

Câu I (3,0 điểm).

1). Giải phương trình

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} + 2\sqrt{x^2-4} = 2(3-x).$$

2). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1 \\ x^2 + 2xy - y^2 - 3x - y = -2. \end{cases}$$

Câu II (3,0 điểm).

1). Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$x^2 - xy + y^2 = x^2y^2 - 5.$$

2). Với $x; y; z$ là các số thực thỏa mãn $x + y + z + xy + yz + zx = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{4+x^4} + \sqrt{4+y^4} + \sqrt{4+z^4}.$$

Câu III (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn $VABC$ nội tiếp đường tròn (O) . $M; N$ là hai điểm thuộc cung nhỏ $\widehat{AC}$ sao cho MN song song với AC và tia BM nằm giữa hai tia $BA; BN$. BM giao AC tại P . Gọi Q là một điểm thuộc cung nhỏ $\widehat{BC}$ sao cho PQ vuông góc với BC . QN giao AC tại R .

1). Chứng minh rằng bốn điểm $B; P; R; Q$ cùng thuộc một đường tròn.

2). Chứng minh rằng BR vuông góc với AQ .

3). Gọi F là giao của AQ và BN . Chứng minh rằng $\angle AFB = \angle BPQ + \angle BR$.

Câu IV (1,0 điểm). Cho $a; b; c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{11a^3 - b^3}{4a^2 + ab} + \frac{11b^3 - c^3}{4b^2 + bc} + \frac{11c^3 - a^3}{4c^2 + ca} \geq 2(a+b+c).$$

.....HẾT.....

LỜI GIẢI – NHẬN XÉT – BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Câu I.

1). Điều kiện $x \geq 2$.

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} > 0$$

$$\text{Ta có } t^2 = x+2 + x-2 + 2\sqrt{x^2-4} = 2x + 2\sqrt{x^2-4}$$

$$\text{Phương trình đã cho tương đương } \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} + 2x + 2\sqrt{x^2-4} = 6$$

$$\text{Ta có } t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ hoặc } t = -3 (\text{loại}).$$

$$\text{Với } t = 2 \text{ ta có } \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = 2$$

$$\text{Do điều kiện } x \geq 2 \text{ ta có } \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} \geq \sqrt{4} + \sqrt{0} = 2.$$

Suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Nhận xét: Bài toán sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ, đưa phương trình ban đầu về phương trình bậc hai tìm ẩn, sau đó dùng phương pháp nâng lũy thừa tìm nghiệm của phương trình ban đầu.

Nhắc lại kiến thức và phương pháp:

- Cách giải phương trình bậc hai tổng quát $at^2 + bt + c = 0$.
- Hằng đẳng thức $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ và $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- Phương trình có dạng $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = m$, với m là số thực dương thì có hai cách nâng lũy thừa như sau:

Cách 1. Bình phương hai vế của phương trình, ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} &= m \quad \begin{cases} f(x) \geq 0; g(x) \geq 0 \\ f(x) + g(x) + 2\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} = m^2 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0; g(x) \geq 0 \\ 4f(x) \cdot g(x) = m^2 - f(x) - g(x) \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_1 \\ x = x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Cách 2. Chuyển $g(x)$ sang VP rồi bình phương, ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{f(x)} &= m - \sqrt{g(x)} \quad \begin{cases} m^3 \geq \sqrt{g(x)} \\ f(x) = m^2 - 2m\sqrt{g(x)} + g(x) \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} m^3 \geq \sqrt{g(x)} \\ 2m\sqrt{g(x)} = m^2 - f(x) + g(x) \end{cases} \quad \begin{cases} m^3 \geq \sqrt{g(x)} \\ 4m^2 g(x) = m^2 - f(x) + g(x) \end{cases} \end{aligned}$$

Chú ý:

- Nếu $f(x) - g(x) = k$; k là hằng số thì ta có thể sử dụng cách liên hợp như sau: $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = m$ (i).

