$\text{Do đó, } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{1^2} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+1}}$$

b) Khi điểm A dịch chuyển về O , ta có $OA=a=0$, suy ra $h=0$, do đó điểm H dịch chuyển về điểm O .

c) Khi A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương của trục Ox , ta có $OA=a \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} h = \lim_{a \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{a^2}{a^2+1}} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 \left(1 + \frac{1}{a^2}\right)}} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{a^2}}} = 1$$

Ta có:

Do đó, điểm H dịch chuyển về điểm B .

Câu 15. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Với các dãy số (x_n) và (x'_n) cho bởi

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}, x'_n = 1 - \frac{1}{n}, \text{ tính } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \text{ và } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n).$$

Lời giải:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

Ta có:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x'_n - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right) - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{-\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty$$

Câu 16. Tính giới hạn

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x^3 + 2x + 5}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - x + 1}}{5x^2 - 1}$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + 2}{x\sqrt{x^3} + 1}$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2}$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x^3 + 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^3 \left(2 + \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x \left(2 + \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right)} = 0$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - x + 1}}{5x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}}}{5 - \frac{1}{x^2}} = 0$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + 2}{x\sqrt{x^3} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + 2}{x\sqrt{x^3}}}{\frac{x\sqrt{x^3} + 1}{x\sqrt{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x\sqrt{x^3}} + \frac{2}{x\sqrt{x^3}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^3}}} = 0$$

c.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}} = 0$$

d.

Câu 17. Tính giới hạn

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3 + 1}{2x^3 + 5}}$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{2x + 1}$

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 + x^4 + x^2 + 1}}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{2x^2 + 1}}{2x + 3\sqrt{x^2 + 1}}$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3 + 1}{2x^3 + 5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{5}{x^3}}} = +\infty$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}}{x \left(2 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x \left(2 + \frac{1}{x} \right)} = -\frac{1}{2}$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 \left(1 - \frac{1}{x^3} \right)}}{\sqrt{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}}}{|x| \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^3}}}{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

c.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 + x^4 + x^2 + 1}}{\sqrt{2x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} \right)}}{\sqrt{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6}}}{|x| \cdot \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = +\infty$$

d.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{2x^2 + 1}}{2x + 3\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - |x|\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{2x + 3|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{-1} = -1 - \sqrt{2}$$

e.

Câu 18. Tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{-2 + 3x - 4x^2}$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3x}}{\sqrt{4x^2 + 1} - x + 3}$$

b.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{-2 + 3x - 4x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 4} = \frac{-1}{2}$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3x}}{\sqrt{4x^2 + 1} - x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{x}\right)} + 3x}{\sqrt{x^2 \cdot \left(4 + \frac{1}{x^2}\right)} - x + 3}$$

b.

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 3x}{|x|\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 3x}{-x\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 3}{-\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} - 1 + \frac{3}{x}} = \frac{-2}{3}$$

Câu 19. Tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 5}{2x^2 + 1}$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^2 + 1}{2 - x}$$

b.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 5}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} = 0$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^2 + 1}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4 + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}} = +\infty$$

b.

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-4 + \frac{1}{x^2}\right) < 0 \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = 0; \quad \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} < 0; \quad \forall x > 2$$

Câu 20. Tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x + 2} + 2x)$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 3} - x)$$

b.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x + 2} + 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - x + 2 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - x + 2} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x}{\sqrt{4x^2 - x + 2} - 2x}$$

a.

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x}{-x \sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x} - 1}{-\sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - 2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 3} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} + 1} = 1$$

b.

Câu 21. Tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x^2 - x + 1)$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + 2x - 1})$$

b.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(-1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right] = -\infty$$

a.

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = -1 < 0$$

b.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + 2x - 1}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x - |x| \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(2 + \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} \right) \right] = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} \right) = 4 > 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Câu 22. Tính giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 + 1}$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

b.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 2$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

b.

