

UBND HUYỆN KIM THÀNH ĐỀ KIỂM TRA ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
TRƯỜNG THCS CỘNG HÒA

MÔN TOÁN – LỚP 9

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

NĂM HỌC 2022 – 2023

Thời gian làm bài: 120 phút

(Đề thi gồm 1 trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

$$M = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) \text{ với } x > 0; x \neq 2$$

1) Rút gọn biểu thức

2) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a+b+c-5} + \sqrt{5(ab+bc+ca)-abc} = 0$

Tính giá trị của biểu thức $B = a^5 + b^5 + c^5$

Câu 2. (3 điểm)

1) Giải phương trình: $x^2 - 20x + 24 + 8\sqrt{3(x-1)} = 0$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - xy^2 - (x-y+1)(x+y) = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + 2y^2 + 2xy + 3y = 4$

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p để $4p^2 + 1$ và $6p^2 + 1$ cũng là số nguyên tố

Câu 4. (3 điểm)

1) Cho tam giác nhọn ABC có 3 đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Trên các đoạn thẳng HA, HB, HC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho

$$\angle PMC = \angle NMA = \angle APB = 90^\circ$$

a) Chứng minh tam giác ANP cân.

b) Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các tam giác MBC, ABC và HBC . Chứng minh rằng: $S = \sqrt{S_1 S_2}$

2) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tia phân giác của góc BAH cắt BH ở D . Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Gọi E là giao điểm của MD và AH . Chứng minh

rằng: $AD \parallel CE$.

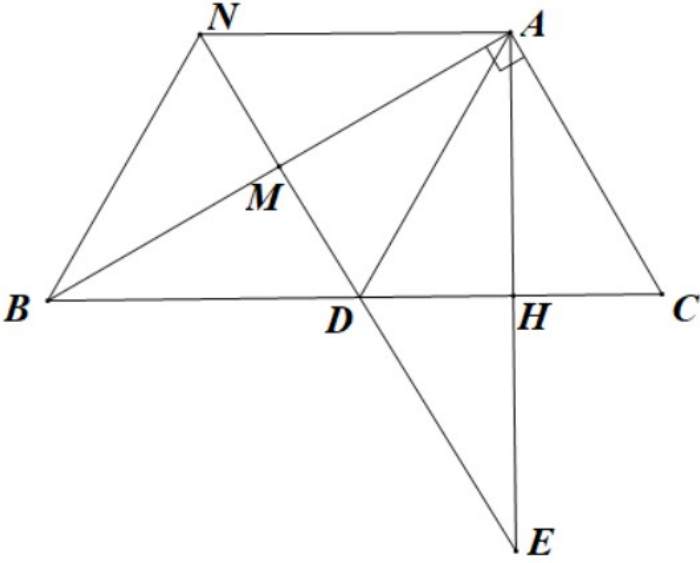
Câu 5 (1,0 điểm).

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{1}{2}$$

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
2	1	$M = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$ $= \frac{\sqrt{x-2}\sqrt{(x-1)} + \sqrt{x+2}\sqrt{(x-1)}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right)$ $= \frac{ \sqrt{x-1}-1 + \sqrt{x-1}+1 }{ x-2 } \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right)$ TH1: $x > 2$ $M = \frac{\sqrt{x-1}-1 + \sqrt{x-1}+1}{x-2} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right) = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$ TH2: $1 < x < 2$ $M = \frac{-\sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}+1}{-(x-2)} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right) = \frac{-2}{\sqrt{x-1}}$	0,5
			0,25
			0,25
			0,25
			0,25
	2	$\sqrt{a+b+c-5} + \sqrt{5(ab+bc+ca)-abc} = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} a+b+c-5=0(1) \\ 5(ab+bc+ca)-abc=0(2) \end{cases}$ Từ (1) $\Rightarrow a+b+c=5$, thay vào (2) được: $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0$	0,25
		$\Leftrightarrow a^2b+abc+a^2c+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+ac^2-abc=0$ $\Leftrightarrow (a^2b+a^2c+ab^2+abc)+(b^2c+bc^2+ac^2+abc)=0$ $\Leftrightarrow a(ab+ac+b^2+bc)+c(b^2+bc+ac+ab)=0$ $\Leftrightarrow a(a+b)(b+c)+c(a+b)(b+c)=0$ $\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{cases}$ TH1: $a+b=0 \Rightarrow c=5 \Rightarrow B=(-b)^5+b^5+5^5=5^5=3125$	0,25
		TH2: $b+c=0 \Rightarrow a=5 \Rightarrow B=3125$	0,25
		TH3: $a+c=0 \Rightarrow b=5 \Rightarrow B=3125$	
	1	Điều kiện: $x \geq 1$	0,25

