Chuyên đề
MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH LŨY THỪA CỦA MA TRẬN VUÔNG

§ 1 MỘT SỐ KIẾN THỨC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Bài toán: Cho ma trận vuông là $A=(a_{ij})_{m\times m}$. Tính lũy thừa A^n, $n\in\mathbb{Z}$.

+) Ký hiệu: $A^n = \underbrace{A.A...A}_{n \text{ ma trân A}}$ là lũy thừa cấp n của ma trận A.

+) $[d_1,d_2,...,d_m]=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & ... & 0 \\ ... & d_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & d_m \end{bmatrix}$ là ma trận đường chéo.

+) Ký hiệu I_m là ma trận đơn vị cấp m.

+) $[d,d,...,d]=\begin{bmatrix} d & 0 & ... & 0 \\ ... & d & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & d \end{bmatrix}=d.I_m$ là ma trận vô hướng.

+) Ký hiệu O là ma trận không.

Bài 1. Cho $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, khi đó

+) $A^2=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$.

+) $A^3=A^2.A=\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 18 & 9 \\ 45 & -18 \end{bmatrix}$.

Bài 2. Cho ma trận đường chéo $A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{mm} \end{bmatrix}$.

Khi đó $A^n=\begin{bmatrix} a_{11}^n & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22}^n & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{mm}^n \end{bmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}$..

§ 2 TÌM MA TRẬN THÔNG QUA PHÉP TÍNH TOÁN TRỰC TIẾP

Bài 1. Tìm tất cả các ma trận $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, sao cho $A^n=\begin{bmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{bmatrix}$, với mọi số nguyên dương n. (Đề DTQG năm 2009)

*) Trước hết ta nhận thấy ma trận không $O=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ là một ma trận cần tìm.

*) Từ đẳng thức $A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{pmatrix}$, ta có

$$\begin{cases} a^2+bc=a^2 \\ b(a+d)=b^2 \\ c(a+d)=c^2 \\ bc+d^2=d^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc=0 & (1) \\ b(a+d-b)=0 & (2) \\ c(a+d-c)=0 & (3) \end{cases}$$

Trường hợp 1. Nếu $c\neq 0,$ thì từ hệ trên ta có $\begin{cases} b=0 \\ a+d-c=0 \quad (4) \end{cases}$

Từ đẳng thức $A^3=\begin{bmatrix} a^3 & 0 \\ c^3 & d^3 \end{bmatrix}=A^2A=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ c(a+d) & d^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ ac(a+d)+d^2c & d^3 \end{pmatrix}$. Từ đó ta có $c^3=ac(a+d)+cd^2 \Rightarrow c^2=a^2+ad+d^2$. Từ (4) ta có $c=a+d$, thay vào phương trình này ta có $(a+d)^2=a^2+ad+d^2 \Rightarrow ad=0.$

+) Nếu $a=0,$ thì từ phương trình (4) ta có $\begin{cases} b=a=0 \\ d=c\neq 0 \end{cases}$

Vậy ma trận $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{pmatrix}, c\neq 0.$

+) Nếu $d=0,$ thì từ phương trình (4) ta có $\begin{cases} b=d=0 \\ a=c\neq 0 \end{cases}$

Vậy ma trận $A=\begin{pmatrix} c & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, c\neq 0.$

Trường hợp 2. Nếu $b\neq 0,$ thì lý luận tương tự như trên ta có

$A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{pmatrix}, b\neq 0$ hoặc $A=\begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, b\neq 0$.

Trường hợp 3. Nếu $b=c=0,$ thì $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$

Thử lại thấy cả 5 trường hợp trên đều thỏa mãn. Vậy các ma trận cần tìm là

$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} b & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} d & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$, với $a,\ldots,f\in\mathbb{R}.$

Bài tập tự giải.

Bài 1. Tìm các ma trận thực, vuông cấp hai A sao cho $A^2 = I$. (Đề thi QG - 1993)

Bài 2. Tồn tại hay không một ma trận thực A vuông cấp 2 sao cho $A^{2010} = \begin{bmatrix} -2008 & 2010 \\ 0 & -2009 \end{bmatrix}$ (Đề thi QG - 2009)

§ 3 PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN

Việc tính lũy thừa của ma trận bằng phương pháp quy nạp toán học thường được thực hiện thông qua các bước sau đây.

Bước 1. Tính các lũy thừa $A^2, A^3, \ldots$

Bước 2. Dự đoán công thức tổng quát của A^n.

Bước 3. Sử dụng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh công thức đã dự đoán ở bước 2.

Bài 1. Tính lũy thừa A^n của ma trận $A = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$.

+) Ta có $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} \cos 3x & -\sin 3x \\ \sin 3x & \cos 3x \end{bmatrix}$.

+) Dự đoán $A^n = \begin{bmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{bmatrix}$.

+) Chứng minh quy nạp (Sinh viên tự chứng minh)

Chú ý. Trong kỹ thuật ma trận $A = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$ là ma trận của phép quay một góc x.

Bài 2. Tính lũy thừa bậc n của ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

+) Đặt $B = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ thì ta có $A = \begin{bmatrix} 2I & B \\ O & 2I \end{bmatrix}$.

