

Người làm: Trần Thị Huyền

Zalo: Trần Thị Huyền

- số dt zalo: 0949338870

Email: thaikiethuyenson@gmail.com

CD9: TỈ LỆ THỨC VÀ DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

Dạng 1: Tìm số hạng chưa biết dựa vào tỉ lệ thức

Câu 1. (HSG 7 Thành Phố Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hoá, năm học 2022 - 2023)

Cho x, y, z là các số thực khác 0, thỏa mãn: $\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$

Tính giá trị của biểu thức $A = 4046x + (y)^{2023} + (z)^{2023}$.

Lời giải

Từ đề bài ta có x, y, z và $x+y+z$ khác 0.

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} = 2$$

$$\Rightarrow x+y+z = 0,5$$

$$\Rightarrow \frac{0,5-x+1}{x} = \frac{0,5-y+2}{y} = \frac{0,5-z-3}{z} = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = \frac{-5}{6}$$

Khi đó ta có: $A = 4046x + (y)^{2023} + (z)^{2023}$

$$= 4046 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{5}{6}\right)^{2023} + \left(\frac{-5}{6}\right)^{2023}$$

$$= 4046 \cdot \frac{1}{2} + 0$$

$$= 2023$$

Câu 2. (HSG 7 Huyện Thanh Trì, tỉnh Hà Nội, năm học 2022 - 2023)

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn: $\frac{2y+z-x}{x} = \frac{2z+x-y}{y} = \frac{2x+y-z}{z}$

$$P = \frac{(3x-2y)(3y-2z)(3z-2x)}{(3x-z)(3y-x)(3z-y)}$$

Tính giá trị biểu thức

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{2y+z-x}{x} = \frac{2z+x-y}{y} = \frac{2x+y-z}{z} = \frac{2y+z-x+2z+x-y+2x+y-z}{x+y+z} = \frac{2x+2y+2z}{x+y+z} = 2$$

Ta có:

$$*) \frac{2y+z-x}{x} = 2 \Rightarrow 2y+z-x=2x \quad (1)$$

$$*) \frac{2z+x-y}{y} = 2 \Rightarrow 2z+x-y=2y \quad (2)$$

$$*) \frac{2x+y-z}{z} = 2 \Rightarrow 2x+y-z=2z \quad (3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y+z-x=2x \\ 2z+x-y=2y \\ 2x+y-z=2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=2y+z \\ 3y=2z+x \\ 3z=2x+y \end{cases}$$

Từ (1); (2) và (3):

Theo đề bài ta có:

$$P = \frac{(3x-2y)(3y-2z)(3z-2x)}{(3x-z)(3y-x)(3z-y)}$$

$$P = \frac{(2y+z-2y)(2z+x-2z)(2x+y-2x)}{(2y+z-z)(2z+x-x)(2x+y-y)}$$

$$P = \frac{z \cdot x \cdot y}{2y \cdot 2z \cdot 2x}$$

$$P = \frac{1}{8}$$

Vậy

Câu 3.HSG 7 Huyện Kinh Môn, năm học 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x, y, z, \text{ biết: } \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2} \text{ và } x+y+z=18$$

Lời giải

$$\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2} \Rightarrow \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4}$$

Ta có

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được

$$\frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{16+9+4} = 0$$

$$*) \frac{4(3x - 2y)}{16} = 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow 12x = 8y \quad (1)$$

$$*) \frac{3(2z - 4x)}{9} = 0 \Rightarrow 2z = 4x \Rightarrow 6z = 12x \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) Suy ra } 12x = 8y = 6z \Rightarrow \frac{12x}{48} = \frac{8y}{48} = \frac{6z}{48} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{8}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{4+6+8} = \frac{18}{18} = 1 \quad (\text{vì } x+y+z=18)$$

$$\Rightarrow x=4; y=6; z=8$$

$$\text{Vậy: } x=4; y=6; z=8$$

HSG 7 Huyện Chương Mỹ, năm học 2022 - 2023)

Câu 4.

$$\text{Tìm } x, y, z, \text{ biết: } \frac{x}{3} = \frac{y}{4}; \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \text{ và } 2x - 3y + z = 6 \quad \text{Thiếu đề bài}$$

Lời giải (trình bày tắt)

Ta có

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} \quad (1)$$

$$\frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) Suy ra } \frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} = \frac{2x - 3y + z}{2.9 - 3.12 + 20} = \frac{6}{2} = 3$$

Do đó:

$$\frac{x}{9} = 3 \Rightarrow x = 3.9 = 27$$

$$\frac{y}{12} = 3 \Rightarrow y = 3.12 = 36$$

$$\frac{z}{20} = 3 \Rightarrow z = 3.20 = 60$$

$$\text{Vậy: } x=27; y=36; z=60$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Thanh Sơn , năm học 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết:
$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$$

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau tìm được:

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{x+y-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2 \quad (\text{vì } x+y+z \neq 0)$$

Suy ra:
$$x+y+z = \frac{1}{2}$$

Tìm được:
$$x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = -\frac{5}{6}$$

Câu 6. (HSG 7 huyện Hà Trung , tỉnh Thanh Hoá, năm học 2022 - 2023)

Cho a, b, c, d thỏa mãn: $a=3b=4c=5d$ và $ab - c^2 - d^2 = 831$. Tính $a - b + c$

