Chủ đề 3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

§1. VÀI PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Phần này chứng minh một vài định lí về những phép biến đổi tương đương hệ phương trình. Chúng là cơ sở cho việc giải hệ phương trình.

Trước hết ta nhớ lại rằng :

Hai hệ phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng một tập nghiệm.

Giải một hệ phương trình là thực hiện liên tiếp những phép biến đổi tương đương để đưa hệ đã cho về hệ phương trình đơn giản nhất. Bây giờ ta tìm hiểu vài phép biến đổi tương đương cơ bản. Để cho đơn giản ta chỉ phát biểu các định lí dưới đây đối với hệ hai phương trình hai ẩn, song chúng cũng đúng đối với hệ có một số hữu hạn phương trình và số hữu hạn ẩn. Chúng là những cách phát biểu tổng quát các phương pháp giải hệ phương trình đã được học ở lớp 9.

Ta kí hiệu một phương trình hai ẩn bởi đẳng thức $F(x, y) = G(x, y)$, trong đó F và G là những biểu thức của hai biến x và y. Nếu cho $x = \alpha$, $y = \beta$, với α, β là những số thực thì $F(\alpha, \beta)$, $G(\alpha, \beta)$ trở thành những số thực. Khi hai phương trình $F_1(x, y) = G_1(x, y)$ và $F_2(x, y) = G_2(x, y)$ tương đương thì ta viết

$$F_1(x, y) = G_1(x, y) \Leftrightarrow F_2(x, y) = G_2(x, y).$$

$\boxed{?\,1}$ Bạn hãy chứng tỏ rằng hai hệ phương trình sau tương đương :

$$\text{(I)}\ \begin{cases} x - 2y = 1 & (1) \\ x^2 - xy = 6 & (2) \end{cases}, \qquad \text{(II)}\ \begin{cases} x = 2y + 1 & (1') \\ x^2 - xy = 6 & (2) \end{cases}.$$

Nhận xét hai hệ trên thấy rằng, ta đã thay phương trình (1) bởi phương trình (1') tương đương với phương trình (1) để được hệ (II).

Tổng quát ta có :

ĐỊNH LÍ 1. *Nếu ta thay một phương trình trong hệ bởi một phương trình tương đương với nó thì được một hệ tương đương với hệ đã cho.*

Bạn hãy tìm hiểu cách chứng minh dưới đây để có thể vận dụng nó mà tự chứng minh các định lí tiếp theo.

Chứng minh. Giả sử

$$\text{(I)}\begin{cases}F_1(x,y)=G_1(x,y) & (1)\\ F_2(x,y)=G_2(x,y) & (2)\end{cases} \quad \text{và} \quad \text{(II)}\begin{cases}F_1'(x,y)=G_1'(x,y) & (1')\\ F_2(x,y)=G_2(x,y) & (2)\end{cases},$$

trong đó (1) $\Leftrightarrow$ (1'), và giả sử (α, β) là một nghiệm của hệ (I). Khi đó

$$\begin{cases}F_1(\alpha,\beta)=G_1(\alpha,\beta)\\ F_2(\alpha,\beta)=G_2(\alpha,\beta)\end{cases}.$$

Vì (1) $\Leftrightarrow$ (1') nên (α, β) cũng là nghiệm của (1') ; tức là, $F_1'(\alpha, \beta) = G_1'(\alpha, \beta)$. Do đó

$$\begin{cases}F_1'(\alpha,\beta)=G_1'(\alpha,\beta)\\ F_2(\alpha,\beta)=G_2(\alpha,\beta)\end{cases}.$$

Điều này chứng tỏ (α, β) cũng là nghiệm của (II).

