

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ 03

Câu 1: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên tập số thực không âm và thỏa mãn

$$f(x^2 + 3x + 1) = x + 2 \quad \forall x \geq 0. \quad \text{Tính } \int_1^5 f(x) dx$$

A. $\frac{37}{6}$.

B. $\frac{527}{3}$.

C. $\frac{61}{6}$.

D. $\frac{464}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$I = \int_1^5 f(x^2 + 3x + 1)(2x + 3) dx = \int_0^1 (x + 2)(2x + 3) dx = \frac{61}{6}$$

Ta có:

$$\text{Đặt } t = x^2 + 3x + 1 \Rightarrow dt = (2x + 3) dx,$$

$$\text{Đổi cận: } x = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow t = 5$$

$$\text{Suy ra } \frac{61}{6} = \int_0^1 f(x^2 + 3x + 1)(2x + 3) dx = \int_1^5 f(t) dt = \int_1^5 f(x) dx$$

Câu 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC vuông tại A , $AB = a\sqrt{3}$, $AC = AA' = a$. Giá trị sin của góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng

A. $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

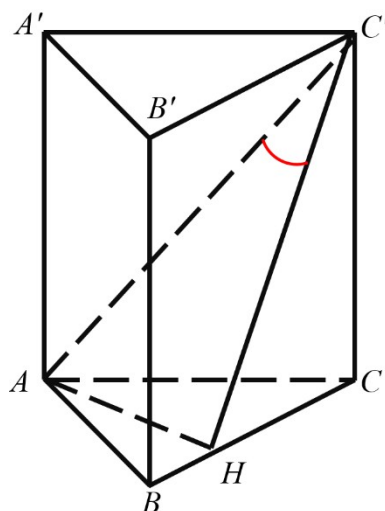
B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

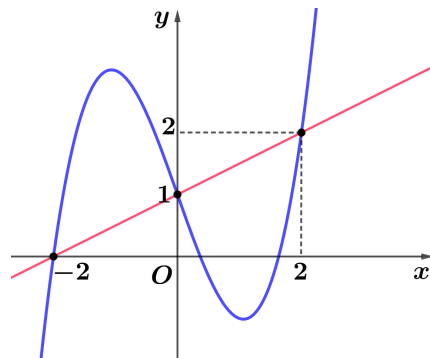


Kẻ $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (BCC'B')$, từ đó $(AC'; (BCC'B')) = \angle AC'H$.

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ vuông tại } A: \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Leftrightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

$$\text{Xét } \triangle AA'C' \text{ vuông tại } C': AC' = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Xét } \triangle AHC' \text{ vuông tại } C': \sin \angle AC'H = \frac{AH}{AC'} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$



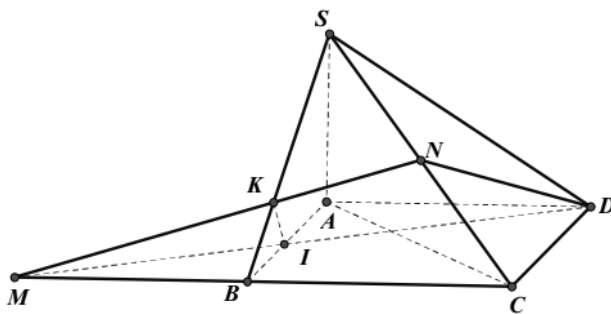
Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$:

x	$-\infty$	$\sqrt[3]{-2}$		0		$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$h(x)$	$+\infty$						$+\infty$

Khi đó, hàm số $g(x) = |h(x)|$ có số điểm cực đại nhiều nhất $\Leftrightarrow h(x) = 0$ có 4 nghiệm.

Vậy hàm số $g(x) = |h(x)|$ có tối đa 3 điểm cực đại.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm đối xứng của C qua B và N là trung điểm của SC . Mặt phẳng (MND) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện, trong đó khối đa diện chứa đỉnh S có thể tích V_1 , khối đa diện còn lại có thể tích V_2 (tham khảo hình vẽ bên).



Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{12}{7}$.

B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{3}$.

C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$.

D. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $K = MN \cap SB \Rightarrow \frac{BK}{BS} = \frac{1}{3}$.

$$\text{Đặt } V = V_{S.ABCD} \Rightarrow V_{S.BCD} = V_{S.ABC} = \frac{V}{2}$$

$$\frac{V_{C.DMN}}{V_{C.DBS}} = \frac{CD}{CD} \cdot \frac{CM}{CB} \cdot \frac{CN}{CS} = 1 \Rightarrow V_{C.DMN} = \frac{V}{2}$$

$$\frac{V_{B.MKI}}{V_{B.CSA}} = \frac{BM}{BC} \cdot \frac{BK}{BS} \cdot \frac{BI}{BA} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{B.MKI} = \frac{V}{12} \Rightarrow V_2 = V_{C.DMN} + V_{B.MKI} = \frac{V}{2} + \frac{V}{12} = \frac{5V}{12} \Rightarrow V_1 = \frac{7V}{12}$$

$$\text{Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{5}$$

- Câu 6:** Cho hàm số $f(x) = ax - (a-3)\ln(x^2+3x)$ với a là tham số thực. Biết rằng nếu $\max_{[1;3]} f(x) = f(2)$ thì $\min_{[1;3]} f(x) = m$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A.** $m \in (6;7)$ **B.** $m \in (7;8)$ **C.** $m \in (8;9)$ **D.** $m \in (9;10)$

Lời giải

Chọn A

$$f(x) = ax - (a-3)\ln(x^2+3x) \Rightarrow f'(x) = a - (a-3) \frac{2x+3}{x^2+3x}$$

$$\text{Vì } \max_{[1;3]} f(x) = f(2) \text{ nên } f'(2) = 0$$

$$\Rightarrow a - (a-3) \frac{7}{10} = 0 \Leftrightarrow a = -7$$

$$\Rightarrow f'(x) = -7 + 10 \frac{2x+3}{x^2+3x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{15}{7} \end{cases}$$

$$f(1) = -7 + 10 \ln 4; f(2) = -14 + 10 \ln 10; f(3) = -21 + 10 \ln 18$$

$$\text{Vậy } \max_{[1;3]} f(x) = f(2) \text{ và } m = \min_{[1;3]} f(x) = f(1) \approx 6,86$$

- Câu 7:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;e]$ và thỏa mãn $f(1) = 0$;

$$[f'(x) - 1]x = f(x), \forall x \in [1;e]. \text{ Tích phân } \int_1^e f(x) dx \text{ bằng}$$

A. $\frac{e^2-1}{4}$ **B.** $\frac{e^2+1}{2}$ **C.** $\frac{e^2+1}{4}$ **D.** $\frac{e^2-1}{2}$

Lời giải

Chọn C

$$[f'(x) - 1]x = f(x) \Leftrightarrow f'(x)x - f(x) = x \Rightarrow \frac{1}{x}f'(x) + \frac{-1}{x^2}f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{x} f(x) \right]' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} f(x) = \ln x + C \quad \text{do } x \in [1; e], \text{ mà } f(1) = 0 \Rightarrow f(x) = x \ln x$$

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e x \ln x dx = \left. \frac{x^2}{2} \ln x \right|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2 + 1}{4}$$

Câu 8: Có bao nhiêu số nguyên dương x sao cho tồn tại số thực y lớn hơn 1 thỏa mãn

$$(xy^2 + x - 2y - 1) \log y = \log \frac{2y - x + 3}{x}$$

A. 3.

B. 1.

C. vô số.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2y - x + 3 > 0 \\ y > 1 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y < 3 \\ y > 1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$(xy^2 + x - 2y - 1) \log y = \log \frac{2y - x + 3}{x}$$

$$\Leftrightarrow (xy^2 + x - 2y - 1) \log y - 2 \log y = \log \frac{2y - x + 3}{x} - 2 \log y$$

$$\Leftrightarrow (xy^2 + x - 2y - 3) \log y = \log \frac{2y - x + 3}{xy^2}$$

$$\Leftrightarrow (a - b) \log y = \log \frac{b}{a} \Leftrightarrow (a - b) \log y + \log \frac{a}{b} = 0, \text{ với } \begin{cases} a = xy^2 \\ b = 2y - x + 3 \end{cases} (a, b > 0)$$

$$\text{Nếu } a > b \text{ thì } (a - b) \log y + \log \frac{a}{b} > 0, \quad a < b \text{ thì } (a - b) \log y + \log \frac{a}{b} < 0$$

$$\text{Nên } (a - b) \log y + \log \frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow xy^2 = 2y - x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{2y + 3}{y^2 + 1}$$

$$\text{Xét hàm số } f(y) = \frac{2y + 3}{y^2 + 1} \text{ với } y > 1. \text{ Ta có } f'(y) = \frac{-2y^2 - 6y + 2}{(y^2 + 1)^2} < 0, \forall y > 1$$