Lời giải

Vì $a=3b=4c=5d$

$$\Rightarrow \frac{a}{60} = \frac{3b}{60} = \frac{4c}{60} = \frac{5d}{60} \quad (BCNN(1;3;4;5)=60)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{60} = \frac{b}{20} = \frac{c}{15} = \frac{d}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{1200} = \frac{c^2}{225} = \frac{d^2}{144}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{ab}{1200} = \frac{c^2}{225} = \frac{d^2}{144} = \frac{ab - c^2 - d^2}{1200 - 225 - 144} = \frac{831}{831} = 1 \quad (\text{vì } ab - c^2 - d^2 = 831)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{144} = 1 \Rightarrow d^2 = 144 \Rightarrow d = \pm 12$$

$$+ \quad d = 12 \Rightarrow a = 60; b = 20; c = 15 \Rightarrow a - b + c = 55$$

$$+ \quad d = -12 \Rightarrow a = -60; b = -20; c = -15 \Rightarrow a - b + c = -55$$

Vậy: $a - b + c = -55$; $a - b + c = 55$

Câu 7. (HSG 7 huyện Lang Chánh, tỉnh Thanh Hoá, năm học 2022 - 2023)

1) Tìm x, y, z biết $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3}$ và $x - 3y + 4z = 4$.

2) Cho a, b, c thỏa mãn $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-a)(b-c)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = 2022$

Tính giá trị biểu thức $Q = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}$

Lời giải

1) Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3} = \frac{x-1}{2} = \frac{3y-9}{12} = \frac{4z-8}{12} = \frac{x-1-3y+9+4z-8}{2-12+12} = \frac{4}{2} = 2$$

Suy ra: $\frac{x-1}{2} = 2 \Rightarrow x = 5$;

$$\frac{y-3}{4} = 2 \Rightarrow y = 11$$

$$\frac{z-2}{3} = 2 \Rightarrow z = 8$$

Vậy $x = 5; y = 11; z = 8$

2) $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-a)(b-c)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = 2022$

$$\Rightarrow \frac{(b-a)-(c-a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c-b)-(a-b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(a-c)-(b-c)}{(c-a)(c-b)} = 2022$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 2022$$

$$\Rightarrow 2 \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right) = 2022$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 1011$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Bắc Giang, năm học 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết rằng: $\frac{(x-1)^3}{27} = \frac{(y-2)^3}{8} = \frac{(z-3)^3}{64}$ và $x-2y+3z=28$.

Lời giải

Ta có $\frac{(x-1)^3}{27} = \frac{(y-2)^3}{8} = \frac{(z-3)^3}{64}$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-1}{3}\right)^3 = \left(\frac{y-2}{2}\right)^3 = \left(\frac{z-3}{4}\right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{4}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{4} = \frac{x-2y+3z-6}{11} = \frac{22}{11} = 2$$

(vì $x-2y+3z=38$)

Từ đó suy ra $x=2.3+1=7; y=2.2+2=6; z=2.4+3=11$

Vậy $x=7; y=6; z=11$

Câu 9. (HSG 7 huyện Đức Thọ, tỉnh Hà Tĩnh, trường THCS Hoàng Xuân Hãn 2022 - 2023)

x, y, z biết $\frac{x}{y+z-5} = \frac{y}{x+z+3} = \frac{z}{x+y+2} = \frac{x+y+z}{2}$

Tìm

Lời giải

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x}{y+z-5} = \frac{y}{x+z+3} = \frac{z}{x+y+2} = \frac{x+y+z}{2} = \frac{x+y+z}{2(x+y+z)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x+y+z=1$$

$$\Rightarrow y+z=1-x; x+z=1-y; x+y=1-z$$

$$\frac{x}{1-x-5} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = -4-x \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = \frac{-4}{3}$$

$$\frac{y}{1-y+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2y = 4-y \Rightarrow 3y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

$$\frac{z}{1-z+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2z = 3-z \Rightarrow 3z = 3 \Rightarrow z = 1$$

Vậy $x = \frac{-4}{3}; y = \frac{4}{3}; z = 1$

Câu 10. (HSG 7 huyện Quế Võ, năm học 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết $\frac{x}{y} = \frac{9}{7}; \frac{y}{z} = \frac{7}{3}$ và $x - y + z = -15$.

Lời giải

Ta có $\frac{x}{y} = \frac{9}{7} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{7}$ và $\frac{y}{z} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{y}{7} = \frac{z}{3}$

Suy ra: $\frac{x}{9} = \frac{y}{7} = \frac{z}{3} = \frac{x - y + z}{9 - 7 + 3} = \frac{-15}{5} = -3$

Do đó:

$$x = -3.9 = -27$$

$$y = -3.7 = -21$$

$$z = -3.3 = -9$$

Vậy $x = -27; y = -21; z = -9$

Câu 11. (HSG 7 huyện Trĩ Linh, năm học 2022 – 2023)

Tìm x, y, z biết $5x = 6y; 3y = 2z$ và $5x - 7y + 9z = 250$

Lời giải

Ta có $3x = 2z \Rightarrow 6y = 4z$

Mà $5x = 6y \Rightarrow 5x = 6y = 4z \Rightarrow \frac{5x}{60} = \frac{6y}{60} = \frac{4z}{60} = \frac{x}{12} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15} = \frac{5x - 7y + 9z}{5.12 - 7.10 + 9.15} = \frac{250}{125} = 2$$