Dạng 3. Giới hạn một bên

Câu 23. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -x & \text{nếu } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$

Tính $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Lời giải:

Với dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n < 0$ và $x_n \rightarrow 0$, ta có $f(x_n) = -x_n$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-x_n) = 0$.

Tương tự, với dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n > 0$ và $x_n \rightarrow 0$, ta có $f(x_n) = \sqrt{x_n}$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x_n} = 0$.

Khi đó, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$. Vậy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Câu 24. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{|x|}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt{2-x}}$.

Lời giải

a) Xét hàm số $f(x) = \frac{2}{|x|}$. Lấy dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n \neq 0, x_n \rightarrow 0$.

Do đó, $f(x_n) = \frac{2}{|x_n|} \rightarrow +\infty$. Vậy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{|x|} = +\infty$.

b) Đặt $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$. Với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(-\infty; 2)$ mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 2$, ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2-x_n}} = +\infty$$

Do đó $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt{2-x}} = +\infty$.

Câu 25. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Cho hàm số $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 0 \end{cases}$ (hàm Heaviside, thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t=0$).

Tính $\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t)$ và $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t)$.

Lời giải

Với dãy số (t_n) bất kì sao cho $t_n < 0$ và $t_n \rightarrow 0$, ta có $H(t_n) = 0$.

Do đó $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} H(t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$.

Tương tự, với dãy số (t_n) bất kì sao cho $t_n > 0$ và $t_n \rightarrow 0$, ta có $H(t_n) = 1$.

Do đó $\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} H(t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$.

Câu 26. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Tính các giới hạn một bên:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - x + 1}{4 - x}$

Lời giải

a) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0, x-1 > 0$ với mọi $x > 1$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2) = 1-2 = -1 < 0$.

Do đó, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x-1} = -\infty$.

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 4^-} (4-x) = 0, 4-x > 0$ với mọi $x < 4$ và $\lim_{x \rightarrow 4^-} (x^2 - x + 1) = 4^2 - 4 + 1 = 13 > 0$.

Do đó, $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 - x + 1}{4 - x} = +\infty$.

Câu 27. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Cho hàm số $g(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|x-2|}$.

Tìm $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$.

Lời giải

Ta có:

$$g(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|x-2|} = \frac{(x-2)(x-3)}{|x-2|} = \begin{cases} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} & \text{nếu } x-2 > 0 \\ \frac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)} & \text{nếu } x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-3 & \text{nếu } x > 2 \\ 3-x & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$$

Do đó, $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-3) = 2-3 = -1$;

$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3-x) = 3-2 = 1$.

Câu 28. Tìm giới hạn

a. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1+3x-2x^2}{x-3}$

b. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+1}{x-2}$

d. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+1}{x-2}$

e. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+4}{3-x}$

f. $\lim_{x \rightarrow 3^-} (\sqrt{3-x} + x)$

Lời giải

a. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1+3x-2x^2}{x-3} = -\infty$

b. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{(x-2)(x+2)}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} = +\infty$

- c. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+1}{x-2} = +\infty$
d. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+1}{x-2} = -\infty$
e. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x+4}{3-x} = -\infty$
f. $\lim_{x \rightarrow 3^-} (\sqrt{3-x} + x) = 3$

Câu 29. Tìm giới hạn

- a. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ b. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|3-x|}{3-x}$ c. $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}$

Lời giải

- a. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{(x-2)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{2x-1} = \frac{-1}{3}$
b. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|3-x|}{3-x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3-x}{3-x} = 1$
c. $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x+2|}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+2}{x+2} = 1$

Câu 30. Tìm giới hạn

- a. $\lim_{x \rightarrow 4^-} (4-x) \sqrt{\frac{2x+1}{x^3-64}}$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1) \sqrt{\frac{x^2+1}{x^4+3x+1}}$

Lời giải

- a. $\lim_{x \rightarrow 4^-} (4-x) \sqrt{\frac{2x+1}{x^3-64}} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{\frac{(2x+1)(4-x)^2}{(x-4)(x^2+4x+16)}} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{\frac{(2x+1)(4-x)}{(x^2+4x+16)}} = 0$
b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1) \sqrt{\frac{x^2+1}{x^4+3x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{(x^2+1)(2x-1)^2}{x^4+3x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \left(2-\frac{1}{x}\right)^2}{1+\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}} = 2$

Bài toán chứng minh sự tồn tại của giới hạn tại 1 điểm.