+) Ta có $A^2 = \begin{bmatrix} 2^2 I & 2.2B \\ O & 2^2 I \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 2^3 I & 3.2^2 B \\ O & 2^3 I \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 2^4 I & 4.2^3 B \\ O & 2^4 I \end{bmatrix}$.

+) Dự đoán $A^k = \begin{bmatrix} 2^k I & k.2^{k-1} B \\ O & 2^k I \end{bmatrix}$.

+) Chứng minh bằng quy nạp (sinh viên tự chứng minh)

Chú ý. Khi nhân các ma trận cỡ lớn, ta có thể chia các ma trận đó thành các ma trận nhỏ có cỡ thích hợp để thực hiện phép nhân.

Bài 3. Tìm các số thực a,b để sao cho $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$. (Đề DTQG - 2009)

Giải. Từ giả thiết ta có $\begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt[4]{2}} & -\frac{b}{\sqrt[4]{2}} \\ \frac{b}{\sqrt[4]{2}} & \frac{a}{\sqrt[4]{2}} \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$. Đặt $x = \frac{a}{\sqrt[4]{2}}, y = \frac{b}{\sqrt[4]{2}}$, thì ta có $\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$. Lấy định thức hai vế ta có $x^2 + y^2 = 1$. Đẳng thức này gợi ý cho ta phương pháp lượng giác hóa: đặt $x = \cos\alpha, y = \sin\alpha$. Áp dụng Bài 1 trong phần này ta có

$$\begin{bmatrix} \cos 4\alpha & -\sin 4\alpha \\ \sin 4\alpha & \cos 4\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cos 4\alpha = \cos\frac{\pi}{6} \\ \sin 4\alpha = \sin\frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow 4\alpha = \frac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy $a = \sqrt[4]{2}\cos(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{4}), b = \sqrt[4]{2}\sin(\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{4}), k = 0,1,2,3.$

Bài tập tự giải. Tính lũy thừa A^k của các ma trận sau

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} a & \alpha a \\ b & \alpha b \end{bmatrix}$, với a, b, α là những số thực tùy ý.

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, (Đề thi QG - 2011).

e) $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$. (Đề DTQG - 2011).

f) Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} \frac{x}{1998} & 1999 \\ 0 & \frac{x}{2000} \end{bmatrix}$. Ký hiệu $A^n = \begin{bmatrix} a_{11}(n,x) & a_{12}(n,x) \\ a_{21}(n,x) & a_{22}(n,x) \end{bmatrix}$. Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to 1} a_{ij}(n,x),\quad i,j = 1,2.$ (Đề thi QG - 1998).

§ 4 ỨNG DỤNG NHỊ THỨC NEWTON

Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp và giao hoán với nhau tức là $AB = BA.$ Khi đó ta có các hằng đẳng thức của hai ma trận A và B tương tự như các hằng đẳng thức trong số học. Chẳng hạn như

+) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

+) $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$.

+) $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2-AB+B^2)$.

+) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$,.....

+) **Nhị thức Newton:**

$$(A+B)^n = C_n^0 A^n + C_n^1 A^{n-1}B + ... + C_n^k A^{n-k}B^k + ... + C_n^{n-1}AB^{n-1} + C_n^n B^n$$

Chú ý. Ma trận vô hướng $A = \begin{bmatrix} a & 0 & ... & 0 \\ 0 & a & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a \end{bmatrix} = aI$ giao hoán với mọi ma trận vuông cùng cấp.

+) Khi tính lũy thừa A^n của ma trận A ta thường phân tích $A = B + C$, trong đó B là ma trận vô hướng, còn C là ma trận mà ta dễ dàng tính được các lũy thừa $C^k, k \in \mathbb{Z}.$ Khi đó ta có $BC = CB$ và do đó ta có thể áp dụng nhị thức Newton để tính lũy thừa của ma trận $A.$

Bài 1. Cho $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, tính lũy thừa A^n. (Đề thi QG - 1995)

Giải.

+) Phân tích $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = I + B.$

+) Áp dụng khai triển nhị thức New ton

$$A^n = C_n^0 I + C_n^1 B + ... + C_n^k B^k + ... + C_n^{n-1}B^{n-1} + C_n^n B^n,$$

trong đó $B^k = kB,\ \forall k = 1, 2, ..., n$.

+) Vậy $A^n = I + B\left(C_n^1 + 2C_n^2 + ... + nC_n^n\right).$

+) Tính $\left(C_n^1 + 2C_n^2 + ... + nC_n^n\right) =$ (sinh viên tự tính)

+) Kết luận $A^n =$

Bài 2. Cho $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, tính lũy thừa A^n.

Giải.

+) Phân tích $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = C + B,$ trong đó $C = 3I$ là ma trận vô hướng.

+) Áp dụng khai triển nhị thức Newton

$$A^n = 3^n C_n^0 I + 3^{n-1} C_n^1 B + \dots + 3^{n-k} C_n^k B^k + \dots + 3C_n^{n-1} B^{n-1} + C_n^n B^n,$$

trong đó $B^k = B, \ \forall k = 1, 2, \dots, n$.

