

1. Mở đầu

1.1. Lí do chọn đề tài

Luật giáo dục có viết: “Phương pháp giáo dục phổ thông cần phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động sáng tạo của học sinh, phù hợp với đặc điểm của từng lớp học, môn học, bồi dưỡng phương pháp tự học, rèn luyện kỹ năng vận dụng kiến thức, tác động đến tình cảm, đem lại niềm vui, hứng thú học tập cho học sinh”.

Toán học là một môn học đòi hỏi tư duy và logic, phải biết vận dụng và kết hợp nhiều kiến thức lại với nhau. Do đó, việc phân dạng và hình thành phương pháp giải từng dạng toán là biện pháp mang lại hiệu quả cao trong giảng dạy, đặc biệt với đối tượng học sinh có học lực trung bình, yếu.

Trong quá trình giảng dạy tôi thấy học sinh còn gặp nhiều lúng túng trong việc giải quyết một số bài toán tìm giới hạn của hàm số, mặc dù đây là bài toán được đánh giá là tương đối dễ, có thể có rất nhiều nguyên nhân dẫn đến tình trạng nói trên, nhưng theo tôi, nguyên nhân chủ yếu là học sinh chưa biết nhận dạng và lựa chọn các phương pháp phù hợp để tìm giới hạn của hàm số.

Phần giới hạn của hàm số sẽ có trong nội dung của đề thi THPT Quốc gia năm 2018, vì vậy việc tìm ra giải pháp giúp học sinh (đặc biệt là học sinh có học lực trung bình hoặc yếu) có thể đạt điểm ở phần này là một việc thực sự cần thiết.

Từ những lí do trên tôi chọn đề tài: “ Một số giải pháp giúp học sinh trường THPT Thường Xuân 2 giải thành thạo bài toán tìm giới hạn của hàm số”.

1.2. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu nội dung các tính chất của giới hạn hàm số để tìm ra phương pháp cho từng dạng tìm giới hạn hàm số, giúp học sinh tiếp thu dễ dàng. Từ đó nâng cao chất lượng học tập của học sinh trong các tiết học.

1.3. Đối tượng nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu mà đề tài hướng tới là:

- Các dạng toán và phương pháp tìm giới hạn hàm số. Khám phá, phân tích lời giải chi tiết từ đó học sinh hoàn thiện kiến thức và nắm bắt bài toán một cách thấu đáo và có chiều sâu.

- Nghiên cứu ứng dụng của máy tính cầm tay trong kiểm tra kết quả các bài toán tìm giới hạn hoặc giải nhanh tập trắc nghiệm.

1.4. Phương pháp nghiên cứu

- + Phương pháp nghiên cứu lý luận: nghiên cứu tài liệu, sách tham khảo liên quan đến giới hạn hàm số, nghiên cứu chương trình giáo khoa của bộ môn.

- + Phương pháp nghiên cứu thực tế: thông qua việc dạy và học giúp học sinh nhận dạng và biết cách giải bài toán tìm giới hạn hàm số.

- + Phương pháp kiểm chứng sự phạm: tiến hành dạy và kiểm tra khả năng ứng dụng của học sinh nhằm minh chứng cho hiệu quả của việc sử dụng các giải pháp.

2. Nội dung sáng kiến kinh nghiệm

2.1. Cơ sở lý luận của sáng kiến kinh nghiệm

Với xu thế đổi mới phương pháp giáo dục hiện nay của Bộ giáo dục và đào tạo, trong quá trình dạy học đề thu được hiệu quả cao đòi hỏi người thầy phải nghiên cứu tìm hiểu kỹ chương trình, đối tượng học sinh; đưa ra các phương pháp phù hợp với kiến thức, với các đối tượng học sinh cần truyền thụ.

Các bài toán giới hạn là phần kiến thức rất đa dạng, phong phú. Để học tốt được phần này học sinh phải nắm chắc các kiến thức cơ bản. Học sinh phải thường xuyên làm bài tập để học hỏi, trau dồi phương pháp, kỹ năng khi biến đổi. Kiến thức, bài tập ở phần này tương đối dễ với đối tượng học sinh khá, giỏi, nhưng đối với học sinh trung bình, yếu thì khá khó khăn trong việc phân biệt các dạng toán và vận dụng phương pháp phù hợp.