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ thì tổng tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Câu 31. Tìm giới hạn của các hàm số sau:

- a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \\ -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ tại $x=1$.
b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x} & \text{khi } x \geq 0 \\ \cos x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ tại $x=0$
c) $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+3 & \text{khi } x \leq 2 \\ 4x-3 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ tại $x=2$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\frac{x}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

a) Có

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$$

b)

Có

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos 2x}{(1 + \sqrt{\cos 2x}) \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin^2 x}{(1 + \sqrt{\cos 2x}) \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{1 + \sqrt{\cos 2x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\cos x) = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 2x + 3) = 3$$

c) Có

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (4x - 3) = 5$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

Vậy không tồn tại giới hạn của hàm số $f(x)$ tại $x = 2$.

Câu 32. Tìm m để các hàm số có giới hạn tại:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt[3]{1-x} - 1} & \text{khi } x < 0 \\ m + \frac{1}{2} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{tại } x = 0$$

a)

$$f(x) = \begin{cases} x + m & \text{khi } x < 0 \\ \frac{x^2 + 100x + 3}{x + 3} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{tại } x = 0$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x - 2} & \text{khi } x > 2 \\ mx - \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases} \quad \text{tại } x = 2$$

c)

Lời giải

a)

Có

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt[3]{1-x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 (\sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{1-x} + 1)}{(\sqrt{1+x^2} + 1)(-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x (\sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{1-x} + 1)}{\sqrt{1+x^2} + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(m + \frac{1}{2} \right) = m + \frac{1}{2}$$

Để tồn tại giới hạn của $f(x)$ tại $x = 0$ thì $m + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + m) = m$$

b) Có

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 100x + 3}{x + 3} = 1$$

Để tồn tại giới hạn của $f(x)$ tại $x = 0$ thì $m = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+2-8}{(x-2)(\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 2^2)} = \frac{1}{4}$$

c) Có

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(mx + \frac{1}{4} \right) = 2m + \frac{1}{4}$$

Để tồn tại giới hạn của $f(x)$ tại $x=0$ thì $2m + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m=0$

Câu 33. Tìm giá trị của $a; b; c$ để $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}+cx}{x^3-2x^2+x} = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}+cx}{x^3-2x^2+x} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(cx^2-ax-b)}{x(x-1)^2(\sqrt{ax+b}-cx)} = -\frac{1}{2} \quad (*)$$

Để xảy ra (*) thì điều kiện cần là

$$\begin{cases} - (c^2x^2 - ax - b) = k(x-1)^2 \quad (k \neq 0) \\ \sqrt{a.1+b} - c \neq 0 \\ \frac{k}{\sqrt{a.1+b} - c} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 0 \\ a = -2k, b = k \\ \sqrt{a+b} - c \neq 0 \\ \frac{k}{\sqrt{-2k+k} - \sqrt{-k}} = -\frac{1}{2} \quad (\text{PTVN}) \\ \frac{k}{\sqrt{-2k+k} + \sqrt{-k}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow k = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2k = 2 \\ b = k = -1 \\ c = \sqrt{-k} = 1 \end{cases}$$

Thử lại: với $a=2, b=-1, c=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 4. Một vài quy tắc tính giới hạn vô cực

Câu 34. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Tính $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x-2}$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x-2}$.

Lời giải

+) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0, x-2 > 0$ với mọi $x > 2$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-1) = 2.2-1=3 > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x-2} = +\infty$$

+) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) = 0, x-2 < 0$ với mọi $x < 2$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} (2x-1) = 2.2-1=3 > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x-2} = -\infty$$

Câu 35. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{(x-1)(x-2)}$.