		$\Leftrightarrow (x^2 - 8x + 16) - (12x - 12 - 8\sqrt{3x - 3} + 4) = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = (2\sqrt{3x - 3} - 2)^2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 2\sqrt{3x - 3} - 2 \\ x - 4 = 2 - 2\sqrt{3x - 3} \end{cases}$ PT:	
		$PT: x - 4 = 2\sqrt{3x - 3} - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4(3x - 3) = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 16x + 16 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = 8 + 4\sqrt{3}$	0,25
		$PT: x - 4 = 2 - 2\sqrt{3x - 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 6 \\ x^2 - 24x + 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 12 - 4\sqrt{6}$	0,5
		$\begin{cases} x^3 - xy^2 - (x - y + 1)(x + y) = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - y)(x + y) - (x - y + 1)(x + y) = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy - x + y - 1) = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 - xy - x + y - 1 = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases}^{(1)} \\ \begin{cases} x^2 - xy - x + y - 1 = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases}^{(2)} \end{cases}$	
2		$(1) \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ -2y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}$ Giải hệ PT:	0,25
		Giải hệ PT: $(2) \begin{cases} x^2 - xy - x + y - 1 = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy - (2y^2 - 1) - 1 = 0 \\ x - y = 2y^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ x - y = 2y^2 - 1 \end{cases}$	0,25
4	1	CM: tam giác ABE đồng dạng với tam giác ACF (g-g) suy ra được: AC.AE=AB.AF (3)	0.25
		Từ (1), (2), (3) suy ra $AN^2 = AP^2$ suy ra AN=AP suy ra tam giác ANP cân tại A	0,25
		b) Xét tam giác MBC vuông tại M có MD là đường cao nên $MD^2 = BD.DC(4)$	0,25
		CM: tam giác BHD đồng dạng tam giác ACD suy ra:	0,25

	$\frac{DB}{DA} = \frac{HD}{CD} \Rightarrow DB \cdot CD = AD \cdot HD (5)$ Từ (4) và (5) suy ra $MD^2 = AD \cdot HD$	
	Ta có: $S = \frac{1}{2} BC \cdot MD$; $S_1 = \frac{1}{2} BC \cdot AD$; $S_2 = \frac{1}{2} BC \cdot HD$ Suy ra $S_1 \cdot S_2 = \frac{1}{2} BC \cdot AD \cdot \frac{1}{2} BC \cdot HD = \frac{1}{4} BC^2 \cdot AD \cdot HD = \frac{1}{4} BC^2 \cdot MD^2$ Suy ra $\sqrt{S_1 \cdot S_2} = \frac{1}{2} BC \cdot MD = S$	0,25
2		
	Gọi N là điểm đối xứng của D qua M Khi đó ADBN là hình bình hành suy ra $BD = AN$; $DH \parallel NA$ Xét tam giác EAN có: $DH \parallel AN$ nên $\frac{HE}{AE} = \frac{DH}{AN}$	0,25
	Xét tam giác ABH, AD là phân giác suy ra $\frac{AH}{AB} = \frac{DH}{BD}$ CM: tam giác HAB đồng dạng HCA suy ra $\frac{AH}{AB} = \frac{CH}{AC}$	0,25
	CM tam giác CAD cân tại C suy ra $CA = CD$ $\frac{HE}{AE} = \frac{DH}{AN} = \frac{AH}{AB} = \frac{CH}{AC} = \frac{CH}{CD} \Rightarrow \frac{HE}{AE - HE} = \frac{CH}{CD - CH} \Rightarrow \frac{HE}{AH} = \frac{CH}{HD}$	0,25
	Suy ra tam giác HEC đồng dạng tam giác HAD $\Rightarrow \angle HEC = \angle HAD \Rightarrow AD \parallel CE$	0,25
5	Chứng minh bất đẳng thức phụ $(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9 \Leftrightarrow \frac{1}{x+y+z} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) (*)$ với x, y là các số dương. Dấu “=” khi $x = y$ Áp dụng BĐT (*)	

	$\frac{ab}{a+3b+2c} = \frac{ab}{(a+c)+(b+c)+2b} \leq \frac{ab}{9} \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b} \right)$ $= \frac{1}{9} \left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{a}{2} \right) \quad (1)$ $\frac{bc}{b+3c+2a} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{b}{2} \right) \quad (2)$ $\frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{ac}{a+b} + \frac{ac}{b+c} + \frac{c}{2} \right) \quad (3)$	
	Từ (1); (2); (3) $P \leq \frac{1}{9} \left(\frac{ac+bc}{a+b} + \frac{ab+ac}{b+c} + \frac{bc+ab}{a+c} + \frac{a+b+c}{2} \right) = \frac{a+b+c}{6}$ $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ Mặt khác chứng minh được: $\Leftrightarrow a+b+c \leq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \leq 3$ Do đó $P \leq \frac{1}{2}$. Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c=1$.	