$$\begin{aligned} & \Rightarrow (\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)})(\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}) = m(\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}) \\ & \Rightarrow f(x) - g(x) = m(\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}) \Rightarrow \sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \frac{k}{m} \text{ (ii)}. \end{aligned}$$

$$\text{Lấy (i) + (ii), ta được } 2\sqrt{f(x)} = m + \frac{k}{m} \Rightarrow 4f(x) = m^2 + \frac{k^2}{m^2}.$$

- Nếu $c^3 - a^3 - b^3$ và $x^3 - c$ suy ra $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{c+a} + \sqrt{c+b}$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = c$.

Ý tưởng: Bài toán xuất hiện ba căn thức bậc hai ở VT là $\sqrt{x+2}$, $\sqrt{x-2}$ và $\sqrt{x^2-4}$, áp dụng hằng đẳng thức $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ dễ thấy được rằng $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2}$, hay nói cách khác căn thức cuối cùng chính là tích của hai căn thức còn lại. Đồng thời nếu chuyển $2(3-x)$ từ VP sang VT thì sẽ xuất hiện $2x$, mà $2x = x+2 + x-2 = (\sqrt{x+2})^2 + (\sqrt{x-2})^2$ do đó VT của phương trình ban đầu có:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{x+2})^2 + (\sqrt{x-2})^2 + 2\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} - 6 = 0. \\ & \Rightarrow (\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})^2 + \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} - 6 = 0 \text{ (*)}. \end{aligned}$$

- Đặt $t = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} > 0$ thì phương trình (*) được viết lại thành

$$\begin{cases} t > 0 \\ t^2 + t - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > 0 \\ (t-2)(t+3) = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 2.$$

- Với $t = 2$ suy ra $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = 2 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x + 2\sqrt{x^2-4} = 4 \end{cases}$

$$\hat{U} \begin{cases} x^3 - 2 \\ \sqrt{x^2 - 4} = 2 - x \end{cases} \hat{U} x = 2.$$

Đến đây có thể đánh giá như lời giải là:

$$x^3 - 2 \text{ p } \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = 2 \text{ p } \sqrt{4} + \sqrt{0} = 2 \text{ p } x = 2.$$

- Vì $x+2 - (x-2) = 4$ nên giải phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = 2$ theo chú ý như sau:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = 2 \hat{U} 4 = 2(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})$$

$$\hat{U} \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} = 2 \text{ p } 2\sqrt{x+2} = 4 \hat{U} x = 2.$$

Bài toán kết thúc.

Bài tập tương tự:

1. Giải phương trình $2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x^2-1} = 3 - 2x$.

Đáp số: phương trình vô nghiệm thực.

2. Giải phương trình $2x^2 + 5 + 2\sqrt{x^2 + x - 2} = 5\sqrt{x-1} + 5\sqrt{x+2}$.

$$\text{Đáp số: } x = \frac{17}{16}.$$

2). Cộng từng vế hai phương trình ta có $2x^2 + xy - 3x - y = -1$

$$\hat{U} x(2x+y) - x - (2x+y) + 1 = 0$$

$$\hat{U} (x-1)(2x+y-1) = 0.$$

TH1: $x = 1 \text{ p } y^2 - y = 0 \text{ p } y = 0$ hoặc $y = 1$ (thỏa mãn).

TH2: $2x + y = 1 \text{ p } y = 1 - 2x$, suy ra

$$x^2 - x(1-2x) + (1-2x)^2 = 1 \hat{U} 7x^2 - 5x = 0 \hat{U} \begin{cases} x = 0 \text{ p } y = 1 \\ x = \frac{5}{7} \text{ p } y = -\frac{3}{7} \end{cases}$$

$$\text{Đáp số } (x; y) = (1; 0), (1; 1), (0; 1), \frac{5}{7}; -\frac{3}{7}.$$

Nhận xét: Bài toán sử dụng phương pháp hằng số biến thiên tìm ra được một phương trình biến đổi mối liên hệ giữa hai biến và từ đó thế ngược lại một trong hai phương trình, tìm nghiệm của hệ.