Tìm $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{2}{(x-1)(x-2)} = \frac{2}{x-1} \cdot \frac{1}{x-2}$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{2-1} = 2 > 0 \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty \quad \text{do } x-2 > 0 \text{ khi } x > 2).$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2}{(x-1)(x-2)} = +\infty$$

Áp dụng quy tắc tìm giới hạn của tích, ta được

$$+) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{2-1} = 2 > 0 \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \quad \text{do } x-2 < 0 \text{ khi } x < 2).$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2}{(x-1)(x-2)} = -\infty$$

Áp dụng quy tắc tìm giới hạn của tích, ta được

Câu 36. Tính giới hạn

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 2x\sqrt{x} - x + 1)$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4\sqrt{x} + 2x\sqrt[3]{x} - 2)$

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{3x^2 + \frac{2x\sqrt{x}}{5}} - 4$

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^3 - 4x + 3}}$

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x + 1}}{x - \sqrt{x}}$

Lời giải

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 2x\sqrt{x} - x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{2}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = +\infty$

a.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4\sqrt{x} + 2x\sqrt[3]{x} - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4\sqrt{x} \left(1 + \frac{2}{x^3\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{x^4\sqrt{x}} \right) = +\infty$

b.

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{3x^2 + \frac{2x\sqrt{x}}{5}} - 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2 \left(3 + \frac{2}{5\sqrt{x}} - \frac{4}{x^2} \right)} = +\infty$

c.

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^3 - 4x + 3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^3 \left(1 - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right)}} = 0$

d.

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x + 1}}{x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}}{x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} - \frac{\sqrt{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)} = -\sqrt{2}$

e.

Câu 37. Tìm giới hạn

a. $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{x(x-1)}{(2x+3)^2}$

b. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x\sqrt{5x+2}}{(x-4)^2(x+11)}$

a.

b.

c. $\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{x-1}{(x+1)(2x^2-x-3)} \right]$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4} \right)$

c.

d.

e. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{x^2-3x+4}$

Lời giải

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} x(x-1) = \frac{15}{4} \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{1}{(2x+3)^2} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{x(x-1)}{(2x+3)^2} = +\infty$$

a.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x\sqrt{5x+2}}{x+11} = \frac{4\sqrt{22}}{15} \\ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x-4)^2} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x\sqrt{5x+2}}{(x-4)^2(x+11)} = +\infty$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{x-1}{(x+1)(2x^2-x-3)} \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{x-1}{(x+1)^2(2x-3)} \right] = +\infty$$

c.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^4} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} (x^3 + x^2 + 2) = +\infty$$

d.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{x^2-3x+4} = \frac{-2+1}{1+3+4} = \frac{-1}{8}$$

e.

Câu 38. Tìm giới hạn

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2+5}{6x^2-3x+2}}$

b. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4-16}{x^2+6x+8}$

c. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4-27x}{2x^2-3x-9}$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2+5}{6x^2-3x+2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{1+\frac{5}{x^2}}{6-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{6}}$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4-16}{x^2+6x+8} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{(x+2)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x^2+4)}{x+4} = -16$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4-27x}{2x^2-3x-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x^3-27)}{(x-3)(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x^2+3x+9)}{2x+3} = 9$$

c.

Câu 39. Tìm giới hạn

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3-5x-6}{1-4x^3+x^2}$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x^2+8)(2x+1)}{5-4x^3}$

a.

b.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 - 5x - 6}{1 - 4x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3}}{\frac{1}{x^2} - 4 + \frac{1}{x}} = \frac{-3}{4}$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x^2 + 8)(2x + 1)}{5 - 4x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3 + \frac{8}{x^2})(2 + \frac{1}{x})}{\frac{5}{x^3} - 4} = \frac{6}{-4} = \frac{-3}{2}$$

b.

Câu 40. Tìm giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x + 7}{3 - 2x}$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{2x - 1}$$

b.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x + 7}{3 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5 + \frac{7}{x}}{\frac{3}{x} - 2} = \frac{5}{2}$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{7}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{0}{2} = 0$$

b.