Do đó

$$\frac{x}{12} = 2 \Rightarrow x = 2.12 = 24$$

$$\frac{y}{10} = 2 \Rightarrow y = 2.10 = 20$$

$$\frac{z}{15} = 2 \Rightarrow z = 2.15 = 30$$

Vậy $x = 24; y = 20; z = 30$

Câu 12: (HSG 7 huyện Nghi Xuân, năm học 2022 - 2023)

Tìm các số hữu tỉ dương x, y, z thỏa mãn tất cả các điều kiện sau:

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{6}; \frac{yz}{y+z} = \frac{1}{9}; \frac{zx}{z+x} = \frac{1}{7}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x+y}{xy} = 6 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 6 \quad (1)$$

$$\frac{yz}{y+z} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{y+z}{yz} = 9 \Rightarrow \frac{1}{z} + \frac{1}{y} = 9 \quad (2)$$

$$\frac{zx}{z+x} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{z+x}{zx} = 7 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 7 \quad (3)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 11$$

Từ (1);(2);(3) suy ra:

$$\frac{1}{z} = 5 \Rightarrow z = \frac{1}{5}; \frac{1}{y} = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{4}; \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Do đó:

$$x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{4}; z = \frac{1}{5}$$

Vậy

Câu 13. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, tỉnh Thanh Hoá, năm học 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết $5x = 6y; 3y = 2z$ và $5x - 7y + 9z = 250$

Lời giải

$$\text{Ta có } 3x = 2z \Rightarrow 6y = 4z$$

$$\text{Mà } 5x = 6y \Rightarrow 5x = 6y = 4z \Rightarrow \frac{5x}{60} = \frac{6y}{60} = \frac{4z}{60} = \frac{x}{12} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15} = \frac{5x - 7y + 9z}{5.12 - 7.10 + 9.15} = \frac{250}{125} = 2$$

Do đó

$$\frac{x}{12} = 2 \Rightarrow x = 2.12 = 24$$

$$\frac{y}{10} = 2 \Rightarrow y = 2.10 = 20$$

$$\frac{z}{15} = 2 \Rightarrow z = 2.15 = 30$$

$$\text{Vậy } x = 24; y = 20; z = 30$$

Câu 14: (HSG 7 huyện Quốc Oai, năm học 2022 - 2023)

$$2x - y = \frac{2}{3}(x + y) \quad C = \frac{x^2 + 5^2}{y^2 + 4^2}$$

. Tính

1. Cho

Tìm x, y, z biết $(x + y):(y + z):(z + x) = 6:7:8$ và $x + y + z = 42$

2.

Lời giải

1. Ta có

$$2x - y = \frac{2}{3}(x + y) \Rightarrow 2x - \frac{2}{3}x = y + \frac{2}{3}y \Rightarrow 4x = 5y$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{5^2}{4^2}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{5^2}{4^2} = \frac{x^2 + 5^2}{y^2 + 4^2}$$

$$\Rightarrow C = \frac{x^2 + 5^2}{y^2 + 4^2} = \frac{25}{16}$$

2. Ta có $(x + y):(y + z):(z + x) = 6:7:8$

$$\Rightarrow \frac{x + y}{6} = \frac{y + z}{7} = \frac{x + z}{8}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x + y}{6} = \frac{y + z}{7} = \frac{x + z}{8} = \frac{2(x + y + z)}{21} = \frac{84}{21} = 4$$

$$\frac{x + y}{6} = 4 \Rightarrow x + y = 24 \quad \text{mà } x + y + z = 42 \Rightarrow z = 42 - 24 = 18$$

$$\frac{y + z}{7} = 4 \Rightarrow y + z = 28 \quad \text{mà } x + y + z = 42 \Rightarrow y = 42 - 28 = 14$$

$$\frac{x + z}{8} = 4 \Rightarrow x + z = 32 \quad \text{mà } x + y + z = 42 \Rightarrow z = 42 - 32 = 10$$

Vậy $(x; y; z) = (14; 10; 18)$

Câu 15. (HSG 7 huyện Đồng Xuân, năm học 2022 – 2023)

Cho $x + y + z = 2023$ và $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{7}$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}$.

Lời giải

Ta có:

$$P = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}$$

$$\Rightarrow P + 3 = \frac{x}{y+z} + 1 + \frac{y}{z+x} + 1 + \frac{z}{x+y} + 1$$

$$= \frac{x+y+z}{y+z} + \frac{y+z+x}{z+x} + \frac{z+x+y}{x+y}$$

$$= (x+y+z) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right)$$

$$= 2023 \cdot \frac{1}{7} = 289$$

$$\Rightarrow P = 289 - 3 = 286$$

Vậy, $P = 286$.

Câu 16. (HSG 7 huyện Tiền Hải , năm học 2022 – 2023)

Tìm $x; y; z$ biết $\frac{x}{4} = \frac{y}{7}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6}$ và .

Lời giải

$$\text{Vi } \frac{x}{4} = \frac{y}{7} \Rightarrow \frac{x}{20} = \frac{y}{35} \quad (1);$$

$$\frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{y}{35} = \frac{z}{42} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) Suy ra $\frac{x}{20} = \frac{y}{35} = \frac{z}{42}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{20} = \frac{y}{35} = \frac{z}{42} = \frac{x+y+z}{20+35+42} = \frac{39}{13} = 3$$

Do đó:

$$\Rightarrow \frac{x}{20} = 3 \Rightarrow x = 60$$

$$\Rightarrow \frac{y}{35} = 3 \Rightarrow y = 105$$

$$\Rightarrow \frac{z}{42} = 3 \Rightarrow z = 126$$

Vậy $x=60$; $y=105$; $z=126$

Câu 17. (HSG 7 huyện Gia Viễn , tỉnh Ninh Bình, năm học 2022 – 2023)

Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}, \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $2x - 3y + z = -6$.