Do đó tôi luôn có ý định tìm ra một phương pháp mới, để truyền dạy cho học sinh, một phương pháp học đơn giản, một phương pháp mà học sinh cảm thấy hứng thú khi học.

2.2. Thực trạng của vấn đề nghiên cứu trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm

Trường THPT Thường Xuân 2 đóng trên địa bàn miền núi, với đa số học sinh là con em dân tộc Thái, Mường, còn nhiều hạn chế trong việc tiếp thu kiến thức, đặc biệt là kiến thức của các môn đòi hỏi tư duy trừu tượng như môn Toán. Đại đa số các em đều có học lực môn Toán là trung bình, yếu. Với đặc điểm như trên, để cải thiện chất lượng môn Toán cho đối tượng học sinh đại trà, chúng tôi thường tập trung vào giúp các em nắm vững và giải thành thạo các bài toán ở phần kiến thức được đánh giá là dễ học, dễ tiếp thu và giới hạn hàm số là một trong số kiến thức cần cung cấp cho các em.

Lượng kiến thức về phần giới hạn hàm số trình bày trong sách giáo khoa Đại số & Giải tích 11 tương đối nhiều, đa dạng; bài tập phong phú tuy nhiên rất ít bài có thể áp dụng trực tiếp các tính chất, mà thường phải thông qua vài bước biến đổi. Điều này thực sự là khó khăn đối với những học sinh có học lực trung bình, yếu.

Qua thực tế giảng dạy trực tiếp các lớp khối, tôi thấy rằng khi ra những bài tập dạng này học sinh thường lúng túng trong quá trình biến đổi và áp dụng các tính chất. Cụ thể năm học 2015-2016 khi chưa áp dụng sáng kiến vào giảng dạy. Tôi cho học sinh lớp 11B5 làm bài khảo sát, kết quả như sau:

Lớp	Số HS	Giỏi		Khá		TB		Yếu	
		SL	TL(%)	SL	TL(%)	SL	TL(%)	SL	TL(%)
11B5	45	4	8.9	15	33.3	14	31.1	12	26.7

Xuất phát từ thực tế đó, trong năm học 2016-2017 tôi đã tiến hành đổi mới cách dạy nội dung này tại lớp 11B2 (có chất lượng tương đương với lớp 11B5 trong năm học trước).

2.3. Các giải pháp đã sử dụng để giải quyết vấn đề

2.3.1. Hệ thống các kiến thức cơ bản của giới hạn hàm số:

a. Giới hạn tại một điểm:

a1. Giới hạn đặc biệt:

$$+) \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0;$$

$$+) \lim_{x \rightarrow x_0} c = c \quad (c: \text{hằng số})$$

a2. Định lí:

$$+) \text{ Nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M \quad \text{thì:}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad (\text{nếu } M \neq 0)$$

$$+) \text{ Nếu } f(x) \geq 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \text{thì } L \geq 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

$$+) \text{ Nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \text{thì } \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L|$$

b. Giới hạn một bên:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

c. Giới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực:

c1. Giới hạn đặc biệt:

$$+) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$$

$$+) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$$

$$+) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

c2. Định lí:

$$\text{Nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \neq 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \text{ thì:}$$

$$+) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } L > 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ dương} \\ -\infty & \text{nếu } L < 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ dương} \\ -\infty & \text{nếu } L > 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ âm} \\ +\infty & \text{nếu } L < 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \text{ âm} \end{cases}$$

$$+) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty \\ +\infty & \text{nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ và } f(x) > 0 \\ -\infty & \text{nếu } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ và } f(x) < 0 \end{cases}$$

2.3.2. Phân dạng và phương pháp tìm giới hạn hàm số:

Đối với các bài toán tìm giới hạn ta có thể chia thành hai loại tổng quát:

Loại 1: Các dạng giới hạn cơ bản. Để giải các bài tập loại này ta chỉ cần áp dụng trực tiếp các định lý về giới hạn tổng, hiệu, tích thương và căn của các hàm số hoặc quy tắc về tìm giới hạn vô cực, các tính chất đã học.