Câu 41. Tìm giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^4 - x + 7}{1 + 5x^5} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 3x - 6}{2x + 3}$$

a.

b.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^4 - x + 7}{1 + 5x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-2}{x} - \frac{1}{x^4} + \frac{7}{x^5}}{\frac{1}{x^5} + 5} = \frac{0}{5} = 0$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 3x - 6}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{3}{x} - \frac{6}{x^2}}{\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = \frac{4}{0} = -\infty$$

b.

Câu 42. Tìm giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + 1}{3x^2 + 2x + 7}$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2x^2 + 8}{5x^2 + 4}$$

b.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}+1}{3x^2+2x+7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{2}{x} + \frac{7}{x^3}} = \frac{0}{3} = 0$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2x^2+8}{5x^2+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - 2 + \frac{8}{x^2}}{5 + \frac{4}{x^2}} = \frac{-2}{5}$$

b.

Câu 43. Tìm giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-5}{4-x} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3+x-2x^3}{3-2x+5x^3}$$

a.

b.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-5}{4-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{5}{x^2}}{\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}} = \frac{3}{0} = +\infty$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3+x-2x^3}{3-2x+5x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^2} - 2}{\frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2} + 5} = \frac{-2}{5}$$

b.

Câu 44. Tìm giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2-3x+5x^2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (7x^4-4x+2)$$

a.

b.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2-3x+5x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} + 5 \right) = +\infty$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (7x^4-4x+2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(7 - \frac{4}{x^3} + \frac{2}{x^4} \right) = +\infty$$

b.

Câu 45. Tìm giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4+5x}{(-x-2)^2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+4x-5}{x+3}$$

a.

b.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-8x^3-x^2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^5-x+2)$$

c.

d.

Giải

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4+5x}{(-x-2)^2} = \frac{4+5 \cdot (-2)}{(2-2)^2} = \frac{-6}{0} = -\infty$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2+4x-5}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} = \frac{3}{0} = -\infty$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-8x^3-x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\frac{1}{x^3} - 8 - \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

c.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^5-x+2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \left(6 - \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^5} \right) = -\infty$$

d.

Dạng 5. Giới hạn vô định

Câu 46. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+9} - 3}{x^2}$

Lời giải

Do mẫu thức có giới hạn là 0 khi $x \rightarrow 0$ nên ta không thể áp dụng ngay quy tắc tính giới hạn của thương hai hàm số đối với cả hai câu *a* và *b*.

a) Ta có: $\frac{(x+2)^2 - 4}{x} = \frac{[(x+2)-2] \cdot [(x+2)+2]}{x} = \frac{x(x+4)}{x} = x+4$

Do đó $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+4) = 0+4=4$

b) Ta có: $\frac{\sqrt{x^2+9} - 3}{x^2} = \frac{(\sqrt{x^2+9})^2 - 3^2}{x^2(\sqrt{x^2+9} + 3)} = \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+9} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+9} + 3}$

Do đó $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+9} - 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+9} + 3} = \frac{1}{6}$

Câu 47. (SGK-KNTT 11-Tập 1) Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x}{\sqrt{x^2+1}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+2} - x)$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}-2\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}-2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{-2}{\sqrt{1}} = -2$$

a)

$$\sqrt{x^2+x+2} - x = \frac{(\sqrt{x^2+x+2})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+x+2} + x} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2} + x}$$

b) Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x+2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+2} + x}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Câu 48. Tìm các giới hạn sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} & \text{b. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} & \text{c. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1} \\ \text{d. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6} & \text{e. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1} \end{array}$$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+3} = \frac{1}{5}$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-3)} = -\frac{2}{5}$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{5}{3}$$

c.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 5x + 1)}{(x-2)(x^2 + 2x + 3)} = \frac{15}{11}$$

d.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1 + x^2 - 1 + \dots + x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^{n-1}}}_{n \text{ số } 1} = n + n - 1 + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

e.