Tương tự, ta cũng chứng minh được rằng nếu (α, β) là một nghiệm của (II) thì nó cũng là một nghiệm của (I). Vậy (I) $\Leftrightarrow$ (II). □

?2 Hãy chứng minh hệ quả sau :

HỆ QUẢ. *Mọi hệ phương trình dạng (I) đều có thể viết dưới dạng*

$$\begin{cases}K_1(x,y)=0\\ K_2(x,y)=0\end{cases}.$$

ĐỊNH LÍ 2. *Cho hệ phương trình*

$$(III)\begin{cases}F_1(x,y)=0 & (1)\\ F_2(x,y)=0 & (2)\end{cases}.$$

Nếu $G(x, y) \neq 0$, $H(x, y) \neq 0$ với mọi cặp số (x, y) thoả mãn điều kiện xác định của hệ phương trình (III) thì hệ (III) tương đương với hệ

$$(IV)\begin{cases}F_1(x,y)=0 & (1)\\ F_1(x,y).G(x,y)+F_2(x,y).H(x,y)=0 & (2')\end{cases}.$$

Chứng minh. Dành cho bạn đọc. □

HỆ QUẢ. 1) Với hai số $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$ ta có :

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0 \\ F_2(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x,y)=0 \\ c_1F_1(x,y)+c_2F_2(x,y)=0 \end{cases}.$$

$$2)\ \begin{cases} F_1(x,y)=0 \\ F_2(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x,y)=0 \\ F_1(x,y)\pm F_2(x,y)=0 \end{cases}.$$

Định lí 2 là *cơ sở của phương pháp cộng đại số.*

$\boxed{?\ 3}$ Bạn phải chọn G(x, y), H(x, y) trong định lí 2 như thế nào để từ định lí 2 suy ra phần 1) của hệ quả ? Câu hỏi tương tự đối với phần 2) của hệ quả.

Ví dụ 1. *Dùng hệ quả của định lí 2 giải hệ phương trình :*

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-10y+6=0 & (1) \\ 3x^2+3y^2+4x-6y-4=0 & (2) \end{cases}.$$

Giải. Nhân hai vế của (1) với –3 rồi cộng vào (2), ta được :

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-10y+6=0 & (1) \\ -2x+24y-22=0 & (2') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2x-10y+6=0 & (1) \\ x-12y+11=0 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2x-10y+6=0 & (1) \\ x=12y-11 & (4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=12y-11 \\ 29y^2-50y+21=0 \end{cases}.$$

Từ đó : $y = 1, x = 1$; $y = \dfrac{21}{29}, x = -\dfrac{67}{29}$.

Nghiệm của hệ phương trình là :

$$(1\ ;\ 1),\ \left(-\frac{67}{29}\ ;\ \frac{21}{29}\right).$$

$\boxed{?\,4}$ Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2xy+x=4 \\ 2x^2-4y^2+4xy+1=13 \end{cases}.$$

ĐỊNH LÍ 3. *Nếu phương trình $F_1(x, y) = 0$ tương đương với phương trình $x = g(y)$ thì hệ*

$$(III)\ \begin{cases} F_1(x,y)=0 & (1) \\ F_2(x,y)=0 & (2) \end{cases} \text{ tương đương với hệ } (V)\ \begin{cases} x=g(y) & (3) \\ F_2(g(y),y)=0 & (4) \end{cases}.$$

Chứng minh. Dành cho bạn đọc. □

Định lí 3 là cơ sở cho *phương pháp thế*; đẳng thức (3) là phép rút x từ phương trình (1) ; còn đẳng thức (4) là phép thế biểu thức của x vào phương trình (2).

Ví dụ 2. *Giải hệ phương trình :*

$$\begin{cases} x^2-3xy+y^2=11 & (1) \\ y^2-2xy=5 & (2) \end{cases}.$$

Nghiên cứu cách giải. Muốn rút x từ phương trình (1) phải coi y như một số đã biết, rồi giải phương trình bậc hai đối với ẩn x. Điều đó khá phức tạp . Tương tự, nếu rút y từ (1) hoặc rút y từ (2).

• Vậy sẽ rút x từ (2) :

$$2xy = y^2 - 5. \qquad (2')$$

Sẽ chia hai vế của (2') cho y ? – Cần thận trọng ! (Vì nếu y có thể nhận giá trị $y = 0$ thì sẽ mất nghiệm).

Nhưng $y = 0$ không thoả mãn (2') nên có thể chia hai vế của (2') cho y và được :

$$\begin{cases} x^2-3xy+y^2=11 & (1) \\ x=\dfrac{y^2-5}{2y} & (3) \end{cases}$$

• Thay biểu thức của x vào (1) :

$$\begin{cases} x=\dfrac{y^2-5}{2y}. & (3) \\ \left(\dfrac{y^2-5}{2y}\right)^2-3\dfrac{y^2-5}{2y}y+y^2-11=0 & (4) \end{cases}$$

hay
$$\begin{cases} x = \dfrac{y^2 - 5}{2y} & (3) \\ y^4 + 24y^2 - 25 = 0 & (5) \end{cases}.$$

Tiếp tục giải hệ này ta được nghiệm của hệ phương trình là : $(2 ; -1)$, $(-2 ; 1)$.