Loại 2: Các dạng vô định gồm: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$. Để giải được các bài tập loại này cần có phương pháp biến đổi để đưa về bài toán loại 1.

a. Dạng cơ bản:

Dạng 1: $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u(x_0)$

Dấu hiệu: $u(x)$ xác định tại $x = x_0$ (tức là tồn tại $u(x_0)$)

Phương pháp:

Thay x_0 trực tiếp vào biểu thức $u(x)$, nếu giá trị $u(x_0)$ tồn tại thì ta kết luận:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u(x_0)$$

Ví dụ 1. Tìm các giới hạn sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} (2x + 3) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x^2 + 5} - 1) & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 4x - 5}{2x^2 - 1} \end{array}$$

(Ví dụ 3- tr155, Sách BTĐS> 11)

Hướng dẫn:

a) Nhận thấy với $f(x) = 2x + 3$ thì ta xác định được $f(3) = 9$ nên:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$$

b) Nhận thấy với $f(x) = \sqrt{x^2 + 5} - 1$ thì ta xác định được $f(-2) = 2$ nên:

$$\lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x^2 + 5} - 1) = \sqrt{(-2)^2 + 5} - 1 = 2$$

c) Tương tự ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 4x - 5}{2x^2 - 1} = \frac{3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 5}{2 \cdot 1^2 - 1} = 2$

Bài tập vận dụng:

Tìm các giới hạn sau:

$$\begin{array}{ll} 1) \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x + 1) & 2) \lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \\ 3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x + 2} & 4) \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) \end{array}$$

Dạng 2: Dạng $\left(\frac{L}{0}\right)$

Dấu hiệu: Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$ với $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = L \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = 0$

Phương pháp:

Bước 1: Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = L$, với $L \neq 0$

Bước 2: Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = 0$ và xét dấu biểu thức $v(x)$ với $x \neq x_0$

Bước 3: Dựa vào bảng xét dấu sau để kết luận $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$
$L > 0$	$v(x) > 0$	$+\infty$
$L > 0$	$v(x) < 0$	$-\infty$
$L < 0$	$v(x) > 0$	$-\infty$
$L < 0$	$v(x) < 0$	$+\infty$

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-7}{x-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-7}{x-1}$

(Bài tập 4- tr132, Sách ĐS> 11)

Hướng dẫn:

a) Ta có:
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x-7) = 2 \cdot 1 - 7 = -5 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0 \text{ và } x-1 < 0, \quad \forall x < 1 \end{cases}$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-7}{x-1} = +\infty$

b) Ta có:
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x-7) = 2 \cdot 1 - 7 = -5 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0 \text{ và } x-1 > 0, \quad \forall x > 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-7}{x-1} = -\infty$$

Bài tập vận dụng:

Tìm các giới hạn sau:

$$1) \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x-7}{x+3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x-1}{x+2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{(x-2)^2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-2}{(x+3)^2}$$

Dạng 3: Dạng $(L.\infty)$

Dấu hiệu: Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x).v(x)$ với $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = L \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = \infty$

Phương pháp:

Bước 1: Tính $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = L$, với $L \neq 0$

Bước 2: Tính $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = \infty$

Bước 3: Dựa vào bảng xét dấu sau để kết luận $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x).v(x)$

$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = L$	$\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x).v(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

Ví dụ 3. Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 3x^2 - 5)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$$

(Bài tập 6- tr133, Sách ĐS> 11)

Hướng dẫn:

a) Nhân và chia biểu thức $(-2x^3 + 3x^2 - 5)$ cho x^3 ta được:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 3x^2 - 5) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(-2 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^3} \right) \\ &= -\infty \cdot (-2) = +\infty \end{aligned}$$

b) Nhân và chia biểu thức $(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ cho x (do $x \rightarrow +\infty$ nên $x = \sqrt{x^2}$) ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) \\ = +\infty \cdot 2 = +\infty$$