Ý tưởng: Đây là hệ phương trình bậc hai, trước hết ta sẽ đi tìm nhân tử ở từng phương trình một trong hệ, nếu công việc này thất bại. Ta sẽ nghĩ đến việc kết hợp cả hai phương trình. Và điều tối ưu ta nghĩ tới sẽ là xét delta theo ẩn x hoặc y từng phương trình (bạn đọc từ làm) khi đó không tìm được nhân tử $x; y$. Chính vì thế, còn hướng duy nhất đó là kết hợp hai phương trình của hệ, giả sử tồn tại k thỏa mãn phương trình:

$$k(x^2 - xy + y^2 - 1) + x^2 + 2xy - y^2 - 3x - y + 2 = 0$$

$$\hat{U} (1+k)x^2 + (2-k)y - 3x + (k-1)y^2 - y + 2 - k = 0 \quad (i).$$

Và ta coi (i) là phương trình bậc hai ẩn x đồng thời khi xét D_x nó phải là một số chính phương. Ta có:

$$\begin{aligned} D_x &= (2-k)y - 3)^2 - 4(1+k)(k-1)y^2 - y + 2 - k \\ &= (5k^2 - 4k)y^2 - (10k - 8)y + 4k^2 - 4k + 1. \end{aligned}$$

Để D_x là số chính phương khi hệ số y^2 phải là một chính phương, tức là ta đi giải phương trình nghiệm nguyên $5k^2 - 4k = m^2$. Không khó để ta thấy rằng $k = 1 \text{ p } m = 1$ thỏa mãn. Hay nói cách khác: $D_x = (y-1)^2$. Khi đó

$$\text{phương trình } (i) \hat{U} x^2 + (y-3)x + 1 - y = 0 \hat{U} \begin{cases} x = \frac{3-y+y-1}{2} = 1 \\ x = \frac{3-y-y+1}{2} = 2-y \end{cases}.$$

Việc còn lại là thế $x = 1$ hoặc $x + y = 2$ vào phương trình một để tìm nghiệm của hệ phương trình.

Bài toán kết thúc.

Bài tập tương tự:

1. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 3y^2 + 9 \\ x^2 + y^2 = x - 4y \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = \left(\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}; \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2} \right)$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x = 0 \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

Đáp số: $(x; y) = (-3 \pm 2\sqrt{2}; 1 \mp \sqrt{2}), (3 \pm \sqrt{5}; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2})$

Câu II.

1). Để thấy với $x = 0$ hoặc $y = 0$ không thỏa mãn.

Xét $|x|, |y| \geq 1$ do vai trò như nhau, giả sử $|x| \geq |y|$

Khi đó ta có $x^2 - xy + y^2 \leq 3x^2$

Suy ra $x^2y^2 = x^2 - xy + y^2 + 5 \leq 8x^2 \Rightarrow y^2 \leq 8 \Rightarrow |y| \in \{\pm 1, \pm 2\}$.

+ Nếu $y = 1 \Rightarrow x^2 - x + 6 = x^2 \Rightarrow x = 6$.

+ Nếu $y = -1 \Rightarrow x^2 + x + 6 = x^2 \Rightarrow x = -6$.

+ Nếu $y = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = 4x^2 - 5 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$ loại.

+ Nếu $y = -2 \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = 4x^2 - 5 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$ loại.

Đáp số: $(x; y) = (6; 1), (-6; -1), (1; 6), (-1; -6)$.

Nhận xét. Bài toán nghiệm nguyên giải bằng phương pháp giới hạn.

Nhắc lại kiến thức và phương pháp.

- Khi thay thế x bởi y và ngược lại ta thấy đẳng thức không đổi thì vai trò của các biến là như nhau. Để thấy với $x = 0$ hoặc $y = 0$ không thỏa mãn.