$\boxed{?5}$ Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 4 \\ x^2 - 3xy = 7 \end{cases}.$$

Chú ý. Khi giải hệ phương trình nếu không sử dụng những phép biến đổi tương đương nêu trên cần thận trọng để khỏi mất nghiệm hoặc lấy cả nghiệm ngoại lai. Chẳng hạn :

– Nếu chia hai vế cho một biểu thức chứa ẩn thì có thể mất nghiệm ;

– Nếu nâng hai vế của một phương trình lên một luỹ thừa bậc chẵn thì có thể xuất hiện nghiệm ngoại lai.

Để tránh những thiếu sót trong các trường hợp ấy ta nên làm như sau :

– Khi chia hai vế của phương trình cho một biểu thức chứa ẩn cần đảm bảo rằng biểu thức ấy khác 0 hoặc giá trị của ẩn làm cho biểu thức ấy bằng 0 không phải là một thành phần của nghiệm của hệ phương trình ;

– Khi nâng hai vế của một phương trình lên một luỹ thừa bậc chẵn hoặc nhân hai vế của phương trình với một biểu thức chứa ẩn thì cần thử lại các giá trị tìm được của ẩn để loại bỏ nghiệm ngoại lai.

BÀI TẬP

1. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 2x^2 - 6xy + x - 2y = -5 \\ x^2 - 3xy + 2x + 3y + 1 = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 - x + 3y = 26 \\ x^2 - 3xy + y^2 - 3x - 3y + 20 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x^2 - 4y^2 + xy + 30 = 0 \\ 2x^2 + xy = 2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 + xy = 42 \\ 2x^2 + 3xy + y^2 = 21 \end{cases}$.

2. Hai hệ phương trình sau có tương đương không :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = \dfrac{3}{1} \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Hãy giải thích !

3. Đối với một hệ hai phương trình, mỗi mệnh đề sau đúng hay sai :

a) Nếu cộng từng vế của hai phương trình trong hệ thì phương trình thu được cùng với một trong hai phương trình đã cho lập thành một hệ tương đương với hệ đã cho. Hãy chứng minh cho câu trả lời của mình.

Chẳng hạn,

$$\text{(I)} \begin{cases} F_1(x,y) = G_1(x,y) & (1) \\ F_2(x,y) = G_2(x,y) & (2) \end{cases}$$

và

$$\text{(II)} \begin{cases} F_1(x,y) = G_1(x,y) & (1) \\ F_1(x,y) + F_2(x,y) = G_1(x,y) + G_2(x,y) & (2') \end{cases}$$

b) Nếu nhân từng vế của hai phương trình trong hệ thì phương trình thu được cùng với một trong hai phương trình đã cho lập thành một hệ tương đương với hệ đã cho. Hãy chứng minh cho câu trả lời của mình.

Chẳng hạn,

$$\text{(I)} \begin{cases} F_1(x,y) = G_1(x,y) & (1) \\ F_2(x,y) = G_2(x,y) & (2) \end{cases}$$

và

$$\text{(II)} \begin{cases} F_1(x,y) = G_1(x,y) & (1) \\ F_1(x,y).F_2(x,y) = G_1(x,y).G_2(x,y) & (2') \end{cases}$$

§2. VÀI DẠNG CƠ BẢN CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

2.1. Hệ gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai

Phương pháp chung để giải hệ phương trình này là phương pháp thế.

$\boxed{?\ 1}$ Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x^2 - 4xy + y^2 - 2x + y - 1 = -5 \end{cases}.$$

2.2. Hệ phương trình đối xứng loại I

Hệ hai phương trình hai ẩn được gọi là đối xứng loại I nếu khi hoán vị hai ẩn, mỗi phương trình đều không đổi.

Nói cách khác, *hệ phương trình*

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0 & (1) \\ F_2(x,y)=0 & (2) \end{cases}$$

được gọi là đối xứng loại I nếu $F_1(y,x) = F_1(x,y)$, $F_2(y,x) = F_2(x,y)$.