Bài tập vận dụng:

Tìm các giới hạn sau:

1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 1)$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^4 - 3x^2 + 1)$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - \sqrt{4x^2 - x})$

b. Dạng vô định:

Dạng 4: Dạng vô định $\left(\frac{0}{0} \right)$

Dấu hiệu: Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$ với $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = 0$

***)** $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$ với $u(x)$, $v(x)$ là các đa thức và $u(x_0) = v(x_0) = 0$

Phương pháp: Phân tích cả $u(x)$, $v(x)$ thành nhân tử và rút gọn nhân tử chung $(x - x_0)$ để đưa về dạng cơ bản.

Ví dụ 4. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1} \right)$

(Ví dụ 4a- tr156, Sách BT ĐS> 11)

Hướng dẫn:

a) Dễ dàng nhận thấy : $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 8) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0$

Ta phân tích: $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ và $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

Khi đó:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = \frac{12}{4} = 3$$

b) Nhận xét tương tự câu a) ta có :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{2(x - 1)(x + \frac{1}{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3}{2(x + \frac{1}{2})} = \frac{4}{3}$$

*) $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$ với $u(x_0) = v(x_0) = 0$ và $u(x), v(x)$ là các biểu thức chứa căn cùng bậc

Phương pháp: Sử dụng các hằng đẳng thức để nhân lượng liên hợp ở tử và mẫu đưa về dạng cơ bản.

Ví dụ 5. Tìm giới hạn hàm số:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{\sqrt{x+7}-3}$$

(Ví dụ 4b- tr156, Sách BT ĐS> 11)

Hướng dẫn:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - \sqrt{4-x})(2 + \sqrt{4-x})}{x(2 + \sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + \sqrt{4-x}} = \frac{1}{4}$$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{\sqrt{x+7}-3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (-\sqrt{x+7}-3) = -6 \end{aligned}$$

*) $L = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$ với $u(x_0) = v(x_0) = 0$ và $v(x)$ là biểu thức chứa căn không đồng bậc.

Phương pháp: Giả sử: $u(x) = \sqrt[n]{p(x)} - \sqrt[n]{q(x)}$ với $\sqrt[n]{p(x_0)} = \sqrt[n]{q(x_0)} = a$.

Ta phân tích $u(x) = \sqrt[n]{p(x)} - \sqrt[n]{q(x)} = (\sqrt[n]{p(x)} - a) + (a - \sqrt[n]{q(x)})$.

Ví dụ 6. Tìm giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{1-x}}{x}$

Hướng dẫn: Áp dụng phương pháp trên ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{1-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} + \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1} + \frac{1}{1 + \sqrt{1-x}} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Bài tập vận dụng:

Tìm các giới hạn sau:

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + x - 6}{x^2 - 3x - 2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-3} - 1}{x^2 - 3x - 4}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{x+1}}{3x}$$

Dạng 5: Dạng vô định $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Nhận biết: Tìm giới hạn: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{v(x)}$, với $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = \infty$

($u(x), v(x)$ là các đa thức hoặc các biểu thức chứa căn).

Phương pháp:

+) Nếu $u(x), v(x)$ là các đa thức thì chia cả tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của x .

+) Nếu $u(x), v(x)$ có chứa căn thì có thể chia cả tử và mẫu cho lũy thừa cao nhất của x . (Chú ý rằng nếu $x \rightarrow +\infty$ thì coi như $x > 0$, nếu $x \rightarrow -\infty$ thì coi như $x < 0$ khi đưa x ra hoặc vào khỏi căn bậc chẵn).