Xét $|x|, |y| \geq 1$ do vai trò như nhau, giả sử $|x| \geq |y|$.

Khi đó ta có $x^2 - xy + y^2 \leq 3x^2$

- Thay thế vế này bởi vế kia để áp dụng tính chất của vế còn lại và biến đổi theo tính chất, suy ra

$$x^2y^2 = x^2 - xy + y^2 + 5 \leq 8x^2 \Rightarrow y^2 \leq 8 \Rightarrow |y| \in \{\pm 1, \pm 2\}.$$

- Tìm và chọn ra các giá trị của biến

+ Nếu $y = 1 \Rightarrow x^2 - x + 6 = x^2 \Rightarrow x = 6$.

+ Nếu $y = -1 \Rightarrow x^2 + x + 6 = x^2 \Rightarrow x = -6$.

+ Nếu $y = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = 4x^2 - 5 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$ loại.

+ Nếu $y = -2 \Rightarrow x^2 + 2x + 4 = 4x^2 - 5 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$ loại.

2). Trước hết ta chứng minh với $x; y; z; t$ bất kì thì

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{z^2 + t^2} \geq \sqrt{(x+z)^2 + (y+t)^2} \quad (*).$$

Thật vậy, bất đẳng thức (*) tương đương với

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2\sqrt{(x^2 + y^2)(z^2 + t^2)} \geq x^2 + 2xz + z^2 + y^2 + 2yt + t^2$$

$$\hat{U} \sqrt{(x^2 + y^2)(z^2 + t^2)}^3 \quad xz + yt$$

Đúng vì theo bất đẳng thức Bunhia cốp xki

$$\sqrt{(x^2 + y^2)(z^2 + t^2)}^3 \sqrt{(xz + yt)^2} = |(xz + yt)|^3 (xz + yt).$$

Áp dụng (*) ta có $P = \sqrt{4 + x^4} + \sqrt{4 + y^4} + \sqrt{4 + z^4}$

$$\begin{aligned} & \geq \sqrt{(2+2)^2 + (x^2 + y^2)^2} + \sqrt{4 + z^4} \\ & \geq \sqrt{(2+2+2)^2 + (x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ & = \sqrt{36 + (x^2 + y^2 + z^2)^2}. \end{aligned}$$

Ta có $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3 \geq 2x + 2y + 2z + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3 \geq 2.6 = 12 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 3.$$

Từ đó $P \geq \sqrt{36 + 9} = 3\sqrt{5}$.

Dấu “=” xảy ra $x = y = z = 1$.

Vậy $R_{\min} = 3\sqrt{5}$.

Nhận xét: Bài toán sử dụng kết quả mở rộng (hay phát triển từ bất đẳng thức Bunhiacopxki) kết hợp với kỹ thuật chọn điểm rơi (để đánh giá tổng các đại lượng không âm) để tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

Nhắc lại kiến thức và phương pháp:

- Bất đẳng thức Bunhiacopxki cho bốn số $x; y; z; t$

$$\sqrt{((x^2 + y^2)(z^2 + t^2))^3} \quad xz + yt.$$

- Phát triển từ bất đẳng thức trên, ta có:

$$2\sqrt{(x^2 + y^2)(z^2 + t^2)}^3 \quad xz + yt \geq 2\sqrt{(x^2 + y^2)(z^2 + t^2)}^3 \quad 2xz + 2yt$$

$$\geq (x^2 + y^2) + 2\sqrt{(x^2 + y^2)(z^2 + t^2)} + 2(z^2 + t^2) \geq (x + z)^2 + (y + t)^2$$

$$\geq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{z^2 + t^2} \geq (x + z)^2 + (y + t)^2$$

$$\geq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{z^2 + t^2} \geq \sqrt{(x + z)^2 + (y + t)^2} \quad (*).$$

