Ứng dụng của định lý CAYLEY-HAMILTON CHO MA TRẬN VUÔNG CẤP 2

ThS. Nguyễn Hữu Học

Phòng Khoa Học - Đại Học Đông Á

TÓM TẮT

Đây là định lý cơ bản của đại số tuyến tính. Ở đây ta sẽ xem xét ứng dụng của nó trong việc tính toán lũy thừa và tìm ma trận nghịch đảo của ma trận vuông cấp 2.

Từ khóa: định lý Cayley-Hamilton, ma trận.

ABSTRACT

This is the basic theorem of linear algebra. In this paper, we will consider about its applications in calculating the power and finding the inverse matrix of quare matrix level 2.

Keyword: Cayley-Hamilton theorem, matrix.

Trong bài viết này ta ký hiệu E, O lần lượt là ma trận đơn vị, ma trận không cùng cấp với ma trận tham gia trong biểu thức.

1. Định lý Cayley-Hamilton

1.1. Định lý

Cho T là ma trận vuông cấp n. Đa thức đặc trưng của T bậc n là định thức:

$$\phi_T(\lambda) = |\lambda E - T| \text{ (E là ma trận đơn vị cấp n)}$$

Khi đó ta có: $\phi_T(T) = O$ *(O là ma trận không cấp n)* (1)

Chứng minh định lý trên có thể tham khảo tại các giáo trình Đại số tuyến tính hoặc tại blog của GS Ngô Bảo Châu *http://ngobaochau.wordpress.com/tag/hamilton/*

Khi T là ma trận vuông cấp 2 ta thu được kết quả sau:

1.2. Mệnh đề

Cho $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. *Khi đó ta có:*

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O \qquad (2)$$

Chứng minh:

Theo định lý Cayley-Hamilton ta có:

$$\phi_A(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & \lambda - b \\ \lambda - c & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - (\lambda - b)(\lambda - c)$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

Thay λ bởi A, 1 bởi E ta thu được (2).

2. Ứng dụng của định lý Cayley-Hamilton

2.1. Tính lũy thừa của ma trận vuông

Từ $(2) \Rightarrow A^2 = (a+d)A - (ad-bc)E \quad (*)$

Từ đó ta thu được:

$$A^3 = A.A^2 = A\left[(a+d)A - (ad-bc)E\right] = (a+d)A^2 - (ad-bc)A$$

$$A^4 = A.A^3 = A\left[(a+d)A^2 - (ad-bc)A\right] = (a+d)A^3 - (ad-bc)A^2$$

Từ đây, phép tính lũy thừa bậc n của ma trận được đưa về tính lũy thừa bậc (n-1) và chuyển dần về phép nhân 1 số với ma trận và đương nhiên, quá trình tính toán được đơn giản đi nhiều.

Ví dụ 1:

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Tính A^2, A^3 .

Giải:

Áp dụng công thức (*), ta được:

$$A^2 = 5A - 6E = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -5 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = 5A^2 - 6A = 5\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ -5 & 14 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 38 \\ -19 & 46 \end{pmatrix}$$

Từ nhận xét ở trên ta có thể nghĩ đến việc tính $A^n (n = 1,2,3,...)$. Khi gặp loại toán này, phương pháp quen thuộc mà ta nghĩ đến chính là phương pháp quy nạp toán học từng được dùng để tính số hạng tổng quát của dãy số hay tính đạo hàm cấp n của một hàm số. Nội dung của phương pháp này là tính một số số hạng ban đầu, dự đoán số hạng tổng quát và chứng minh dự đoán bằng quy nạp toán học.

Ví dụ 2:

Cho $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. *Tính* A^n

Giải:

Áp dụng công thức (*), ta được:

$$A^2 = (a+b)A - abE = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = (a+b)A^2 - abA = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix} \quad (**)$$

Ta có: $\Rightarrow A^{n+1} = A^n.A = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 \\ 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}$

Vậy (**) đúng với mọi $n = 1, 2, 3,...$

Trong ví dụ 2, A là ma trận đặc biệt, ta dễ dàng đoán được A^n, tuy nhiên, khi A là ma trận bất kỳ, như trong ví dụ 1, ta rất khó tìm ra quy luật để dự đoán A^n, đây cũng là hạn chế của phương pháp này. Bây giờ ta sẽ suy nghĩ phương pháp sử dụng định lý Cayley-Hamilton để giải quyết bài toán này!