Lời giải

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} \quad (1);$$

$$\frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \quad (2)$$

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20}.$$

Từ (1) và (2) ta có

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} = \frac{2x}{18} = \frac{3y}{36} = \frac{z}{20} = \frac{2x - 3y + z}{18 - 36 + 20} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{9} = -3 \Rightarrow x = 9.(-3) = -27$$

$$\frac{y}{12} = -3 \Rightarrow y = 12.(-3) = -36$$

$$\frac{z}{20} = -3 \Rightarrow z = 20.(-3) = -60.$$

Vậy $x=-27$; $y=-36$; $z=-60$

Câu 18. (HSG 7 huyện Quảng xương , tỉnh Thanh Hoá, năm học 2022 – 2023)

Tìm các số $x; y; z$ biết:

a) $\frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{x+z+1} = \frac{z}{x+y-2} = x+y+z$

b) $x:y:z = \frac{2}{5}:\frac{3}{4}:\frac{1}{6}$ và $x^2+y^2+z^2=24309$

Lời giải

a) $\frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{x+z+1} = \frac{z}{x+y-2} = x+y+z$ (1)

+ Nếu $x+y+z=0$ thì từ đề bài (1) suy ra $x=y=z=0$

+ Nếu $x+y+z \neq 0$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số nhau ta có :

$$\frac{x}{y+z+1} = \frac{y}{x+z+1} = \frac{z}{x+y-2} = \frac{x+y+z}{2(x+y+z)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{x+y+z}{2(x+y+z)} = x+y+z$ (*)

Từ (*) suy ra $x+y+z = \frac{1}{2}$

Thay vào đề bài tính được

$$\frac{x}{y+z+1} = \frac{x}{\frac{1}{2} - x + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{suy ra} \quad x = \frac{1}{2}$$

Tương tự : $y = \frac{1}{2} ; z = -\frac{1}{2}$

Vậy $(x; y; z) \in \left\{ (0; 0; 0); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right) \right\}$

Câu 19.(HSG 7 huyện Quỳnh Phụ , năm học 2022 – 2023)

Tìm các số x, y, z biết $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}; \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $3x - 2y + z = 46$.

Lời giải

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} \\ \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{20} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20}$$

Đặt $\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{20} = k \Rightarrow x = 9k; y = 12k; z = 20k$

Vì $3x - 2y + z = 46 \Rightarrow 3.9k - 2.12k + 20k = 46$

$$\Rightarrow 27k - 24k + 20k = 46$$

$$\Rightarrow 23k = 46$$

$$\Rightarrow k = 46 : 23 = 2$$

Do đó:

$$x = 2.9 = 18$$

$$y = 2.12 = 24$$

$$z = 2.20 = 40$$

Vậy: $x = 18; y = 24; z = 40$

Câu 2⁰. (HSG 7 huyện Văn Lâm , năm học 2022 – 2023)

Cho $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$. Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{a}{b+c} + \frac{a+b}{c} + \frac{b}{c+a}$.

Lời giải

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c}$$

Nếu $a+b+c \neq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2 \Rightarrow \frac{a}{b+c} = \frac{1}{2}; \frac{a+b}{c} = 2; \frac{b}{c+a} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow B = \frac{a}{b+c} + \frac{a+b}{c} + \frac{b}{c+a} = \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{2} = 3$$

$$\text{Nếu } a+b+c=0 \Rightarrow B = \frac{a}{b+c} + \frac{a+b}{c} + \frac{b}{c+a} = -3.$$

Vậy: + Nếu $a+b+c \neq 0$ thì $B=3$.

+ Nếu $a+b+c=0$ thì $B=-3$.

Câu 21. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ , năm học 2022 – 2023)

Cho $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$. Chứng minh $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2} \\ = & \frac{12x-8y}{16} = \frac{6z-12x}{9} = \frac{8y-6z}{4} = \frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{16+9+4} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-2y=0 \\ 2z-4x=0 \\ 4y-3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=2y \\ 2z=4x \\ 4y=3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \\ \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Vậy: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

Dạng 2: Chứng minh tỉ lệ thức

Câu 1. (HSG 7 huyện Nghĩa đàn, năm học 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (với a, b, c, d khác 0). Chứng minh rằng: $\left(\frac{a+b}{c+d} \right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

Lời giải

Cho $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (với a, b, c, d khác 0). Chứng minh rằng: $\left(\frac{a+b}{c+d} \right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

Đặt $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k \Rightarrow a = ck$; $b = dk$ (*)

Lần lượt thay (*) vào vế trái và vế phải của đẳng thức cần chứng minh, ta có:

$$+) \left(\frac{a+b}{c+d} \right)^2 = \left(\frac{ck+dk}{c+d} \right)^2 = \left(\frac{(c+d)k}{c+d} \right)^2 = k^2 \quad (1)$$

$$+) \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \frac{(ck)^2 + (dk)^2}{c^2 + d^2} = \frac{(c^2 + d^2)k^2}{c^2 + d^2} = k^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$ (đpcm)

Câu 2. (HSG 7 huyện Gia Viễn, tỉnh Ninh Bình, năm học 2022 - 2023)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, với $b \neq 0, d \neq 0; c \neq d$. Chứng minh rằng $\frac{(a-b)^{2023}}{a^{2023} - b^{2023}} = \frac{(c-d)^{2023}}{c^{2023} - d^{2023}}$.