Ý tưởng: Bài toán ở cả biểu thức cực trị cũng như giả thiết, vai trò của các biến là như nhau do đó điểm rơi sẽ xảy

ra tại $x = y = z = k > 0$. Và thay ngược lại giả thiết, ta có: $\begin{cases} 3k^2 + 2k - 6 = 0 \\ k > 0 \end{cases} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x = y = z = 1$. Với điểm

rơi này, ta sẽ đánh giá thoải mái hơn. Đầu tiên, xét tới biểu thức P có dạng bậc bốn vì thế ta đánh giá để bậc bé nhất có thể. Áp dụng bất đẳng thức (*), xét cho hai căn thức đầu của P , có:

$$\sqrt{4 + x^4} + \sqrt{4 + y^4} \geq \sqrt{(2+2)^2 + (x^2 + y^2)^2} = \sqrt{4^2 + (x^2 + y^2)^2}$$

$$\sqrt{4^2 + (x^2 + y^2)^2} + \sqrt{4 + z^4} \geq \sqrt{36 + (x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

Suy ra $P \geq \sqrt{36 + (x^2 + y^2 + z^2)^2}$, và bây giờ từ giả thiết ta chỉ cần tìm được $x^2 + y^2 + z^2 \geq m$ coi như bài toán

đã kết thúc. Thật vậy, với điểm rơi ban đầu tìm được ta sẽ có các đại lượng không âm là:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geq 0 \text{ và } (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0.$$

Cộng hai đánh giá trên theo từng vế và khai triển bình phương ta được:

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3 \geq 2x + 2y + 2z + 2xy + 2yz + 2zx$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 3 \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) + 3.$$

$$\text{Do đó } P \geq \sqrt{36 + (x^2 + y^2 + z^2)^2} \geq 3\sqrt{5} \Leftrightarrow P_{\min} = 3\sqrt{5} \text{ ở } x = y = z = 1.$$

Bài toán kết thúc.

Bài tập tương tự:

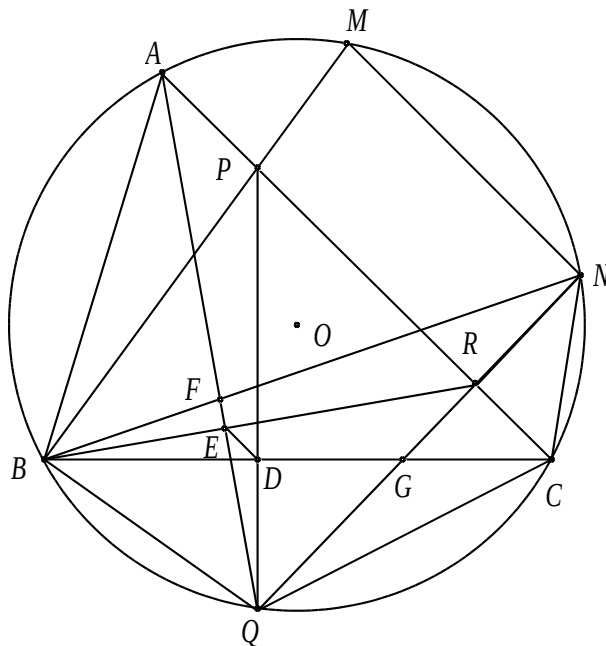
1. Cho x, y là hai số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{9+x^2} + \sqrt{9+y^2} \geq \sqrt{36+(x+y)^2}.$$

2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = x + y + z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt{9+x^2} + \sqrt{9+y^2} + \sqrt{9+z^2}.$$

Câu III.



1). Tứ giác $BMNQ$ nội tiếp suy ra $\angle BMN + \angle BQN = 180^\circ$.

Mà $\angle BPR = \angle BMN$ (do $\angle MNP = \angle BCP$).

Từ đó $\angle BPR + \angle BQN = 180^\circ$, suy ra tứ

giác $BPRQ$ nội tiếp. Tức là B, P, R, Q cùng thuộc một đường tròn.

