

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
SƠN TÂY

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2023-2024

MÔN THI: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

(Đề thi có 1 trang)

Câu 1. (5 điểm)

a) Tìm các số thực a, b sao cho đa thức $4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 3$

b) Cho biểu thức $P = (a^{2013} - 8a^{2012} + 11a^{2011}) + (b^{2013} - 8b^{2012} + 11b^{2011})$. Tính giá trị của P với $a = 4 + \sqrt{5}$ và $b = 4 - \sqrt{5}$.

Câu 2. (5 điểm)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 6x^2 - y^2 - xy + 5x + 5y - 6 = 0 \\ 20x^2 - y^2 - 28x + 9 = 0 \end{cases}$$

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $6x^2 + 10y^2 + 2xy - x - 28y + 18 = 0$

Câu 3. (2 điểm) Cho ba số thực a, b, c dương thỏa mãn: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 3$. Chứng minh:

$$\frac{27a^2}{c(c^2 + 9a^2)} + \frac{b^2}{a(4a^2 + b^2)} + \frac{8c^2}{b(9b^2 + 4c^2)} \geq \frac{3}{2}.$$

Câu 4. (7 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O) và $AB < AC$. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H . Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng EF và CB . Đường thẳng AI cắt (O) tại M (M khác A).

a) Chứng minh năm điểm A, M, F, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi N là trung điểm của BC . Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.

c) Chứng minh $BM \cdot AC + AM \cdot BC = AB \cdot MC$.

Câu 5 (1 điểm)

Cho 2013 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2013}$ và đường tròn $(O; 1)$ tùy ý cùng nằm trong mặt phẳng. Chứng minh trên đường tròn $(O; 1)$ đó, ta luôn có thể tìm đường một điểm M sao cho $MA_1 + MA_2 + \dots + MA_{2013} \geq 2013$.

ĐÁP ÁN

Bài 1:

1) Đặt $f(x) = 4x^4 - 11x^3 - 2ax^2 + 5bx - 6 = (x^2 - 2x - 3)q(x) = (x+1)(x-3)q(x)$

Từ đó $\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 5b = 9 \\ 18a - 15b = 91 \end{cases}$

2) Nhận xét $\begin{cases} a + b = 8 \\ ab = 11 \end{cases}$ nên a, b là nghiệm của phương trình $x^2 - 8x + 11 = 0$

Ta có:

$$P = (a^{2013} - 8a^{2012} + 11a^{2011}) + (b^{2013} - 8b^{2012} + 11b^{2011}) = (a^2 - 8a + 11)a^{2011} + (b^2 - 8b + 11)b^{2011} = 0$$

Bài 2:

1) Hệ $\begin{cases} 6x^2 - y^2 - xy + 5x + 5y - 6 = 0 \\ 20x^2 - y^2 - 28x + 9 = 0 \end{cases}$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow (2x - y + 3)(3x + y - 2) = 0$

Rút y theo x thế vào phương trình (2) ta có thể giải được hệ.

2) Nhân 2 vào hai vế ta được

$$(x + 4y)^2 + (4y - 7)^2 + (x - 1)^2 + 10x^2 - 14 = 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow x \in \{-1; 0; 1\} \text{ (do } x \in \mathbb{Z})$$

Thay các $x = -1; 0; 1$ vào phương trình tìm y

Bài 3:

a) Sử dụng dấu hiệu trong chứng minh tứ giác nội tiếp ta có $IE \cdot IF = IB \cdot IC = IM \cdot IA$ nên tứ giác $AMFE$ nội tiếp.

Mặt khác tứ giác $AFHE$ nội tiếp.

Vậy A, M, F, H, E cùng nằm trên đường tròn.

b) Vì tứ giác $AMHE$ nội tiếp nên HM vuông góc với AM tại M

Sử dụng bổ đề nếu HN kéo dài cắt (O) tại D thì A, O, D thẳng hàng, tức là H, M, N thẳng hàng.

c) Sử dụng định lý Ptoleme cho tứ giác $AMBC$.

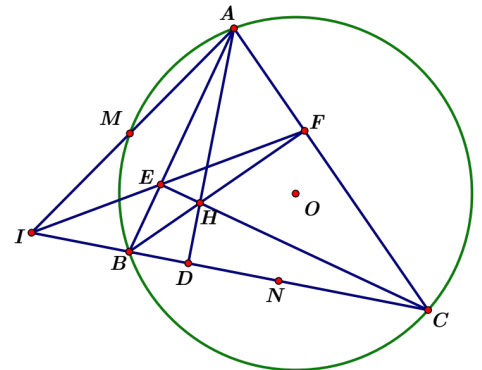
Bài 4:

Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{2}{b}; z = \frac{3}{c} \Rightarrow x + y + z = 3$

Khi đó ta cần chứng minh: $\frac{z^3}{x^2 + z^2} + \frac{x^3}{y^2 + x^2} + \frac{y^3}{z^2 + y^2} \geq \frac{3}{2}$

Ta có: $\frac{z^3}{x^2 + z^2} = z - \frac{zx^2}{x^2 + z^2} \geq z - \frac{zx^2}{2zx} = z - \frac{x}{2}$

Chứng minh tương tự và cộng lại ta được:



$$\frac{z^3}{x^2+z^2} + \frac{x^3}{y^2+x^2} + \frac{y^3}{z^2+y^2} \geq (x+y+z) - \frac{1}{2}(x+y+z) = \frac{x+y+z}{2} = \frac{3}{2} \text{ (dpcm)}$$

Bài 5:

Kẻ đường kính DE bất kì

$$(DA_1 + DA_2 + \dots + DA_{2013}) + (EA_1 + EA_2 + \dots + EA_{2013}) \geq 4026$$

Đặt $P = DA_1 + DA_2 + \dots + DA_{2013}$, $S = EA_1 + EA_2 + \dots + EA_{2013}$

Nếu $P \geq 2013$ thì D là điểm M cần tìm

Nếu $P < 2013$ thì E là điểm cần tìm.