Lời giải

Với $b \neq 0, d \neq 0; c \neq d$, thì

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{a^{2023}}{c^{2023}} = \frac{b^{2023}}{d^{2023}} = \frac{(a-b)^{2023}}{(c-d)^{2023}} \quad (2)$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a^{2023}}{c^{2023}} = \frac{b^{2023}}{d^{2023}} = \frac{(a-b)^{2023}}{(c-d)^{2023}} = \frac{a^{2023} - b^{2023}}{c^{2023} - d^{2023}}$$

$$\Rightarrow \frac{(a-b)^{2023}}{a^{2023} - b^{2023}} = \frac{(c-d)^{2023}}{c^{2023} - d^{2023}}$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Hiệp Hoà, năm học 2022 – 2023)

Cho các số thực a, b, c, d dương khác nhau thỏa mãn $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh $\frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{3a^2 + 2c^2}{3b^2 + 2d^2}$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{3a^2 + 2c^2}{3b^2 + 2d^2}$$

Do đó:

$$\frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{3a^2 + 2c^2}{3b^2 + 2d^2}$$

$$\text{Vậy: } \frac{a^2 - c^2}{b^2 - d^2} = \frac{3a^2 + 2c^2}{3b^2 + 2d^2}$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Điện Bàn, năm học 2022 – 2023)

Cho các số tự nhiên có hai chữ số $\overline{ab}$ và $\overline{bc}$ thỏa mãn điều kiện $\frac{b}{c} = \frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2}.$$

Lời giải

Ta có :

$$\frac{b}{c} = \frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{10a + b}{10b + c} = \frac{10a}{10b}, \text{ vậy } \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

$$\text{Suy ra } \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2}$$

Do đó

$$\frac{a}{c} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2},$$

$$\text{Vậy: } \frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Thiệu Hoá, tỉnh Thanh Hoá , năm học 2022 – 2023)

$$\text{Cho } \frac{3x - 2y}{4} = \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2}. \text{ Chứng minh } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{3x - 2y}{4} &= \frac{2z - 4x}{3} = \frac{4y - 3z}{2} \\ &= \frac{12x - 8y}{16} = \frac{6z - 12x}{9} = \frac{8y - 6z}{4} = \frac{12x - 8y + 6z - 12x + 8y - 6z}{16 + 9 + 4} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 2z - 4x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2y \\ 2z = 4x \\ 4y = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ \frac{x}{2} = \frac{z}{4} \\ \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Vậy: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

Câu 6. (HSG 7 huyện Đông Sơn, tỉnh Thanh Hoá, năm học 2022 – 2023)

Cho x, y, z là các số khác 0 và $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$. Chứng minh rằng: $x = y = z$

Lời giải

Vì x, y, z là các số khác 0 và $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{x}; \frac{y}{x} = \frac{x}{y}; \frac{z}{y} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{x} = \frac{z}{x}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x} = \frac{z}{x} = \frac{x+y+z}{y+z+x} = 1 \Rightarrow x = y = z$$

Dạng 3: Chứng minh bất đẳng thức

Câu 1. (HSG 7 huyện Chương Mỹ, tỉnh TP Hà Nội, trường 2022 - 2023)

Cho $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ với $a, b, c > 0$.

a) Chứng minh $M > 1$.

b) Chứng tỏ rằng M không phải là số nguyên.

Lời giải

a) Với $a, b, c > 0$ ta có $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}; \frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}; \frac{c}{c+a} > \frac{c}{c+a+b}$

$$M > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{c+a+b} = 1$$

Suy ra

Vậy $M > 1$.

b) Với $a, b, c > 0$ ta có $0 < \frac{a}{a+b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$

Tương tự: $0 < \frac{b}{b+c} < 1 \Rightarrow \frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}; \quad 0 < \frac{c}{c+a} < 1 \Rightarrow \frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}.$

Suy ra $M < \frac{a+c}{a+b+c} + \frac{b+a}{a+b+c} + \frac{c+b}{c+a+b} = 2$ Ta có $1 < M < 2$ nên M không phải là số nguyên

Dạng 4: Bài toán về dãy tỉ số bằng nhau và chia tỉ lệ

Câu 1. (HSG 7 huyện Tương Dương, năm học 2022 - 2023)

Ba lớp $7A, 7B, 7C$ cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp tỉ lệ $5:6:7$, nhưng sau đó chia theo tỉ lệ $4:5:6$ nên có một lớp nhận nhiều hơn 4 gói. Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

Lời giải

Gọi tổng số gói tăm mà ba lớp cùng nhau mua là x ($x \in \mathbb{N}^*$)

+) Gọi số gói tăm dự định chia cho 3 lớp $7A, 7B, 7C$ lúc đầu lần lượt là a, b, c (gói)
($a, b, c \in \mathbb{N}^*$).

Theo đề bài ta có: $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18}$

$\Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18}$ (1)

+) Gọi số gói tăm được chia cho 3 lớp $7A, 7B, 7C$ lúc sau lần lượt là a', b', c' (gói)
($a', b', c' \in \mathbb{N}^*$).