Nhận xét. Chứng minh bốn điểm cùng thuộc một đường tròn đưa về chứng minh tứ giác tạo bởi bốn điểm là tứ giác nội tiếp bằng dấu hiệu nhận biết có tổng hai góc đối diện bằng 180° .

Nhắc lại kiến thức và phương pháp.

- Tứ giác nội tiếp một đường tròn có tổng hai góc đối diện bằng 180° .

Tứ giác $BMNQ$ nội tiếp đường tròn (O) nên ta có $\angle BMN + \angle BQN = 180^\circ$.

- Một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song tạo ra các góc đồng vị bằng nhau.

$AC \parallel MN$ nên ta có $\angle BPR = \angle BMN$ (hai góc đồng vị).

- Tứ giác có tổng hai góc đối diện bằng 180° là tứ giác nội tiếp.

Ta có $\angle BPR + \angle BQN = 180^\circ$, suy ra tứ giác $BPRQ$ hay bốn điểm B, P, R, Q cùng thuộc một đường tròn.

2). Gọi PQ giao BC tại D , AQ giao BR tại E ta có các biến đổi góc sau

$$\angle EQD = \angle QDB = \angle QCB = \angle RBC = \angle EBD.$$

Vậy tứ giác $BEDQ$ nội tiếp, suy ra $\angle BEQ = \angle BDQ = 90^\circ \Rightarrow BR \perp AQ$.

Nhận xét. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc ta chứng minh góc tạo bởi hai đường thẳng đó bằng 90° .
Nhắc lại kiến thức và phương pháp.

- Hai góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.
+ $\angle PQB = \angle PRB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BP}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BPRQ$).
+ $\angle AQB = \angle ACB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O))
- Góc ngoài tại một đỉnh của tam giác bằng tổng hai góc trong không kề với nó.
Góc $\angle BRA$ là góc ngoài tại đỉnh B của tam giác $DBRC$ nên $\angle BRA = \angle RBC + \angle RCB$.
- Tứ giác có hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn một cạnh dưới hai góc bằng nhau là tứ giác nội tiếp.
Ta có $\angle PQB - \angle AQB = \angle PRB - \angle ACB = \angle RBC + \angle RCB - \angle ACB = \angle RBC$
 $\hat{U} \angle PQA = \angle RBC$ suy ra tứ giác $EDQB$ có hai đỉnh B và Q cùng nhìn cạnh ED dưới hai góc bằng nhau nên $EDQB$ là tứ giác nội tiếp.
 $\angle BEQ = \angle BDQ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BQ}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $EDQB$).
 Mà $\angle BDQ = 90^\circ$ (do PQ vuông góc với BC tại D), suy ra $\angle BEQ = 90^\circ$ hay $BR \perp AQ$.

3). Ta có $\angle BPQ = \angle BRQ = \angle RBN + \angle RNB = \angle EBF + \angle BAE = 90^\circ - \angle BFE + 90^\circ - \angle ABE$
 $= 180^\circ - \angle BFE - \angle ABE = \angle AFB - \angle ABR$.

Do đó $\angle AFB = \angle BPQ + \angle ABR$.

Nhận xét. Chứng minh tổng của hai góc bằng một góc khác, trong bài này ta đưa về chứng minh hiệu của hai góc bằng góc còn lại $a = b + c \Leftrightarrow c = a - b$.

Nhắc lại kiến thức và phương pháp.

Với phần này, ta chỉ sử dụng những kiến thức và các dữ kiện đã cho ở đề bài và tìm ra ở các phần trước đó.

- $\angle BPQ = \angle BRQ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BQ}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BPRQ$).
 - $\angle BRQ = \angle RBN + \angle RNB$ (tính chất góc ngoài tam giác).
 - $\angle RNB = \angle BAE$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{BQ}$ của đường tròn (O))
- suy ra $\angle BPQ = \angle BRQ = \angle RBN + \angle RNB = \angle EBF + \angle BAE = (90^\circ - \angle BFE) + (90^\circ - \angle ABE)$
 $= (180^\circ - \angle BFE) - \angle ABE = \angle AFB - \angle ABR \hat{U} \angle AFB = \angle BPQ + \angle ABR$.