Ví dụ 1.

$$(I)\quad \begin{cases} x+y+xy=-7 \\ x^2+y^2-3x-3y=16 \end{cases}.$$

Chú ý. Từ định nghĩa ta thấy ngay rằng nếu (α, β) là một nghiệm của hệ đối xứng loại I thì (β, α) cũng là một nghiệm của nó.

Cách giải

Ta đã biết :

1) Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ thì :

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases} \qquad (I)$$

2) Nếu $\begin{cases} x_1+x_2=S \\ x_1x_2=P \end{cases}$, với điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$ thì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 - Sx + P = 0. \qquad (II)$$

3) Có thể biểu diễn tổng các luỹ thừa cùng bậc của hai nghiệm qua x_1+x_2 và x_1x_2, chẳng hạn :

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2,$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2),$$

$$x_1^4+x_2^4=[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]^2-2x_1^2x_2^2,$$

v.v... .

Nhờ những cách biểu diễn này, nếu đặt

$$\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

thì có thể biến đổi hệ phương trình đối xứng loại I thành một hệ phương trình đối với hai ẩn S và P. Nếu tìm được S và P thì từ các đẳng thức (III) và phương trình (II) ta tìm được x và y.

Ví dụ 2. *Giải hệ phương trình*

$$(I)\ \begin{cases} x+y+xy=-7 \\ x^2+y^2-3x-3y=16 \end{cases}$$

Giải. Hệ (I) có thể viết :

$$\begin{cases} x+y+xy=-7 \\ (x+y)^2-2xy-3(x+y)=16 \end{cases}.$$

Đặt

$$\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases},$$

ta được :

$$\begin{cases} S+P=-7 \\ S^2-3S-2P-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=-S-7 \\ S^2-S-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=-S-7 \\ \left[\begin{array}{l} S=-1 \\ S=2 \end{array}\right. \end{cases}.$$

• Với $S=-1$ thì $P=-6$; ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-6 \end{cases}.$$

x và y là hai nghiệm của phương trình $x^2+x-6=0$. Suy ra $x_1=-3$, $x_2=2$. Do đó hệ có hai nghiệm : $(-3\,;2)$, $(2\,;-3)$.

• Với $S = 2$ thì $P = -9$; ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=-9 \end{cases}.$$

Giải tương tự như trên ta được hai nghiệm :

$$(1-\sqrt{10}\,;1+\sqrt{10}),\ (1+\sqrt{10}\,;1-\sqrt{10}).$$

Vậy hệ đã cho có bốn nghiệm :

$$(-3\,;2),(2\,;-3),(1-\sqrt{10}\,;1+\sqrt{10}),\ (1+\sqrt{10}\,;1-\sqrt{10}).$$

Qua ví dụ trên có thể nêu lên :

Phương pháp chung để giải hệ phương trình đối xứng loại I như sau :

– *Đặt* $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$

– *Biến đổi hệ đã cho thành hệ phương trình đối với hai ẩn S và P ;*

– *Giải hệ phương trình vừa nhận được đối với hai ẩn S và P ;*

– *Với mỗi cặp S và P tương ứng, tiếp tục giải hệ phương trình* $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$.

$\boxed{?\,2}$ Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=3(x-y)^2 \\ 2x+2y=(x-y)^2 \end{cases}.$$

2.3. Hệ phương trình đối xứng loại II

Hệ hai phương trình hai ẩn được gọi là đối xứng loại II nếu khi hoán vị hai ẩn thì phương trình này biến thành phương trình kia.

Nói cách khác, *hệ phương trình*

$$\begin{cases} F_1(x,y)=0 & (1) \\ F_2(x,y)=0 & (2) \end{cases}$$

được gọi là đối xứng loại II nếu $F_1(y,x) = F_2(x,y), F_2(y,x) = F_1(x,y)$.