+) Vậy $A^n = 3^n I + \left(3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 + \dots + C_n^n\right) B = 3^n I + \left(4^n - 3^n\right) B.$

+) Kết luận $A^n = \begin{bmatrix} 4^n & 4^n - 3^n \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$.

Bài 3. Cho ma trận vuông $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Tính lũy thừa A^n.

Giải.

+) Phân tích $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda I + B$, với $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

+) Ta có $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ và $B^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

+) Vậy ta có

$$A^n = \lambda^n I + C_n^1 \lambda^{n-1} B + C_n^2 \lambda^{n-2} B^2 + C_n^3 \lambda^{n-3} B^3 = \begin{bmatrix} \lambda^n & C_n^1 \lambda^{n-1} & C_n^2 \lambda^{n-2} & C_n^3 \lambda^{n-3} \\ 0 & \lambda^n & C_n^1 \lambda^{n-1} & C_n^2 \lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & C_n^1 \lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}.$$

Bài tập tự giải.

Bài 1. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Tính lũy thừa A^n.

Bài 2. Tính A^{2009}, trong đó $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (Đề thi QG - 2009)

§ 5 SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP CHÉO HÓA MA TRẬN

Cho ma trận vuông $A=(a_{ij})_{n\times n}$. Giả sử A có m giá trị riêng phân biệt là: $\lambda=\lambda_1$ (bội n_1),..., $\lambda=\lambda_m$ (bội n_m), với $n_1+...+n_m=n.$

+) Nếu ta có các đẳng thức $r(A-\lambda_i I)=n-n_i$, thỏa mãn với mọi $i=1,2,...,m$ thì tồn tại ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT=[\lambda_1,...,\lambda_1,...,\lambda_m,...,\lambda_m]$ là ma trận đường chéo, với giá trị riêng λ_i xuất hiện n_i lần trên đường chéo chính. Khi đó ta nói ma trận A là chéo hóa được.

+) Đặt $T^{-1}AT=[\lambda_1,...,\lambda_1,...,\lambda_m,...,\lambda_m]=D$, khi đó $A=TDT^{-1}$.

+) Ta có thể tính lũy thừa của ma trận A như sau

$$A^k=AA...A=TDT^{-1}TDT^{-1}...TDT^{-1}=TD^kT^{-1},$$

trong đó $D^k=\left[\lambda_1^k,...,\lambda_1^k,...,\lambda_m^k,...,\lambda_m^k\right]$, với mọi số nguyên dương k.

Chú ý. Nếu ma trận $A=(a_{ij})_{n\times n}$ có n giá trị riêng đơn phân biệt thì A luôn chéo hóa được.

Bài 1. Cho $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ là các dãy số được xác định bởi $u_0=v_0=w_o=1$, và với mọi $n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1}=-u_n-7v_n+5w_n \\ v_{n+1}=-2u_n-8v_n+6w_n \\ w_{n+1}=-4u_n-16v_n+12w_n \end{cases}$.

a) Hãy tìm số hạng tổng quát của các dãy $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$.

b) Chứng minh rằng v_n-2 là số nguyên chia hết cho 2^n, với mọi số nguyên dương $n.$ (Đề DTQG - 2010)

Giải.

a) Ký hiệu $A=\begin{bmatrix} -1 & -7 & 5 \\ -2 & -8 & 6 \\ -4 & -16 & 12 \end{bmatrix}$ và $X_n=\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix}$, $n\in\mathbb{N}$. Từ giả thiết ta có

$X_{n+1}=AX_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Hay $X_n=AX_{n-1}=A.AX_{n-2}=...=A^nX_0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Ta có

$$|A-\lambda I|=0\Leftrightarrow -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)=0.$$

Ma trận A có ba giá trị riêng đơn phân biệt là $\lambda=0$, $\lambda=1$, $\lambda=2$, nên ma trận A chéo hóa được.

+) Với $\lambda=0$, ta xét

$$A-0I=\begin{bmatrix} -1 & -7 & 5 \\ -2 & -8 & 6 \\ -4 & -16 & 12 \end{bmatrix}\xrightarrow[-4H_1+H_3\to H_3]{-2H_1+H_2\to H_2}\begin{bmatrix} -1 & -7 & 5 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 12 & -8 \end{bmatrix}\xrightarrow{-2H_2+H_3\to H_3}\begin{bmatrix} -1 & -7 & 5 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta có $\begin{cases} -x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ 6x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3}x_3 \\ x_2 = \dfrac{2}{3}x_3 \end{cases}$. Vậy $x = \frac{1}{3}x_3(1,2,3)$. Chọn $a = (1,2,3)$.

+) Tương tự với $\lambda = 1,$ ta chọn $b = (3,2,4)$.

+) Với $\lambda = 2,$ ta chọn $b = (1,2,2)$.

+) Đặt $T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, thì $T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$. Ta có $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D$.