Trước hết, ta thấy rằng đa thức đặc trưng của A là đa thức bậc hai, vì vậy có thể phân tích (2) thành dạng: $(A - \alpha E)(A - \beta E) = 0$ (tất nhiên có cả trường hợp $\alpha, \beta \in C$ tuy nhiên trong phạm vi bài này ta tạm thời giới hạn $\alpha, \beta \in R$).

2.1.1. Trường hợp $\alpha \neq \beta$

Khi đó từ $(A-\alpha E)(A-\beta E) = 0 \Rightarrow (A-\alpha E)A = (A-\alpha E)\beta$

Từ đó bằng quy nạp toán học ta dễ dàng chứng minh được:

$$(A-\alpha E)A^n = (A-\alpha E)\beta^n \qquad (i)$$

Hoàn toàn tương tự, ta có: $(A-\beta E)A^n = (A-\beta E)\alpha^n$ $\qquad (ii)$

$$(ii)\text{-}(i): (\alpha-\beta)A^n = (\alpha^n-\beta^n)A - (\alpha^n\beta - \alpha\beta^n)E$$

$$\Rightarrow A^n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}A - \frac{\alpha\beta(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})}{\alpha-\beta}E \qquad (3)$$

Ví dụ 3:

Cho $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Tính:* A^n.

Giải:

Theo định lý Cayley-Hamilton ta có: $A^2 - 5A + 6E = 0 \Rightarrow (A-2E)(A-3E) = 0$

Ta có: $(A-2E)(A-3E) = 0 \Rightarrow A(A-2E) = 3(A-2E)$

Bằng quy nạp toán học ta dễ dàng chứng minh được:

$$A^n(A-2E) = 3^n(A-2E) \Rightarrow A^{n+1} - 2A^n = 3^n(A-2E) \qquad (iii)$$

Mặt khác: $(A-2E)(A-3E) = 0 \Rightarrow A(A-3E) = 2(A-3E)$

Lập luận tương tự ta thu được:

$$A^n(A-3E) = 2^n(A-3E) \Rightarrow A^{n+1} - 3A^n = 2^n(A-3E) \qquad (iv)$$

$$(iii)\text{-}(iv): A^n = (3^n-2^n)A - (2.3^n - 3.2^n)E = \begin{pmatrix} 2.3^n - 2^n & -2(3^n-2^n) \\ 3^n - 2^n & -3^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

2.1.2. Trường hợp $\alpha = \beta$

Khi đó (2) trở thành: $(A-\alpha E)^2 = O$

Đặt: $A - \alpha E = B \Rightarrow A = \alpha E + B$ với $B^2 = O$.

Áp dụng khai triển nhị thức Newton:

$$A^n = (\alpha E)^n + C_n^1(\alpha E)^{n-1}B + C_n^2(\alpha E)^{n-2}B^2 + \cdots + B^n$$

Do $\quad B^2 = O \Rightarrow A^n = \alpha^n E + n\alpha^{n-1}EB = \alpha^n E + n\alpha^{n-1}(A-\alpha E)$

$$\Rightarrow A^n = n\alpha^{n-1}A - (n-1)\alpha^n E \qquad (4)$$

Trong (3) cho $\beta \to \alpha$ ta cũng sẽ thu được (4)!

Ví dụ 4:

Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Tính* A^n

Giải:

Theo định lý Cayley-Hamilton: $A^2 - 4A + 4E = O \Rightarrow (A - 2E)^2 = O$

Áp dụng (4) với $\alpha = 2$ ta được:

$$A^n = n.2^{n-1}A - (n-1).2^n E = \begin{pmatrix} (n+2)2^{n-1} & -n.2^{n-1} \\ n.2^{n-1} & -(n-2)2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Trong phương pháp trên, ta sử dụng phân tích biểu thức thành nhân tử. Nếu nhìn theo khía cạnh đa thức, đa thức đặc trưng của ma trận A:

$\phi(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$. Gọi α, β là hai nghiệm của $\phi(\lambda)$.