Ví dụ 7. Tìm các giới hạn:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \quad c)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + 1}$$

(Ví dụ 4c- tr156, Sách BT ĐS> 11)

Hướng dẫn:

a) Chia cả tử và mẫu của phân thức $\frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3}$ cho x^2 . Khi đó:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}} = 2$$

b) Chia cả tử và mẫu của biểu thức $\frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$ cho x , chú ý khi $x \rightarrow -\infty$ thì ta có

$x = -\sqrt{x^2}$. Khi đó:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1} = -1$$

c) Chia cả tử và mẫu của biểu thức $\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ cho x , chú ý khi $x \rightarrow +\infty$ thì ta có $x = \sqrt{x^2}$. Khi đó :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

Bài tập vận dụng:

Tìm các giới hạn sau:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{2 - 6x^2 - 6x^3}$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^4 + 11x^2 - 1}}{2x + 5}$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2017} + 3x + 1}{2 - 6x^2 - 4x^{2017}}$

Dạng 6: Dạng vô định $((+\infty) - (+\infty))$ hoặc $((-\infty) - (-\infty))$

Nhận biết :

Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow \infty} (u(x) - v(x))$ với $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = +\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow \infty} (u(x) + v(x))$ với $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = -\infty$ (có thể thay $x \rightarrow \infty$ bằng $x \rightarrow x_0$).

Phương pháp:

+ Nếu $u(x), v(x)$ có chứa căn thì nhân (chia) lượng liên hợp để đưa giới hạn về các dạng trên.

+ Nếu $u(x), v(x)$ ở dạng phân thức thì ta dùng quy đồng mẫu số để đưa về các dạng trên.

Ví dụ 8. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x})$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + x + 1})$ c)

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)$

Hướng dẫn:

a) Nhận thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x}) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x}) = +\infty$ nên giới hạn này thuộc dạng $((+\infty) - (+\infty))$. Vì vậy ta nhân và chia biểu thức liên hợp $(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})$, khi đó giới hạn đã cho được đưa về dạng $\left(\frac{L}{\infty} \right)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{x})}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = 0$$

b) Nhận thấy $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} \right) = +\infty$ nên giới hạn này thuộc dạng $((-\infty) - (-\infty))$. Vì vậy, nhân và chia với biểu thức liên hợp $(x - \sqrt{x^2 + x + 1})$, khi đó giới hạn được đưa về dạng $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + x + 1}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 + x + 1})(x - \sqrt{x^2 + x + 1})}{x - \sqrt{x^2 + x + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - (x^2 + x + 1)}{x - \sqrt{x^2 + x + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - 1}{x - \sqrt{x^2 + x + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

c) Nhận thấy $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} \right) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2 - 4} \right) = +\infty$ nên giới hạn này thuộc dạng $((+\infty) - (+\infty))$. Khi đó dùng quy đồng mẫu số ta đưa giới hạn đã cho về dạng $\left(\frac{L}{0} \right)$. Tức là:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x^2 - 4} = +\infty$$

Bài tập vận dụng:

Tìm các giới hạn sau:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x + 2})$

Dạng 7: Dạng vô định $(\infty.0)$

Nhận biết :

Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow \infty} (u(x).v(x))$ với $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = \infty$

Phương pháp:

Ta biến đổi $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x).v(x)$ dạng $(0.\infty)$ về dạng $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$

Sau đó sử dụng phương pháp của dạng $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ để giải.

Chú ý: $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2B}$ với $A, B \geq 0$
 $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2B}$ với $A \leq 0, B \geq 0$

Ví dụ 9. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) \sqrt{\frac{2x+1}{x^3+x+2}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \sqrt{\frac{x-1}{x^3+x}}$

Hướng dẫn:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) \sqrt{\frac{2x+1}{x^3+x+2}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\sqrt{\frac{(x+1)^2(2x+1)}{x^3+x+2}} \right] = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(2+\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}} = -\sqrt{2} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \sqrt{\frac{x-1}{x^3+x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{(x+2)^2(x-1)}{x^3+x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = 1 \end{aligned}$$

Bài tập vận dụng:

Tìm các giới hạn sau:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2})$

2) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{(x-3)^2}$

3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+1} - 1 \right)$

(Ví dụ 4e- tr156, Sách BT ĐS> 11)