+) Khi đó $A = TDT^{-1} \Rightarrow A^n = TD^nT^{-1}$ và $X_n = TD^nT^{-1}X_0 = \begin{bmatrix} 3-3.2^n \\ 2-3.2^n \\ 4-6.2^n \end{bmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}.$

Vậy $\begin{cases} u_n = 3 - 3.2^n \\ v_n = 2 - 3.2^n \\ w_n = 4 - 6.2^n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}.$

b) Ta có $v_n - 2 = -3.2^n \vdots 2^n$.

Bài 2. Cho $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$, đặt $A^n = \begin{bmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & a_{13}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & a_{23}(n) \\ a_{31}(n) & a_{32}(n) & a_{33}(n) \end{bmatrix}$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_{ij}(n),\ i, j = 1,2,3.$

(Đề thi QG - 1998)

Giải. Tương tự như ví dụ 1 ta tìm giá trị riêng của ma trận $A.$ Ta có

$$|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow (\frac{1}{2} - \lambda)(\frac{1}{3} - \lambda)(\frac{1}{6} - \lambda) = 0.$$

Ma trận A có ba giá trị riêng đơn phân biệt là $\lambda = \frac{1}{2},\ \lambda = \frac{1}{3},\ \lambda = \frac{1}{6}.$

+) Với $\lambda = \frac{1}{2},$ ta xét hệ

$$A - \frac{1}{2}I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{6}H_1 + H_2 \to H_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{7}H_2 + H_3 \to H_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ \dfrac{7}{6}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$. Vậy $x = (x_1, 0, 0) = x_1(1,0,0)$. Chọn $a = (1,0,0)$.

+) Với $\lambda = \dfrac{1}{3}$, ta chọn $b = (-6,1,0)$ và với $\lambda = \dfrac{1}{6}$, ta chọn $c = (15,-6,1)$.

Khi đó ta có $A = TDT^{-1}$, với $D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ và $T = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 15 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^n = TD^nT^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 15 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 21 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{3}{2^{n-1}} - \frac{2}{3^{n-1}} & \frac{21}{2^n} - \frac{4}{3^{n-1}} + \frac{15}{6^n} \\ 0 & \frac{1}{3^n} & \frac{3}{2^{n-1}} - \frac{1}{6^{n-1}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6^n} \end{bmatrix}$$

Vậy ta có $\lim\limits_{n\to\infty} a_{ij}(n) = 0, \ \forall i, j = 1,2,3.$

Bài 3. Tìm một ma trận A vuông cấp 4 sao cho $A^{2010} = B$, với $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Giải. Ta có $|B - \lambda I| = 0 \Rightarrow (\lambda+2)(\lambda-2)^3 = 0$. Vậy ma trận B có hai giá trị riêng là $\lambda = 2$ (bội $n_1 = 3$) và $\lambda = -2$ (bội $n_2 = 1$).

+) Với $\lambda = 2$, ta có $B - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_1+H_4 \to H_4]{\substack{H_1+H_2 \to H_2 \\ H_1+H_3 \to H_3}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

vậy suy ra $r(A-2I) = 1 = n - n_1$ (*) và $x_1 = x_2 + x_3 + x_4$. Véc tơ riêng tương ứng là $x = (x_2+x_3+x_4, x_2, x_3, x_4) = x_2(1,1,0,0) + x_3(1,0,1,0) + x_4(1,0,0,1), x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \neq 0.$

+) Với $\lambda = -2$, ta có

$$B + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-H_1+3H_4 \to H_4]{\substack{-H_1+3H_2 \to H_2 \\ -H_1+3H_3 \to H_3}} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & -4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_2+2H_3 \to H_3]{(H_2+H_3)+H_4 \to H_4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vậy $r(A+2I)=3=n-n_2$, (**) và $\begin{cases}3x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ 8x_2-4x_3-4x_4=0\\ 12x_3-12x_4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=-x_4\\ x_2=x_4\\ x_3=x_4\end{cases}$. Véc tơ riêng tương ứng là $x=(-x_4,x_4,x_4,x_4)=x_4(-1,1,1,1),\ \ x_4\neq 0.$

Từ (*) và (**) ta suy ra ma trận B chéo hóa được, ma trận chuyển cơ sở là

$$T=\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix} \text{ và } T^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&3&-1&-1\\1&-1&3&-1\\1&-1&-1&3\\-1&1&1&1\end{bmatrix}$$

Ta có $T^{-1}BT=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-2\end{bmatrix}=D\Leftrightarrow B=TDT^{-1}$. Bây giờ ta chỉ cần chọn $A=TCT^{-1}$, với

$C=\begin{bmatrix}\sqrt[2009]{2}&0&0&0\\0&\sqrt[2009]{2}&0&0\\0&0&\sqrt[2009]{2}&0\\0&0&0&-\sqrt[2009]{2}\end{bmatrix}$, thì ta có $A^{2009}=TDT^{-1}=B.$

Kết luận: Vậy $A=TCT^{-1}$ là một ma trận cần tìm.

Bài tập tự giải.

Bài 1. Tính u_n với mọi $n\in\mathbb{N}$ nếu biết $\begin{cases}u_0=1, u_1=u_2=1\\ u_{n+3}=45u_n-39u_{n+1}+11u_{n+2},\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$. (Đề DTQG - 2011)

Hướng dẫn: Đặt $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\45&-39&11\end{bmatrix}$ và $X_n=\begin{bmatrix}u_n\\u_{n+1}\\u_{n+2}\end{bmatrix}$. Ta có $X_{n+1}=AX_n$.