Ví dụ 1. *Giải hệ phương trình :*

$$(I)\quad \begin{cases} 2x^2+y=3y^2-2 \\ 2y^2+x=3x^2-2 \end{cases}$$

Giải. Nhận thấy nếu *trừ từng vế của phương trình thứ nhất với phương trình thứ hai*, ta được :

$5(x^2-y^2)-(x-y) = 0$ hay *một phương trình tích* $(x-y)(5x+5y-1) = 0$. Như vậy

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+y=3y^2-2 \\ (x-y)(5x+5y-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+y=3y^2-2 \\ \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ 5x+5y-1=0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} 2x^2+y=3y^2-2 \\ x-y=0 \end{cases} & (II) \\ \begin{cases} 2x^2+y=3y^2-2 \\ 5x+5y-1=0 \end{cases} & (III) \end{array}\right.$$

• Giải hệ (II) : $\begin{cases} x=y \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases}$.

Hệ có hai nghiệm : $(-1 ; -1)$, $(2 ; 2)$.

• Giải hệ (III) : $\begin{cases} x=\dfrac{1-5y}{5} \\ 2\left(\dfrac{1-5y}{5}\right)^2+y-3y^2+2=0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=\dfrac{1-5y}{5} \\ 25y^2-5y-52=0 \end{cases}$.

Giải hệ này ta được hai nghiệm :

$\left(\dfrac{1-\sqrt{209}}{10};\dfrac{1+\sqrt{209}}{10}\right)$, $\left(\dfrac{1+\sqrt{209}}{10};\dfrac{1-\sqrt{209}}{10}\right)$. Vậy hệ có bốn nghiệm :

$(-1 ; -1)$, $(2 ; 2)$, $\left(\dfrac{1-\sqrt{209}}{10};\dfrac{1+\sqrt{209}}{10}\right)$, $\left(\dfrac{1+\sqrt{209}}{10};\dfrac{1-\sqrt{209}}{10}\right)$.

Phương pháp chung để giải hệ đối xứng loại II là :

– Trừ từng vế tương ứng của hai phương trình ta được một phương trình tích ;

– Phương trình tích này tương đương với hai phương trình ;

– Mỗi phương trình trong hai phương trình vừa nói kết hợp với một trong hai phương trình đã cho ta có một hệ ;

– Giải những hệ này ta được nghiệm của hệ đã cho.

Ví dụ 2. *Giải hệ phương trình :*

$$(IV)\ \begin{cases} 3x^2 = 2y + \dfrac{1}{y} \\ 3y^2 = 2x + \dfrac{1}{x} \end{cases}.$$

Nghiên cứu cách giải. Với điều kiện $x \neq 0$, $y \neq 0$, hệ (IV) tương đương với hệ :

$$\begin{cases} 3x^2y = 2y^2 + 1 \\ 3xy^2 = 2x^2 + 1 \end{cases}.$$

Biến đổi tương tự như ở ví dụ 1, hệ này tương đương với hai hệ :

$$(V)\ \begin{cases} 3x^2y - 2y^2 - 1 = 0 \\ x = y \end{cases}, \quad (VI)\ \begin{cases} 3x^2y - 2y^2 - 1 = 0 \\ 3xy + 2x + 2y = 0 \end{cases}.$$

• Giải hệ (V) : $\quad (V) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x^3 - 2x^2 - 1 = 0 \end{cases}.$

Phương trình thứ hai trong hệ này nhận $x = 1$ làm một nghiệm. Do đó :

$$3x^3 - 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 3x^2 + x + 1 = 0 \end{array}\right..$$

Phương trình cuối cùng vô nghiệm. Vì thế (V) có một nghiệm : $(1 ; 1)$.

• Giải hệ (VI). Có thể rút y từ phương trình thứ hai của hệ (VI) chăng ? Nếu không hãy nhận xét đặc điểm của hệ phương trình đã cho để thấy rằng hệ này vô nghiệm.

Kết luận :

Hệ (IV) có nghiệm duy nhất : $(1 ; 1)$.

$\boxed{?\ 3}$ Giải hệ phương trình :

$$(VII)\ \begin{cases} 3x + y = \dfrac{1}{x^2} \\ 3y + x = \dfrac{1}{y^2} \end{cases}.$$

2.4. Hệ phương trình vế trái đẳng cấp

Phương trình $F(x, y) = c$ được gọi là phương trình vế trái đẳng cấp bậc n nếu $F(x, y)$ là một đa thức mà mọi hạng tử đều có bậc n, còn c là một hằng số. Trong trường hợp $c = 0$ thì ta nói đó là phương trình đẳng cấp bậc n.