Câu 49. Tìm các giới hạn sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x-2} & \text{b. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3} & \text{c. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1} \end{array}$$

a.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5 - 9}{(\sqrt{x^2 + 5} + 3)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} = \frac{2}{3}$$

a.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x + 2}}{\sqrt{4x + 1} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 1)(x - 2)(\sqrt{4x + 1} + 3)}{(\sqrt{x + 2} + x)4(x - 2)} = \frac{9}{8}$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1 + x} + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 + x} + 1 = 2$$

c.

Câu 50. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1 - x}}{3x}$

b. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x - 1)^2}$

d. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$

Lời giải

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1 - x}}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - x)}{3x(1 + \sqrt[3]{1 - x} + \sqrt[3]{(1 - x)^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1 + \sqrt[3]{1 - x} + \sqrt[3]{(1 - x)^2})} = \frac{1}{9}$

b. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)}{(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2 + 3} + 2)}{(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1)(x - 1)} = -\frac{2}{3}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)^2}{(\sqrt[3]{x^3} - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)^2} = \frac{1}{9}$

d.

Câu 51. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x + 4} - \sqrt[3]{8 + 5x}}{x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x + 11} - \sqrt{x + 7}}{x^2 - 3x + 2}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 4x} - \sqrt[3]{1 + 6x}}{x^2}$

Lời giải

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - 1 + 1 - \sqrt{1 - x}}{x} = \frac{5}{6}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x + 4} - \sqrt[3]{8 + 5x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x + 4} - 2 + 2 - \sqrt[3]{8 + 5x}}{x} = \frac{1}{3}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x + 11} - \sqrt{x + 7}}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x + 11} - 3 + 3 - \sqrt{x + 7}}{(x - 1)(x - 2)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{8}{(x - 1)(\sqrt[3]{(8x + 11)^2} + 3\sqrt[3]{8x + 11} + 9)} - \frac{1}{(x - 1)(3 + \sqrt{x + 7})} \right] = \frac{8}{27} - \frac{1}{6} = \frac{7}{54}$$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 4x} - \sqrt[3]{1 + 6x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 4x} - (2x + 1) + (2x + 1) - \sqrt[3]{1 + 6x}}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-4}{(\sqrt{1+4x} + (2x+1))} + \frac{8x+12}{((2x+1)^2 + (2x+1)\sqrt{1+6x} + \sqrt{(1+6x)^2})} \right] = \frac{-4}{2} + \frac{12}{3} = 2.$$

Câu 52. Tìm giới hạn

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - x + 1}$ b. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$ c. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2}$

Lời giải

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$

b. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \pm\infty$

c. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{x - 3 + \frac{2}{x^2}} = 0$

Câu 53. Tìm giới hạn

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 - x^4 + 1} + \sqrt{x^6 + 1}}{2x - 1}$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + 1}{x^2 + x + 1}$
c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x}{\sqrt{9x^2 + 1} - x + 2}$ d. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 4x + 1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2 - x}$

Lời giải

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 - x^4 + 1} + \sqrt{x^6 + 1}}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^6}} + |x^3| \sqrt{1 + \frac{1}{x^6}}}{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)}$

a. $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^6}} - x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^6}}}{\left(2 - \frac{1}{x} \right)} = -\infty$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x} + 1}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0$

c.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x} - 1 - \sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{-\sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} - 1 + \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x}{\sqrt{9x^2 + 1} - x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x}} + x \left(\frac{2}{x} - 1 \right)}{|x| \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} + x \left(-1 + \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{2}{x}} + x \left(\frac{2}{x} - 1 \right)}{-x \sqrt{9 + \frac{1}{x^2}} + x \left(-1 + \frac{2}{x} \right)}$$

d. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 4x + 1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2 - x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 4x + 1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 4 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x} - 1} = 5$$

+

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 4x + 1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 4 + \frac{1}{x^2}}{-\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x} - 1} = -1$$

+

Câu 54. Tìm giới hạn

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)\sqrt{x^2 + x\sqrt{x} + 1}}{\sqrt{x^2 + 1} + 2x}$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)(2x-1)(3x-1)(4x-1)(5x-1)}{(4x+5)^5}$