2.3.3. Hướng dẫn sử dụng máy tính cầm tay để tìm giới hạn hàm số.

Máy tính cầm tay là công cụ hỗ trợ học sinh trong việc kiểm tra kết quả cũng như giải nhanh các bài tập trắc nghiệm về tìm giới hạn của hàm số. Ở đây tôi sẽ trình bày cách tính giới hạn bằng máy tính cầm tay Casio FX 570ES.

a. Tính giới hạn hàm số khi $x \rightarrow \infty$

Thực hiện các thao tác:

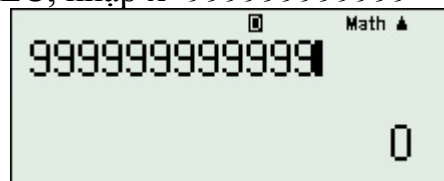
- Nhập biểu thức cần tìm giới hạn
- Ấn CALC
- Nhập một số thật lớn nếu $x \rightarrow +\infty$, ví dụ: 9.10^9 , 9999999999,... hoặc một số thật bé, ví dụ : -9.10^9 , -9999999999,... khi $x \rightarrow -\infty$.
- Ấn =, có kết quả gần đúng hoặc đúng.
- Lưu ý: nếu kết quả là số rất lớn (hoặc rất bé) thì kết quả giới hạn là $+\infty$ (hoặc là $-\infty$).

Ví dụ 10. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 4}{5x^2 + 3}$ bằng giá trị nào sau đây?

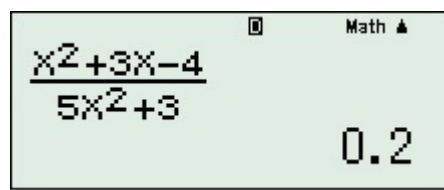
- A. $-\infty$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. 0

Hướng dẫn:

- Nhập biểu thức $\frac{x^2 + 3x - 4}{5x^2 + 3}$
- Ấn CALC, nhập x=999999999999



- Ấn =, ta có kết quả:



- So sánh các đáp án trên, ta chọn đáp án đúng là C.

b. Tính giới hạn hàm số khi $x \rightarrow x_0$

Thực hiện các thao tác:

- Nhập biểu thức cần tìm giới hạn
- Ấn CALC
- Nhập một số thuộc lân cận x_0 (ví dụ: nhập $x = x_0 + 0,00000001$ nếu $x \rightarrow x_0^+$, nhập $x = x_0 - 0,00000001$ nếu $x \rightarrow x_0^-$).
- Ấn =, có kết quả gần đúng hoặc đúng.
- Lưu ý: nếu kết quả là số rất lớn (hoặc rất bé) thì kết quả giới hạn là $+\infty$ (hoặc là $-\infty$).

Ví dụ 11. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ bằng giá trị nào sau đây ?

- A. 2 B. 1 C. $+\infty$ D. 4

Hướng dẫn:

- Nhập biểu thức $\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$
- Ấn CALC, nhập x= 1+0,0000000001

A calculator screen showing the expression $1+0.0000001$ and the result 1 . The screen also displays 'CMPLX' and 'Math' modes.

- Ấn $=$, ta có kết quả:

A calculator screen showing the expression $\frac{x^2+2x-3}{x-1}$ and the result 4.0000001 . The screen also displays 'CMPLX' and 'Math' modes.

- So sánh các đáp án trên, ta chọn đáp án đúng là D.

Bài tập vận dụng:

1. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^2 - 3x - 8)$ có kết quả bằng:

- A. -2 B. 5 C. 9 D. 10

2. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ có kết quả bằng:

- A. -1 B. 1 C. 2 D. $+\infty$

3. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2 + 3} - 2}$ có kết quả bằng:

- A. 0 B. 1 C. $\frac{-1}{\sqrt[3]{4} - 2}$ D. $-\frac{2}{3}$

4. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5 + x^4 - 3}{3x^2 - 7}$ có kết quả bằng:

- A. $-\frac{2}{3}$ B. 0 C. $-\infty$ D. $+\infty$.

5. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^5 + 7x^3 - 11}{x^5 + x^4 - 3x}$ kết quả bằng:

- A. $+\infty$ B. $-\infty$ C. 5 D. -3

2.4. Hiệu quả của sáng kiến kinh nghiệm đối với hoạt động giáo dục, với bản thân, đồng nghiệp và nhà trường

Như trong phần đặt vấn đề đã nêu, sáng kiến nhằm đưa ra giải pháp giúp học sinh trường THPT Thường Xuân 2 giải thành thạo bài toán tìm giới hạn hàm số.

Với tinh thần đó, trong quá trình soạn, dạy dạng toán này tôi thực hiện theo cách phân dạng và định hướng cách giải cho từng dạng từ dễ đến khó, thông qua 11 ví dụ được chọn lọc. Bên cạnh đó cũng hướng dẫn học sinh sử

dụng máy tính cầm tay để tìm giới hạn trong bài thi trắc nghiệm và kiểm tra kết quả trong bài thi tự luận. Khi tiến hành các giải pháp này tại lớp 11B2, tôi nhận thấy:

- Học sinh tỏ ra hứng thú hơn khi giải toán, bởi các giới hạn mà các em còn lúng túng, mơ hồ đã được trình bày một cách tường minh, dễ hiểu.
- Giờ dạy tránh được tính đơn điệu, nhàm chán theo một lối mòn lâu nay.
- Học sinh có nhiều thay đổi tích cực về phương pháp học tập và tư duy giải toán.

Kết quả đó còn được thể hiện rõ rệt qua các bài kiểm tra.

Lớp	Số HS	Giỏi		Khá		TB		Yếu	
		SL	TL(%)	SL	TL(%)	SL	TL(%)	SL	TL(%)
11B2	38	6	15,8	17	44,7	12	31,6	3	7.9

3. Kết luận và đề xuất

3.1. Kết quả thực hiện đề tài

Qua thời gian thực tế giảng dạy, tôi nhận thấy khi chưa đưa chuyên đề vào giảng dạy, học sinh chỉ có thể giải quyết những bài tập ở dạng cơ bản và thường gặp lúng túng khi giải các bài toán tìm giới hạn ở dạng vô định. Sau khi học chuyên đề học sinh đã có thể làm tốt các bài tập khó, các em hứng thú và say mê hơn trong học tập. Qua khảo sát kết quả học tập của các em tăng lên rõ rệt.

3.2. Kiến nghị

a) Để học sinh có kết quả cao trong học tập giáo viên cần nghiên cứu, tìm tòi, phân loại và xây dựng được các phương pháp giải toán sao cho học sinh dễ hiểu và cách giải ngắn nhất.

b) Giáo viên tăng cường kiểm tra, sửa chữa sai sót cho học sinh, đồng thời động viên các em khi các em tiến bộ.

c) Giáo viên hướng dẫn cách tự đọc sách của học sinh, động viên tìm tòi các phương pháp hay, ngắn gọn.

d) Tôi thấy chuyên đề này thực sự hiệu quả với đa số các em học sinh khối 11 trong trường, vì vậy nhà trường, tổ chuyên môn cần tạo điều kiện để chuyên đề này được triển khai ở tất cả các lớp 11 trong năm học tới.

Trên đây là một vài kinh nghiệm nhỏ trong quá trình thực hiện việc đổi mới phương pháp dạy học, đề tài không tránh khỏi những hạn chế.

Rất mong sự đóng góp quý báu của bạn bè, đồng nghiệp.

Tôi xin chân thành cảm ơn.

XÁC NHẬN CỦA THỦ TRƯỞNG ĐƠN VỊ	Thanh Hóa, ngày 12 tháng 5 năm 2017 Tôi xin cam đoan đây là SKKN của mình viết, không sao chép nội dung của người khác.
--------------------------------	--

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Sách giáo khoa: Đại số và giải tích 11.
2. Sách bài tập: Đại số và giải tích 11.
3. Một số tài liệu tham khảo từ trang web: Violet.vn ; www.nguoiithay.vn,
www.moon.vn và www.diendantoanhoc.net .