Bài 2. Cho $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ là các dãy số được xác định bởi $u_0=0,\ v_0=w_0=22$ và

với mọi $n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases}u_{n+1}=\frac{1}{4}(2u_n+v_n+w_n)\\ v_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+v_n+w_n)\\ w_{n+1}=\frac{1}{4}(u_n+v_n+2w_n)\end{cases}$.

Hãy tìm số hạng tổng quát của các dãy $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{w_n\}$ và tìm giới hạn của các dãy này. (Đề DTQG - 2011)

(Đáp số $\begin{cases} u_n = 14 - 11.4^{-n} - 3.12^{-n} \\ v_n = 14 + 8.12^{-n} \\ \mathrm{w}_n = 14 + 11.4^{-n} - 3.12^{-n} \end{cases}$)

Bài 3. Cho ma trận thực $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, đặt $B = \frac{1}{6}A,$ chứng minh rằng

$(B+I)^n = (2^n - 1)B + I.$ (Đề DTQG - 2010)

§ 6 ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ CAYLAY – HAMILTON

Trong trường hợp ma trận A không chéo hóa được thì ta không thể sử dụng phương pháp chéo hóa ma trận để tính lũy thừa của ma trận $A.$ Khi đó ta thường sử dụng định lý Caylay Hamilton để tính lũy thừa của ma trận.

Định lý Caylay Hamilton. Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})_{n\times n}$, đa thức đặc trưng của ma trận A là

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = (-1)^n \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + ... + b_{n-1}\lambda + b_n, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Khi đó ta có các khẳng định sau

+) $b_n = P_A(0) = \det(A).$

+) $P_A(A) = (-1)^n A^n + b_1 A^{n-1} + ... + b_{n-1}A + b_n I = O.$

+) Đặc biệt đối với mọi ma trận A vuông cấp 2 ta có

$$P_A(A) = A^2 - tr(A).A + \det(A).I = O.$$

Bài 1. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Tính A^{2010}.

Giải . Ta có đa thức đặc trưng của ma trận A là $P_A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^2$.

+) Ma trận A không chéo hóa được vì vậy ta không sử dụng được các kỹ thuật về chéo hóa ma trận.

+) Theo định lý Caylay – Hamilton ta có $(A - 2I)^2 = O.$

+) Khai triển chuỗi Taylor của đa thức $f(\lambda) = \lambda^{2010}$ tại lân cận điểm $\lambda = 2$, ta có

$$\lambda^{2010} = 2^{2010} + 2010.2^{2009}.(\lambda - 2) + \frac{2010.2009.2^{2008}}{2}(\lambda - 2)^2 + ...$$
$$= 2^{2010} + 2010.2^{2009}.(\lambda - 2) + (\lambda - 2)^2 Q(\lambda)$$

+) Từ đó ta có $A^{2010} = 2^{2010} I + 2010.2^{2009}.(A - 2I) = 2^{2009}\begin{bmatrix} -2008 & 2010 \\ -2010 & 2012 \end{bmatrix}$.

Chú ý. Ta có thể tính lũy thừa A^{2010} dựa vào khai triển nhị thức Newton như sau

$$A^{2010} = [2\mathrm{I}+(\mathrm{A}-2\mathrm{I})]^{2010} = C_{2010}^{0}(2I)^{2010} + C_{2010}^{1}(2I)^{2009}(A-2I) + C_{2010}^{2}(2I)^{2008}(A-2I)^{2} + \ldots$$

$$= C_{2010}^{0}(2I)^{2010} + C_{2010}^{1}(2I)^{2009}(A-2I) = 2^{2010}I + 2010.2^{2009}(A-2I)$$

Bài 2. Tính $\begin{bmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}^{2010}$.

Giải.

+) Ký hiệu $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$. Đa thức đặc trưng của ma trận A là $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^3$.

Ma trận A không chéo hóa được.

+) Áp dụng định lý Caylay – Hamilton ta có $(A-I)^3 = O$. Mặt khác ta có

$$(A-I)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -15 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}^2 = O.$$

Ta gọi $(\lambda-1)^2$ là đa thức tối tiểu của ma trận A (đa thức $p(\lambda)$ được gọi là đa thức tối tiểu của ma trận A nếu $p(\lambda)$ là đa thức có bậc nhỏ nhất sao cho $p(A) = O$)

+) Áp dụng khai triển nhị thức Newton ta có

$$A^{2010} = [I + (A-I)]^{2010} = I + 2010(A-I).$$

Bài tập tự giải.

Bài 1. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$. Tính $f(A)$, biết

$$f(x) = 2009x^{2009} - 2008x^{2008} + 2007x^{2007} - \ldots + x.$$

(Đề DTQG - 2009)

Bài 2. Tính $\begin{bmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}^{2010}$. (Đề DTQG - 2010)

§ 7 MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Bài 1. Tìm các ma trận thực vuông cấp 2 thỏa mãn phương trình

$$X^3 - 3X^2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

(Putnam and Beyond)

Giải. Ta có $X^2(X-3I)=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{bmatrix}$. Lấy định thức hai vế ta có

$\left(\det(X)\right)^2\det(X-3I)=\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{vmatrix}=0.$ Từ đó $\det(X)=0$ hoặc $\det(X-3I)=0$.