Nên $f(y)$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Bảng biến thiên:

y	1	$+\infty$
$f'(y)$		—
$f(y)$	$\frac{5}{2}$	0

Để tồn tại số thực y lớn hơn 1 thì $0 < x < \frac{5}{2} \Rightarrow x \in [1; 2]$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) có tâm thuộc mặt phẳng $(P): x + 2y + z - 7 = 0$ và đi qua hai điểm $A(1; 2; 1), B(2; 5; 3)$. Bán kính nhỏ nhất của mặt cầu (S) bằng:

- A. $\frac{\sqrt{470}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{546}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{763}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{345}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$AB: \begin{cases} \text{qua } M\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}; 2\right) \\ VTPT_{AB} = (1; 3; 2) \end{cases}$$

Gọi I là tâm mặt cầu $(S) \Rightarrow I \in (Q)$ là mặt phẳng trung trực của AB có dạng: $x + 3y + 2z - 16 = 0$.

Vậy $I \in d$ là giao tuyến của 2 mặt phẳng:
$$\begin{cases} x + 3y + 2z - 16 = 0 \\ x + 2y + z - 7 = 0 \end{cases}$$

+ cho $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ z = 11 \end{cases} \rightarrow C(0; -2; 11) \in d$ và cho $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ z = 12 \end{cases} \rightarrow D(1; -3; 12) \in d$

+ Đường thẳng $d: \begin{cases} \text{qua } C(0; -2; 11) \\ VTCP_{CD} = (1; -1; 1) \end{cases}$ có dạng:
$$\begin{cases} x = t \\ y = -2 - t \rightarrow I(t; -2 - t; 11 + t) \\ z = 11 + t \end{cases}$$

+ Bán kính $R = IA = \sqrt{(1-t)^2 + (4+t^2) + (10+t)^2} = \sqrt{3\left(\left(t + \frac{13}{3}\right)^2 + \frac{82}{9}\right)} \geq \frac{\sqrt{546}}{3}$ khi $t = -\frac{13}{3}$.

Vậy $R_{\min} = \frac{\sqrt{546}}{3}$ khi $t = -\frac{13}{3}$.

Câu 10: Trong khoảng $(-10; 20)$ có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4x \log_3(x+1) = \log_9[9(x+1)^{2m}]$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.

- A. 23. B. 20. C. 8. D. 15.

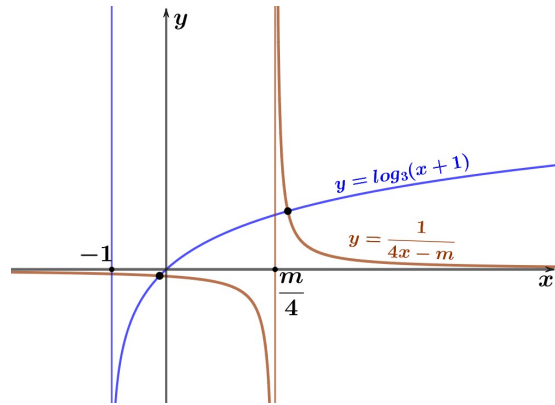
Lời giải

Chọn A

Với điều kiện: $x > -1$ thì phương trình ban đầu $\Leftrightarrow 4x \log_3(x+1) = 1 + m \log_3(x+1)$

$$\Leftrightarrow \log_3(x+1) = \frac{1}{4x - m}$$

Để phương trình có đúng 2 nghiệm phân biệt thì đồ thị hai hàm số
$$\begin{cases} y = \log_3(x+1) \\ y = \frac{1}{4x - m} \end{cases}$$
 có 2 giao điểm.



Từ đồ thị, điều kiện có 2 giao điểm khi $\frac{m}{4} > -1 \Leftrightarrow m > -4$ và $m \in (-10; 20)$, $m \in \mathbb{Z}$.
 $\Rightarrow m = \{-3; -2; \dots; 19\}$.

! HẾT □