Hệ phương trình vế trái đẳng cấp là hệ mà mọi phương trình đều có vế trái đẳng cấp.

Ví dụ. $x^2 - 3xy + 2y^2 = 5$ *là một phương trình vế trái đẳng cấp bậc 2 ;*

$2x^3 + 5x^2y - 7y^3 = 0$ *là một phương trình vế trái đẳng cấp bậc 3 ;*

$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 5 \\ 3x^2 + xy - y^2 = 1 \end{cases}$ *là hệ phương trình vế trái đẳng cấp bậc 2.*

Cách giải hệ phương trình vế trái đẳng cấp

Ví dụ 1. *Giải hệ phương trình :*

$$(I)\quad \begin{cases} 2x^2 + 5xy + 2y^2 = 0 \\ 3x^2 + 4xy - 5y^2 = -7 \end{cases}.$$

Nghiên cứu cách giải

• Có thể dùng phép thế chăng ? Rõ ràng không thể rút ẩn trực tiếp từ bất cứ phương trình nào. Nhưng nếu khử được x^2 hoặc y^2 ở một phương trình thì có thể rút được một ẩn.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5xy + 2y^2 = 0 \\ 6x^2 + 8xy - 10y^2 = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5xy + 2y^2 = 0 \\ 7xy + 16y^2 = 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5xy + 2y^2 = 0 \\ x = \dfrac{-16y^2 + 14}{7y} \end{cases}.$$

Thay biểu thức của x vào phương trình $2x^2+5xy+2y^2 = 0$ được một phương trình trùng phương. Bạn hãy tiếp tục giải.

Vậy *có thể giải hệ này bằng phương pháp thế.*

• Có cách nào khác đơn giản hơn không ? Hãy nhận xét về nghiệm của hệ phương trình ! Dễ thấy nghiệm của hệ phương trình không thể có dạng (0 ; y) hoặc (x ; 0). Vì thế, đặt x = ty, hệ (I) trở thành

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} y^2(2t^2+5t+2)=0 & (1) \\ y^2(3t^2+4t-5)=-7 & (2) \end{cases}.$$

Vì $y \neq 0$ nên từ phương trình (1) suy ra $t_1 = -\dfrac{1}{2}$, $t_2 = -2$.

* Với $t_1 = -\dfrac{1}{2}$, từ phương trình (2) suy ra $y = \pm\dfrac{2\sqrt{7}}{5}$. Hệ có nghiệm :

$$\left(-\frac{\sqrt{7}}{5};\frac{2\sqrt{7}}{5}\right), \left(\frac{\sqrt{7}}{5};-\frac{2\sqrt{7}}{5}\right).$$

* Với $t = -2$, từ phương trình (2) suy ra : $y = \pm\sqrt{7}$. Hệ có nghiệm : $(-2\sqrt{7};\sqrt{7})$, $(2\sqrt{7}\,;-\sqrt{7})$. Vậy hệ (I) có bốn nghiệm :

$$\left(-\frac{\sqrt{7}}{5};\frac{2\sqrt{7}}{5}\right), \left(\frac{\sqrt{7}}{5};-\frac{2\sqrt{7}}{5}\right), (-2\sqrt{7};\sqrt{7}),\ (2\sqrt{7};-\sqrt{7}).$$

Như vậy,

Có hai cách giải hệ phương trình vế trái đẳng cấp :

1) Dùng phương pháp thế ;

2) Đặt $y = tx$ hay $x = ty$.

Nhận xét hai cách giải :

– Cách thứ nhất khá minh bạch, dễ hiểu, song tính toán có phần phức tạp.

– Cách thứ hai, cần lập luận đôi chút, nhưng tính toán đơn giản hơn.

Ví dụ 2. *Giải hệ phương trình :*

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} 3x^2+2xy+y^2=11 \\ x^2+2xy+5y^2=25 \end{cases}.$$

Giải. Có thể kiểm tra để thấy rằng hệ không có nghiệm dạng (x ; 0) và (0 ; y).