Trường hợp 1: Nếu $\det(X)=0$, theo định lý Caylay – Hamilton ta có $X^2=tr(X)X$, thay vào phương trình (1) ta có

$$\left(tr(X)^2-3tr(X)\right)X=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{bmatrix} \qquad (2)$$

Cân bằng vết của các ma trận ở hai vế của phương trình này ta có phương trình

$$tr(X)^3-3tr(X)^2=-4 \Rightarrow tr(X)=2 \vee tr(X)=-1.$$

a) Nếu $tr(X)=2$ thì từ phương trình (2) ta suy ra

$$2X=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}.$$

b) Nếu $tr(X)=-1$ thì từ phương trình (2) ta suy ra

$$4X=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Trường hợp 2: Nếu $\det(X-3I)=0$, thì ma trận X có một giá trị riêng là 3. Ta đi tìm giá trị riêng còn lại của ma trận X. Cộng hai vế của phương trình (1) với $4I$ ta có

$$X^3-3X^2+4I=(X-2I)^2(X+I)=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix} \qquad (3)$$

Lấy định thức hai vế ta có $\det(X-2I)=0$ hoặc $\det(X+I)=0$.

a) Nếu $\det(X-2I)=0$ thì X có hai giá trị riêng là $\lambda=2$ và $\lambda=3$. Khi đó $tr(X)=2+3=5$ còn $\det(X)=2.3=6$. Từ đó $X^2-5X+6I=O$ hay $X^2=5X-6I$. Thay vào (1) ta có

$$X^3-3X^2=4X-12I=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{bmatrix},$$

từ đó ta có $X=\begin{bmatrix}\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2}\end{bmatrix}$.

b) Nếu $\det(X+I)=0$, làm tương tự ta tìm được $X=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$.

Bài 2. Cho A là ma trận thực vuông sao cho $3A^3=A^2+A+I$. Chứng minh rằng dãy $\{A^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hội tụ về ma trận B, sao cho $B^2=B$. (IMC Longlist - 2003)

Giải. Ta đi xây dựng dãy

$$A^{n+1} = a_{n-1}A^2 + b_{n-1}A + c_{n-1}I,\ \forall n \geq 1, \tag{1}$$

trong đó $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ là các dãy số thực với $a_0 = b_0 = c_0 = \frac{1}{3}$.

Thật vậy ta có $A^{n+1} = A^n A = (a_{n-2}A^2 + b_{n-2}A + c_{n-2}I)A = a_{n-2}A^3 + b_{n-2}A^2 + c_{n-2}A,\ \forall n \geq 1.$

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= a_{n-2}\left(\frac{1}{3}A^2 + \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}I\right) + b_{n-2}A^2 + c_{n-2}A \\ &= \left(\frac{a_{n-2}}{3} + b_{n-2}\right)A^2 + \left(\frac{a_{n-2}}{3} + c_{n-2}\right)A + a_{n-2}I,\ \forall n \geq 2. \end{aligned} \tag{2}$$

Đồng nhất hệ số trong phương trình (1) và (2) ta có

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{a_{n-1}}{3} + b_{n-1} \\ b_n = \dfrac{a_{n-1}}{3} + c_{n-1} \\ c_n = a_{n-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix},\ \forall n \geq 1. \tag{3}$$

Đặt $X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, thì phương trình (3) trở thành $X_n = AX_{n-1} = A^n X_0$, trong đó $X_0 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$.

Sử dụng phương pháp chéo hóa ma trận ta đi tính lũy thừa A^n.

Ma trận chuyển cơ sở

$$T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & -1/6 + i\sqrt{2}/12 & -1/6 - i\sqrt{2}/12 \\ 1/6 & -1/12 - i\sqrt{2}/12 & -1/6 + i\sqrt{2}/12 \end{bmatrix},\ \mathrm{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 - i\sqrt{2} & -1 + 2i\sqrt{2} \\ 1 & -1 + i\sqrt{2} & -1 - 2i\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 + i\sqrt{2}/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 - i\sqrt{2}/3 \end{bmatrix}.$$

Ta có $D = T^{-1}AT \Leftrightarrow A = TDT^{-1} \Rightarrow A^n = TD^nT^{-1}$. Vì mô đun của hai số phức $-1/3 \pm i\sqrt{2}/3$ đều nhỏ hơn 1, nên

$$D^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/3+i\sqrt{2}/3)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1/3-i\sqrt{2}/3) \end{bmatrix} \xrightarrow{n\to+\infty} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = H.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = \lim\limits_{n\to+\infty} TD^nT^{-1}X_0 = THT^{-1}X_0 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{bmatrix}$. Từ đó ta có $a_n \to \frac{1}{2},\ b_n \to \frac{1}{3},\ c_n \to \frac{1}{6}$ và do đó $A^n \to \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A + \frac{1}{6}I = B.$

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh $B^2 = B.$ (Xin nhường cho bạn đọc tự chứng minh).