Theo đề bài ta có: $\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15}$

$\Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15} = \frac{x}{3}; c' = \frac{6x}{15}$ (2)

So sánh (1) và (2) ta có:

$a > a'; b = b'; c < c'$ nên lớp $7C$ nhận nhiều hơn dự định 4 gói.

$\Rightarrow c' - c = 4$ hay $\frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$ (thỏa mãn)

Vậy tổng số gói tăm 3 lớp đã mua là 360 gói.

Câu 2. (HSG 7 Huyện Thanh Trì, tỉnh Hà Nội, năm học 2022 - 2023)

Cho ba hình chữ nhật, biết diện tích hình thứ nhất và hình thứ hai tỉ lệ với 4 và 5, diện tích hình thứ hai và hình thứ ba tỉ lệ với 7 và 8. Hình thứ nhất và hình thứ hai có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là 27m, hình thứ hai và hình thứ ba có cùng chiều rộng, chiều dài của hình thứ ba là 24m. Tính diện tích mỗi hình chữ nhật đó.

Lời giải

Gọi diện tích ba hình chữ nhật lần lượt là S_1, S_2, S_3

Chiều dài, chiều rộng của ba hình tương ứng là $d_1, r_1, d_2, r_2, d_3, r_3$

Theo đề bài, ta có:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5}; \frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8}; d_1 = d_2; r_1 + r_2 = 27; r_2 = r_3; d_3 = 24$$

Từ $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{d_1 r_1}{d_2 r_2} = \frac{4}{5}$

Mà $d_1 = d_2 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{r_1}{4} = \frac{r_2}{5}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{r_1}{4} = \frac{r_2}{5} = \frac{r_1 + r_2}{4 + 5} = \frac{27}{9} = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 = 12 \\ r_2 = 15 \end{cases}$$

Lại có: $\frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{d_2 r_2}{d_3 r_3} = \frac{7}{8}$

Mà $r_2 = r_3 \Rightarrow \frac{d_2}{d_3} = \frac{7}{8}$

Mà $d_3 = 24 \Rightarrow d_2 = \frac{7}{8} \cdot 24 = 21$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_1 = d_2 = 21; d_3 = 24 \\ r_1 = 12; r_2 = r_3 = 15 \end{cases}$$

Diện tích hình chữ nhật thứ nhất là: $21 \cdot 12 = 252 (m^2)$

Diện tích hình chữ nhật thứ hai là: $21 \cdot 15 = 315 (m^2)$

Diện tích hình chữ nhật thứ ba là: $24 \cdot 15 = 360 (m^2)$

Câu 3. (HSG 7 huyện Nghĩa Đàn, năm học 2022 - 2023)

Bạn Tùng mua 62 viên bi gồm 3 loại. Loại I giá 5 nghìn đồng một viên, loại II giá 3 nghìn đồng một viên, loại III giá 2 nghìn đồng một viên. Hỏi bạn Tùng mua mỗi loại bao nhiêu viên bi biết rằng số tiền bạn Tùng mua mỗi loại bi là như nhau.

Lời giải

Gọi số viên bi loại I, loại II, loại III bạn Tùng mua được lần lượt là x, y, z (viên bi)
($x, y, z \in \mathbb{N}^*$)

Số tiền bạn Tùng mua bi loại I, loại II, loại III lần lượt là $5x; 3y; 2z$ (nghìn đồng)

Vì số tiền bạn Tùng mua mỗi loại bi là như nhau nên ta có: $5x = 3y = 2z$

$$\Rightarrow \frac{5x}{30} = \frac{3y}{30} = \frac{2z}{30} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15}$$

Vì bạn Tùng mua tất cả 62 viên bi nên $x + y + z = 62$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{10} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{6+10+15} = \frac{62}{31} = 2$$

$$\Rightarrow x = 6.2 = 12(TM)$$

$$y = 10.2 = 20(TM)$$

$$z = 15.2 = 30(TM)$$

Vậy số viên bi loại I, loại II, loại III bạn Tùng mua được lần lượt là 12; 20; 30 (viên bi).

Câu 4. (HSG 7 huyện Lang Giang năm học 2022 - 2023)

Một trường THCS có 3 lớp 7, biết $\frac{2}{3}$ số học sinh của lớp 7A bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh lớp 7B và $\frac{4}{5}$ số học sinh lớp 7C. Số học sinh lớp 7C ít hơn tổng số học sinh của hai lớp 7A và 7B là 57 học sinh. Số học sinh của khối 7 là bao nhiêu ?

Lời giải

Gọi số học sinh của 3 lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là x, y, z (học sinh), ($x, y, z \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ta có:

$$\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y = \frac{4}{5}z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y \\ \frac{3}{4}y = \frac{4}{5}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x = 9y \\ 15y = 16z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{9} = \frac{y}{8} \\ \frac{y}{16} = \frac{z}{15} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{18} = \frac{y}{16} \\ \frac{y}{16} = \frac{z}{15} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15}$$

$$\text{Mà } x + y - z = 57$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{18+16+15} = \frac{57}{19} = 3$$

$$\Rightarrow x = 54; y = 48; z = 45$$

Vậy số học sinh của khối 7 là: $54+48+45 = 147$ (học sinh)

Câu 5. (HSG 7 huyện Quốc Oai, năm học 2022 – 2023)

Một công trường dự định phân chia số đất cho ba đội I, II, III tỉ lệ với $7; 6; 5$. Nhưng sau đó vì số người của các đội thay đổi nên đã chia lại tỉ lệ $6; 5; 4$. Như vậy có một đội làm nhiều hơn so với dự định là $6m^3$. Tính tổng số đất đã phân chia cho các đội.