- Trường hợp $\alpha \neq \beta$

Theo định lý về phép chia đa thức, tồn tại đa thức $Q(\lambda)$ và các số p, q sao cho:

$$\lambda^n = \left[\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)\right]Q(\lambda) + p\lambda + q$$

Lần lượt thay $\lambda = \alpha, \lambda = \beta$ vào biểu thức trên ta thu được:

$$\begin{cases} \alpha p + q = \alpha^n \\ \beta p + q = \beta^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ q = -\dfrac{\alpha\beta(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\alpha - \beta} \end{cases}$$

Từ đó ta thu được công thức (3):

$$\Rightarrow A^n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}A - \frac{\alpha\beta(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\alpha - \beta}E$$

- Trường hợp $\alpha = \beta$

Khi đó ta có: $\lambda^n = (\lambda - \alpha)^2 Q(\lambda) + p\lambda + q$

Đạo hàm hai vế theo λ ta được:

$$n\lambda^{n-1} = 2(\lambda - \alpha)Q(\lambda) + (\lambda - \alpha)^2 Q'(\lambda) + p$$

Lần lượt thay $\lambda = \alpha$ vào hai biểu thức trên ta có:

$$\begin{cases} \alpha^n = \alpha p + q \\ n\alpha^{n-1} = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = n\alpha^{n-1} \\ q = -(n-1)\alpha^n \end{cases}$$

Từ đó ta thu được công thức (4):

$$\Rightarrow A^n = n\alpha^{n-1}A - (n-1)\alpha^n E$$

Đối với trường hợp đa thức đặc trưng có nghiệm phức, ta thử xét ví dụ cụ thể sau đây:

Ví dụ 5:

Cho $A = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Tính* A^n

Giải:

Theo định lý Cayley-Hamilton ta có: $A^2 + A + E = 0$

Từ đó: $A^2 = -A - E = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

$$A^3 = -A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Do đó:

$$A^{3m} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (m = 1,2,3,...)$$

$$A^{3m+1} = A = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} (m = 0,1,2,...)$$

$$A^{3m+2} = A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} (m = 0,1,2,...)$$

Trong trường hợp này các nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}i$$

$$\beta = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3}i$$

Áp dụng công thức Moivre và sử dụng công thức (3) ta cũng thu được:

$$\alpha^{3m} = \beta^{3m} = 1 \Rightarrow A^{3m} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (m = 1,2,3,...)$$

$$\begin{cases} \alpha^{3m+1} = \alpha \\ \beta^{3m+1} = \beta \end{cases} \Rightarrow A^{3m+1} = A = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} (m = 0,1,2,...)$$

$$\begin{cases} \alpha^{3m+2} = \alpha^2 \\ \beta^{3m+2} = \beta^2 \end{cases} \Rightarrow A^{3m+2} = (\alpha + \beta)A - \alpha\beta E = -A - E = A^2$$

$$\Rightarrow A^{3m+2} = A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} (m = 0,1,2,...)$$

Sử dụng những kết quả thu được ở trên, ta dễ dàng kiểm tra lại lũy thừa bậc n của các ma trận đặc biệt:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix} \quad \text{(ví dụ 2)}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1}b & a^n \end{pmatrix}$$

2.2. Tìm ma trận nghịch đảo

Đối với ma trận vuông cấp 2, việc tìm ma trận nghịch đảo khá đơn giản. Ở đây, ta thử xét một ví dụ sử dụng định lý Cayley-Hamilton để tìm ma trận nghịch đảo.

Ví dụ 6:

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. *Tìm ma trận nghịch đảo* A^{-1}

Giải:

Áp dụng định lý Cayley-Hamilton ta có:

$A^2 - 4A - 5E = O$

Nhân hai vế đẳng thức trên với A^{-1}:

$$A - 4E - 5A^{-1} = O$$

$$\Rightarrow 5A^{-1} = A - 4E = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

Kết luận

Bài toán về lũy thừa của ma trận vuông cấp 2 có nhiều cách giải khác nhau, chẳng hạn ngoài cách sử dụng phương pháp quy nạp như đã nêu trong bài ta có thể sử dụng phương pháp chéo hóa ma trận... Trong nhiều giáo trình Đại số tuyến tính không giới thiệu định lý này, nên bài viết này nhằm giới thiệu một số ứng dụng của định lý Cayley-Hamilton trong việc tính toán với các ma trận vuông cấp 2. Kết hợp với các kiến thức Toán sơ cấp sẽ cho ta nhiều lời giải ngắn gọn và thú vị. Đối với các ma trận vuông cấp cao hơn dĩ nhiên việc tính toán cũng phức tạp hơn, vấn đề này tôi xin đề cập trong một bài viết khác■

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. http://en.wikipedia.org/wiki/Cayley%E2%80%93Hamilton_theorem
2. http://ngobaochau.wordpress.com/tag/hamilton/