Bài 3. Tính $\det(A^n + B^n)$, với $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (Đề DTQG - 2009)

Giải. Phân tích $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I + D$. Dễ kiểm tra được $D^2 = D,$ nên áp dụng khai triển nhị thức Newton ta được $A^n = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k D + I.$ Do $B = A^T$, nên $B^n = \left(A^T\right)^n = \left(A^n\right)^T = \sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k D^T + I.$ Từ đó ta có

$$A^n + B^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \left(D + D^T\right) + I = \begin{bmatrix} 2^{n+1} & 2^n - 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Do đó $\det(A^n + B^n) = \begin{vmatrix} 2^{n+1} & 2^n - 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{vmatrix} = 2^{n+1}\left(2^{n+2} - 4^n + 2^{n+1} - 1\right).$

Bài 4. Giả sử A là ma trận thực vuông cấp 2 và k là số nguyên lớn hơn 2. Chứng minh rằng nếu $A^k = O$ thì $A^2 = O.$

Giải. Giải sử $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, từ $A^k = O$, lấy định thức hai vế ta suy ra $\det(A) = 0$. Từ đẳng thức $A^2 - tr(A)A + \det(A)I = O$, ta suy ra $A^2 = (a+d)A$. Như vậy

$A^k = A^{k-2}A^2 = (a+d)A^{k-1} = ... = (a+d)^{k-1}A = O.$

+) Trường hợp 1. Nếu $A = O$ thì ta có ngay $A^2 = O.$

+) Trường hợp 2. Nếu $a + d = 0 \Rightarrow a = -d$. Mặt khác

$\det(A) = ad - bc = -d^2 - bc = 0$. Khi đó ta có

$$A^2 = \begin{bmatrix} -d & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -d & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d^2 + bc & 0 \\ 0 & d^2 + bc \end{bmatrix} = O.$$

Bài 5. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}+1}{2} & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{bmatrix}$, tính A^{2016}. (Đề DTQG - 2011)

Hướng dẫn giải. $A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}+1}{2} & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3} & -2\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}$,

Ta đi chứng minh quy nạp $A^n=\begin{bmatrix}\cos n\frac{\pi}{3}+\sin n\frac{\pi}{3} & -2\sin n\frac{\pi}{3}\\ \sin n\frac{\pi}{3} & \cos n\frac{\pi}{3}-\sin n\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}$.

Bài 6. Cho A là ma trận vuông cấp 2.

a) Nếu A có hai giá trị riêng phân biệt là a và b. Chứng minh rằng

$$A^n=\frac{a^n}{a-b}(A-bI)+\frac{b^n}{b-a}(A-aI).$$

b) Nếu A chỉ có duy nhất một giá trị riêng là c, chứng minh rằng

$$A^n=c^{n-1}(A-(n-1)cI).$$

Hướng dẫn. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học.

Bài 7. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix}7 & -5\\ 8 & -6\end{bmatrix}$. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai ma trận thực vuông cấp 2 là X và Y sao cho với mọi số tự nhiên n ta đều có $A^n=2^nX+(-1)^nY$. (Đề DTQG - 2011)

Hướng dẫn giải. Phân tích bài toán:

+) Tương ứng với $n=0$ và $n=1$, ta phân tích ma trận A dưới dạng

$$\begin{cases}A=2X-Y\\ I=X+Y\end{cases}\Rightarrow X=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}8 & -5\\ 8 & -5\end{bmatrix},\ Y=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}5 & -5\\ 8 & -8\end{bmatrix}.$$

+) Chú ý rằng ma trận A có hai giá trị riêng là $a=2$ và $a=-1$. Khi đó $X=\frac{1}{a-b}(A-bI)=\frac{1}{3}(A+I)$ và $Y=\frac{1}{b-a}(A-aI)=\frac{1}{3}(A-2I)$ là các ma trận của phép chiếu; tức là $X^2=X$ và $Y^2=Y$. Hơn nữa $XY=$ YX.

+) Bây giờ việc tính A^n có thể sử dụng khai triển nhị thức Newton hoặc dùng khai triển Taylor.

Tel 0983046407. Email: longhv08@gmail.com

Bài 8. Tìm tất cả các ma trận thực vuông cấp bốn $A=\left(a_{ij}\right)_{4\times4}$, sao cho $A^2=I$, trong đó $a_{ij}=\begin{cases} a & \text{i=j,} \\ b & \text{i+j=5,} \\ c & \text{i} \neq \text{j, i+j} \neq 5. \end{cases}$ với a,b,c là các số thực. (Đề DTQG - 2011)

Giải.

$$A=\begin{bmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}=aI+bJ+cK.$$

Chú ý rằng: $K^2=2I+2J, JK=KJ=K, J^2=I.$

Vậy

$$\begin{aligned} A^2&=\left(aI+bJ+cK\right)^2=a^2I+b^2I+c^2(2I+2J)+2abJ+2acK+2bcK \\ &=(a^2+b^2+2c^2)I+(2c^2+2ab)J+2c(a+b)K=I \end{aligned}.$$

Ta có hệ $\begin{cases} a^2+b^2+2c^2=1 \\ c^2+ab=0 \\ c(a+b)=0 \end{cases}$

Trường hợp 1. $c=0$ thì $\begin{cases} ab=0 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ b=\pm1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=0 \\ a=\pm1 \end{cases} \end{array}\right.$.