Lời giải

Gọi tổng số đất đã phân chia cho các đội là $x(m^3); x > 0$

Số đất dự định chia cho 3 đội I, II, III lần lượt là $a, b, c(m^3); a, b, c > 0$

$$\frac{a}{7} = \frac{b}{6} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18}$$

Ta có

$$\Rightarrow a = \frac{7x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{5x}{18} \quad (1)$$

Số đất sau đó chia cho 3 đội I, II, III lần lượt là $a', b', c'(m^3)$. ĐK: $a', b', c' > 0$

$$\frac{a'}{6} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{4} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15}$$

Ta có

$$\Rightarrow a' = \frac{6x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{4x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a < a', b = b', c > c'$ nên đội I nhận nhiều hơn lúc đầu

$$a - a' = 6 \text{ hay } \frac{7x}{18} - \frac{6x}{15} = 6$$

Vì

$$\Rightarrow \frac{x}{90} = 4 \Rightarrow x = 360$$

Vậy tổng số đất đã phân chia cho các đội là $360m^3$ đất.

Câu 6. (HSG 7 huyện Thanh Oai, năm học 2022 – 2023)

Ba lớp 7A, 7B, 7C có tất cả 127 học sinh. Nếu đưa $\frac{1}{3}$ số học sinh của lớp 7A, $\frac{2}{7}$ số học sinh của lớp 7B và $\frac{1}{4}$ số học sinh của lớp 7C đi thì số học sinh còn lại của 3 lớp bằng nhau. Tính số học sinh của mỗi lớp lúc đầu.

Lời giải

Gọi số học sinh của ba lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là a, b, c (học sinh), $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

Ba lớp 7A, 7B, 7C có tất cả 127 học sinh nên $a + b + c = 127$

Nếu đưa $\frac{1}{3}$ số học sinh của lớp 7A, $\frac{2}{7}$ số học sinh của lớp 7B và $\frac{1}{4}$ số học sinh của lớp 7C đi thì số học sinh còn lại của 3 lớp bằng nhau nên ta có:

$$a - \frac{1}{3}a = b - \frac{2}{7}b = c - \frac{1}{4}c$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}a = \frac{5}{7}b = \frac{3}{4}c \Rightarrow \frac{2a}{3 \cdot 30} = \frac{5b}{7 \cdot 30} = \frac{3c}{4 \cdot 30} \Rightarrow \frac{a}{45} = \frac{b}{42} = \frac{c}{40}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{a}{45} = \frac{b}{42} = \frac{c}{40} = \frac{a+b+c}{45+42+40} = \frac{127}{127} = 1$$

Do đó $a = 45, b = 42, c = 40$ thỏa mãn điều kiện

Vậy số học sinh của ba lớp 7A, 7B, 7C lúc đầu lần lượt là 45; 42; 40 (học sinh)

Câu 7. (HSG 7 huyện Nghi Lộc, năm học 2022 – 2023)

Cuối năm công ty A thưởng 45 triệu đồng cho ba tổ lao động xuất sắc. Biết rằng số tiền thưởng của tổ 1 và tổ 3 tỷ lệ thuận với 5 và 4, số tiền thưởng của tổ 2 và tổ 3 tỉ lệ nghịch với $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{2}$. Tính số tiền thưởng của mỗi tổ.

Lời giải

Gọi số tiền thưởng của ba tổ công nhân lần lượt là x, y, z (triệu đồng) $x, y, z > 0$

Tổng số tiền thưởng của ba tổ là 45 triệu đồng nên ta có : $x + y + z = 45$

Số tiền thưởng của tổ 1 và tổ 3 tỷ lệ thuận với 5 và 4 nên $\frac{x}{5} = \frac{z}{4}$

Số tiền thưởng của tổ 2 và tổ 3 tỉ lệ nghịch với $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{2}$ ta được $y \cdot \frac{1}{3} = z \cdot \frac{1}{2}$ hay $\frac{y}{6} = \frac{z}{4}$

Suy ra $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{4}$

Áp dụng tính chất của dãy tỷ số bằng nhau : $\frac{x}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{5+6+4} = \frac{45}{15} = 3$

Suy ra $x = 5.3 = 15$; $y = 6.3 = 18$; $z = 4.3 = 12$ (thỏa mãn)

Vậy số tiền thưởng của ba tổ công nhân lần lượt là 15 triệu đồng , 18 triệu đồng, 12 triệu đồng.

Câu 8.(HSG 7 huyện Hoàng Mai, năm học 2022 – 2023)

Ông A chia một khu đất thành 3 mảnh hình chữ nhật có diện tích bằng nhau cho ba người con trai. Biết rằng chiều rộng của các mảnh đất lần lượt là 6m , 8m , 10m . Tổng chiều dài các mảnh đất là 47m . Tính diện tích khu đất đó.

Lời giải

Gọi chiều dài của 3 mảnh đất lần lượt là x, y, z . $(0 < x, y, z < 47)(m)$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $0 < x < y < z$.