Câu IV. Ta chứng minh $\frac{11a^3 - b^3}{4a^2 + ab} \leq 3a - b$

$$\hat{U} 11a^3 - b^3 \leq (3a - b)(4a^2 + ab)$$

$$\hat{U} 11a^3 - b^3 \leq 12a^3 - 4a^2b + 3a^2b - ab^2$$

$$\hat{U} a^2b + ab^2 \leq a^3 + b^3$$

$$\hat{U} (a+b)(a-b)^2 \geq 0 \text{ đúng.}$$

Tương tự $\frac{11b^3 - c^3}{4b^2 + bc} \leq 3b - c$; $\frac{11c^3 - a^3}{4c^2 + ca} \leq 3c - a$

Cộng cả ba bất đẳng thức ta có

$$\frac{11a^3 - b^3}{4a^2 + ab} + \frac{11b^3 - c^3}{4b^2 + bc} + \frac{11c^3 - a^3}{4c^2 + ca} \leq 2a + 2b + 2c$$

Dấu bằng xảy ra $\hat{U} a = b = c$.

Nhận xét: bài toán sử dụng kỹ thuật chọn điểm rơi kết hợp với phương pháp hàm số biến thiên để chứng minh bất đẳng thức.

Ý tưởng: Đây là một bất đẳng thức đối xứng vì vai trò các biến là như nhau. Vì vậy, điểm rơi bài toán sẽ xảy ra tại $a = b = c$. Khi đó sẽ đưa ta đến các đẳng thức luôn đúng như $(a - b)^2; (b - c)^2; (c - a)^2 \geq 0$, và lợi dụng điều đó ta

sẽ đi biến đổi tương đương các bất đẳng thức. Tiếp theo quan sát vế trái của bất đẳng thức có dạng bậc ba chia bậc hai, đồng thời vế trái có xuất hiện bậc nhất do đó ta chỉ cần đánh giá $\frac{11a^3 - b^3}{4a^2 + ab} \leq ma + nb$ (*) và các biểu thức còn lại lập luận tương tự sẽ có điều phải chứng minh. Và công việc cuối cùng là tìm m, n .

- Trước hết, với điểm rơi $a = b$ thế vào (*) ta sẽ có: $m + n = 2$.
- Quy đồng biểu thức (*), ta được: $11a^3 - b^3 \leq (ma + nb)(4a^2 + ab)$

$$\hat{=} 4ma^3 + 4na^2b + ma^2b + nab^2 \leq 11a^3 - b^3$$

$$\hat{=} (4m - 11)a^3 + (m - 4n)a^2b + nab^2 + b^3 \leq 0$$

Quan sát hệ số của b^3 đồng thời bất đẳng thức $(a - b)^3$ sẽ tìm ta nghĩ đến chuyển a, b cùng hệ số hay nói

cách khác $\begin{cases} 4m - 11 = 1 \\ m + n = 2 \end{cases}$

$$\hat{=} \begin{cases} m = 3 \\ n = -1 \end{cases} \text{ suy ra (*) } \hat{=} \frac{11a^3 - b^3}{4a^2 + ab} \leq 3a - b \hat{=} (a + b)(a - b)^2 \geq 0.$$

Tương tự, ta cũng có $\frac{11b^3 - c^3}{4b^2 + bc} \leq 3b - c$; $\frac{11c^3 - a^3}{4c^2 + ca} \leq 3c - a$.

Bài toán kết thúc.

Bài tập tương tự:

1. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2(a+2b)}{(a+b)^2} + \frac{b^2(b+2c)}{(b+c)^2} + \frac{c^2(c+2a)}{(c+a)^2} \geq \frac{3}{4}(a+b+c).$$

2. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + a^2} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$