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)\sqrt{x^2 + x\sqrt{x} + 1}}{\sqrt{x^2 + 1} + 2x}$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\sqrt[3]{x^3 + 1} - x)$

Lời giải

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)\sqrt{x^2 + x\sqrt{x} + 1}}{\sqrt{x^2 + 1} + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)|x| \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}}}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1) \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 2} = +\infty$

a.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)(2x-1)(3x-1)(4x-1)(5x-1)}{(4x+5)^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(2 - \frac{1}{x}\right) \left(3 - \frac{1}{x}\right) \left(4 - \frac{1}{x}\right) \left(5 - \frac{1}{x}\right)}{\left(4 + \frac{5}{x}\right)^5} = \frac{15}{128}$

b.

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)\sqrt{x^2 + x\sqrt{x} + 1}}{\sqrt{x^2 + 1} + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)|x| \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}}}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(x-1) \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 2} = +\infty$

c.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 (\sqrt[3]{x^3+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 (\sqrt[3]{x^3+1} - x) \left((\sqrt[3]{x^3+1})^2 + x(\sqrt[3]{x^3+1} - x) + x^2 \right)}{\left((\sqrt[3]{x^3+1})^2 + x(\sqrt[3]{x^3+1} - x) + x^2 \right)}$$

d.

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\left((\sqrt[3]{x^3+1})^2 + x(\sqrt[3]{x^3+1} - x) + x^2 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} \right)^2 + \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} + 1} = \frac{1}{3}$$

Câu 55. Tìm giới hạn

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x|^3 - |x| + 1}{4|x^3| + x^2 + 1}$ b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x\sqrt{x^2+3}+1|}{|x^2-1|+x}$

Lời giải

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x|^3 - |x| + 1}{4|x^3| + x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8 - \frac{1}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^3}}{4 + \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|x|^3}} = 2$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x\sqrt{x^2+3}+1|}{|x^2-1|+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x||x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1|}{|x^2-1|+x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left| \frac{x}{|x|} \sqrt{1+\frac{3}{x^2}} + \frac{1}{x^2} \right|}{\left| 1 - \frac{1}{x^2} \right| + \frac{1}{x}} = 1$

Dạng 6. Giới hạn của hàm lượng giác

Câu 56. Tìm giới hạn

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x}$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin \frac{x}{2}}$

Lời giải

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\frac{2x}{2}} \cdot \frac{2x}{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\frac{2x}{2}} \cdot 4 = 4$

Câu 57. Tìm giới hạn

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x^2}$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x^2}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 5x}$ d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \cos x - \cos 2x - \cos 3x}{1 - \cos x}$

Lời giải

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 = 4$

$$b. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 25 \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos 2 \cdot \frac{3x}{2}}{2}}{\frac{1 - \cos 2 \cdot \frac{5x}{2}}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{3x}{2}}{\sin^2 \frac{5x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 \frac{3x}{2} \left(\frac{5x}{2} \right)^2}{\left(\frac{3x}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{5x}{2}} \cdot \frac{9}{25} \right) = \frac{9}{25}$$

c.

$$d. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \cos x - \cos 2x - \cos 3x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos x} + \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos x} \right)$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{3x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot 4 \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 \frac{3x}{2}}{\left(\frac{3x}{2} \right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot 9 \right)$$

$$= 1 + 4 + 9 = 14$$

Câu 58. Tìm giới hạn

$$a. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{1 - 2\cos x}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} - \cos x}{\sin^2 x}$$

Lời giải

$$a. \text{Đặt } t = x - \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)}{1 - 2\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{1 - 2\cos \left(t + \frac{\pi}{3} \right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{2 \sin^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6} \right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{t}{2 \sin^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6} \right)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin^2 x - \cos^2 x}{(\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x) \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{(\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x) \sin^2 x}$$

b.

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(\sqrt{1 + \sin^2 x} + \cos x)} = 1$$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>