Vì các hình chữ nhật có diện tích bằng nhau nên chiều dài và chiều rộng của mỗi hình chữ nhật ứng với hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Do đó ta có

$$10x = 8y = 6z \Rightarrow \frac{10x}{120} = \frac{8y}{120} = \frac{6z}{120} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{20}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta lại có

$$\frac{x}{12} = \frac{y}{15} = \frac{z}{20} = \frac{x+y+z}{12+15+20} = \frac{47}{47} = 1$$

Suy ra $x = 12, y = 15, z = 20$

Vậy ta có các mảnh đất hình chữ nhật với kích thước như sau

(rộng, dài) $\in \{(6, 20); (8, 15); (10, 12)\}$

Các mảnh đất này có diện tích bằng nhau và bằng $6.20 = 120 (m^2)$

Vậy diện tích khu đất là $3.120 = 420 (m^2)$

Câu 9.(HSG 7 huyện Vĩnh Lộc, năm học 2022 – 2023)

Ba lớp $7A, 7B, 7C$ cùng mua một số gói tẩy từ thiện, lúc đầu số gói tẩy dự định chia cho ba lớp với tỉ lệ $5:6:7$ nhưng sau đó chia theo tỉ lệ $4:5:6$ nên có một lớp nhận nhiều hơn 4 gói. Tính tổng số gói tẩy mà ba lớp đã mua

Lời giải

Gọi tổng số gói tẩy 3 lớp cùng mua là $x (x \in \mathbb{N}^*)$

Số gói tẩy dự định chia cho 3 lớp $7A, 7B, 7C$ lúc đầu lần lượt là a, b, c

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18}$$

Ta có:

$$\Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' , ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15}$$

$$a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a'; b = b'; c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

$$c' - c = 4 \Rightarrow \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow x = 360(tm)$$

Vậy

Vậy số gói tăm 3 lớp đã mua là 360 gói.

Câu 10.(HSG 7 huyện Tiền Hải, năm học 2022 – 2023)

Ba lớp $7A, 7B, 7C$ cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp tỉ lệ với $5:6:7$ nhưng sau đó chia theo tỉ lệ $4:5:6$ nên có một lớp nhận nhiều hơn dự định 12 gói. Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

Lời giải

Gọi tổng số gói tăm 3 lớp cùng mua là x (x là số tự nhiên khác 0)

Số gói tăm dự định chia cho 3 lớp $7A, 7B, 7C$ lúc đầu lần lượt là: a, b, c

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18} = \frac{x}{3}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' , ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{18} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15} = \frac{x}{3}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $a > a'; b = b'; c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

Do đó: $c' - c = 12$ hay $\frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 12 \Rightarrow x = 1080$ (thỏa mãn).

Vậy số gói tằm 3 lớp đã mua là 1080 gói.

Câu 11. (HSG 7 huyện Điện Bàn, năm học 2022 – 2023)

Một người đi từ A đến B với vận tốc 4 km/h và dự định đến B vào lúc 11 giờ 45 phút. Sau khi đi được $\frac{4}{5}$ quãng đường thì người đó đi với vận tốc 3 km/h nên đến B lúc 12 giờ 00 phút cùng ngày. Em hãy tính chiều dài quãng đường AB và cho biết người đó khởi hành từ A lúc mấy giờ?

Lời giải

Gọi t_1 là thời gian dự định để đi hết $\frac{1}{5}$ quãng đường cuối cùng;

Gọi t_2 là thời gian thực tế để đi hết $\frac{1}{5}$ quãng đường cuối cùng;

Vì cùng quãng đường thì thời gian và vận tốc là hai đại lượng tỉ lệ nghịch. Theo đề ta có tỉ lệ

$$\text{thức } \frac{t_2}{4} = \frac{t_1}{3}$$

Vì thời gian thực tế đến B trễ hơn dự định 15 phút nên ta có $t_2 - t_1 = 15 \text{ phút} = \frac{1}{4} \text{ h}$,

$$\text{kết hợp } \frac{t_2}{4} = \frac{t_1}{3} = \frac{t_2 - t_1}{4 - 3} = \frac{1}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{3}{4} \text{ h}$$

Độ dài quãng đường AB là $\frac{3}{4} \cdot 4 \cdot 5 = 15 \text{ km}$

Thời gian dự định đi từ A đến B là $15 : 4 = 3 \text{ h } 45 \text{ ph}$

Người đó khởi hành tại A vào lúc $11 \text{ h } 45 \text{ ph} - 3 \text{ h } 45 \text{ ph} = 8 \text{ h } 00 \text{ ph}$

Câu 12. (HSG 7 tỉnh Bắc Ninh, năm học 2022 – 2023)

Ba lớp 7 ở một trường trung học cơ sở có tất cả 147 học sinh. Nếu đưa $\frac{1}{3}$ số học sinh của lớp $7A$, $\frac{1}{4}$ số học sinh lớp $7B$ và $\frac{1}{5}$ số học sinh lớp $7C$ đi thi học sinh giỏi cấp huyện thì số học sinh còn lại của ba lớp bằng nhau. Tính số học sinh của mỗi lớp.

Lời giải

Gọi x, y, z lần lượt là số học sinh của ba lớp 7A, 7B, 7C.

$$x + y + z = 147 \quad \frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y = \frac{4}{5}z \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15}$$

Theo bài ta có

và

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{18+16+15} = \frac{147}{49} = 3$$

$$x = 18.3 = 54 \quad y = 16.3 = 48 \quad z = 15.3 = 45$$

Suy ra

$$54 \quad 48 \quad 45$$

Vậy, số học sinh của ba lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là 54 em, 48 em, 45 em.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>