Trường hợp 2. $c\neq0$ thì $a=-b\Rightarrow\begin{cases} 2b^2+2c^2=1 \\ c^2-2b^2=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ c=0, b=\pm1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=- \\ \end{cases} \end{array}\right.$

Bài tập tự giải.

Bài 1. Cho $A=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}+1 & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}-1 \end{bmatrix}$, tính A^{2002}. (Đề thi QG - 2002)

Bài 2. Cho ma trận $A_j=\begin{bmatrix} \cos\frac{2\pi j}{n} & -\sin\frac{2\pi j}{n} \\ \sin\frac{2\pi j}{n} & \cos\frac{2\pi j}{n} \end{bmatrix}, j\in\mathbb{N}.$ Tính tổng sau

$S_p=A_0^p+A_1^p+...+A_{n-1}^p,\ p,n\in\mathbb{N}.$ (Đề thi QG - 1994)

Bài 3. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} a & b\\ 0 & c\end{bmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$. (Đề thi Olympic QG - 1996)

a) Chứng minh rằng nếu $A^{1996}=O$, thì $A^2=O$.
b) Tìm a,b,c để sao cho tồn tại số nguyên dương n sao cho $A^n=I$.

Bài 4. Cho $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & a_{13}(n)\\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & a_{23}(n)\\ a_{31}(n) & a_{32}(n) & a_{33}(n)\end{bmatrix}$. Tính $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{22}(n)}{a_{32}(n)}$. (Đề thi QG - 1996)

Bài 5. Cho A,B là hai ma trận thực vuông cấp 2 thỏa mãn $AB=BA$, $A^{2011}=B^{2011}=O$. Chứng minh rằng $(A+B)^3=O$. (Đề DTQG - 2011)

Bài 6. Cho hai dãy số thực (u_n) và (v_n) xác định bởi $u_0=0,\ v_0=-1,$ và $\begin{cases} u_{n+1}=2u_n-v_n-1\\ v_{n+1}=-u_n+2v_n+2\end{cases}$. Chứng minh rằng $u_{2011}+v_{2011}+1$ chia hết cho 2011. (Đề DTQG - 2011)

Hướng dẫn.

+) $\underbrace{\begin{bmatrix} u_{n+1}\\ v_{n+1}\end{bmatrix}}_{U_{n+1}}=\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} u_n\\ v_n\end{bmatrix}}_{U_n}+\underbrace{\begin{bmatrix} -1\\ 2\end{bmatrix}}_{B}\Leftrightarrow U_{n+1}=AU_n+B=A^nU_0+(A^{n-1}+\ldots+A+I)B.$

+) $A^n=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+3^n & 1-3^n\\ 1-3^n & 1+3^n\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}}_{X}+\frac{3^n}{2}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}}_{Y}.$

+) Từ đó ta tính được $A^{n-1}+\ldots+A+I=\frac{n}{2}X+\frac{3^n-1}{4}Y\Rightarrow U_n=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2n+1-3^n\\ 2n-5+3^n\end{bmatrix}.$

Bài 7. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2\\ -7 & 3 & 5\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$. Đặt $U_n=I+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}A^k$, với I là ma trận đơn vị cấp ba. Tính $\lim\limits_{n\to\infty}U_n$. (Đề DTQG - 2011)

Đáp số: $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=T^{-1}\begin{bmatrix} e^{-1} & 0 & 0\\ 0 & e & 0\\ 0 & 0 & e^2\end{bmatrix}T$, trong đó $T=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ là ma trận chuyển cơ sở.

Bài 8. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$, và $B=A^2-2A-I$. Chứng minh rằng ma trận B^{2011} khả nghịch và tìm ma trận nghịch đảo của B^{2011}. (Đề DTQG - 2011)

Hướng dẫn giải.

+) Đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)=|A-\lambda I|=(\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda-3)=(\lambda^2-2\lambda-1)^2-4.$

+) Áp dụng định lý Caylay – Hamilton ta có

$(A^2-2A-I)^2-4I=O \Leftrightarrow B^2=4I \Leftrightarrow B^{-1}=\frac{1}{4}B.$

+) Vậy $\left(B^{2011}\right)^{-1}=\left(B^{-1}\right)^{2011}=\frac{1}{4^{2011}}B^{2011}=\frac{2^{2010}}{4^{2011}}B=\frac{1}{2^{2012}}B.$

Bài 9. Cho ma trận $M=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. Đặt $M^n=\left(b_{ij}(n)\right)$, $n\geq 2, n\in\mathbb{N}$. Tính $S_n=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}b_{ij}(n)$.

(Đề thi QG - 2005)

Bài 10. Tìm ma trận B có giá trị riêng dương sao cho $B^2=\begin{pmatrix}2&2\\1&-3\end{pmatrix}$. (Đề thi QG - 2005)