Đặt $x = ty$, hệ (III) trở thành :

$$\text{(IV)} \begin{cases} y^2(3t^2+2t+1)=11 \\ y^2(t^2+2t+5)=25 \end{cases}.$$

Với $y \neq 0$, (IV) $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2(t^2+2t+5)=25 \\ 25(3t^2+2t+1)-11(t^2+2t+5)=0 \end{cases}$ (Ta đã dùng phép biến đổi tương đương nào ?)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2(t^2+2t+5)=25 \\ 32t^2+14t-15=0 \end{cases}.$$

Từ đó được : $t_1 = -\dfrac{15}{16}$, $t_2 = \dfrac{1}{2}$.

* Với $t_1 = -\dfrac{15}{16}$ thì $y = \pm\dfrac{16}{\sqrt{41}}$. Suy ra $x = \mp\dfrac{15}{\sqrt{41}}$.

* $t_2 = \dfrac{1}{2}$, thì $y = \pm 2$. Suy ra $x = \pm 1$.

Vậy hệ có bốn nghiệm : $\left(-\dfrac{15}{\sqrt{41}};\dfrac{16}{\sqrt{41}}\right)$, $\left(\dfrac{15}{\sqrt{41}};-\dfrac{16}{\sqrt{41}}\right)$, (−1 ; −2), (1 ; 2).

$\boxed{?4}$ Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3x^2+5xy-4y^2=-24 \\ 5x^2-3y^2=8 \end{cases}.$$

2.5. Đưa về phương trình tích – Đặt ẩn phụ

Trên đây là những dạng cơ bản của hệ phương trình bậc hai hai ẩn. *Có nhiều phương trình không thuộc những dạng nói trên song có thể đưa về những dạng ấy nhờ cách dùng phương trình tích hoặc đặt ẩn phụ.* Những phương pháp này rất có lợi vì nó hạ bậc của phương trình.

Ví dụ 1. *Giải hệ phương trình :*

$$(I) \quad \begin{cases} xy-y^2-2x+4=0 & (1) \\ x^2-5y^2-3x-2y+22=0 & (2) \end{cases}$$

Nghiên cứu cách giải

Rõ ràng hệ phương trình này không thuộc các dạng đã xét. Nhận thấy phương trình (1) có thể *biến thành phương trình tích* (y–2)(x–y–2) = 0. Do đó :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases}(y-2)(x-y-2)=0\\ x^2-5y^2-3x-2y+22=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}(II) & \begin{cases}y-2=0\\ x^2-5y^2-3x-2y+22=0\end{cases}\\ (III) & \begin{cases}x-y-2=0\\ x^2-5y^2-3x-2y+22=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Hai hệ (II) và (III) thuộc dạng có một phương trình bậc nhất, một bậc hai.

Giải hai hệ này ta được nghiệm của hệ (I) là :

$$\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2};2\right), \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2};2\right), \left(\frac{15-\sqrt{321}}{8};\frac{-1-\sqrt{321}}{8}\right), \left(\frac{15+\sqrt{321}}{8};\frac{-1+\sqrt{321}}{8}\right).$$

$\boxed{?\,5}$ Giải hệ phương trình : $\begin{cases}2x^2-xy-y^2=0\\ 3x^2+2xy-y^2-3x+y=1\end{cases}$.

Ví dụ 2. *Giải hệ phương trình :*

$$(IV)\ \begin{cases}\dfrac{3x}{2x-y+1}+x^2+3y=-\dfrac{17}{4}\\ \dfrac{3x^3+9xy}{2x-y+1}=-\dfrac{15}{4}\end{cases}.$$

Giải. Nhận thấy (IV) có thể viết :

$$\begin{cases}\dfrac{3x}{2x-y+1}+x^2+3y=-\dfrac{17}{4}\\ \dfrac{3x}{2x-y+1}(x^2+3y)=-\dfrac{15}{4}\end{cases}.$$

Đặt $\begin{cases}\dfrac{3x}{2x-y+1}=u\\ x^2+3y=v\end{cases}$, hệ (IV) trở thành : $\begin{cases}u+v=-\dfrac{17}{4}\\ uv=-\dfrac{15}{4}\end{cases}$.

Giải hệ này ta được : $\begin{cases} u = -5 \\ v = \dfrac{3}{4} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = \dfrac{3}{4} \\ v = -5 \end{cases}$.

Như vậy, (IV) tương đương với hai hệ : $\begin{cases} \dfrac{3x}{2x - y + 1} = -5 \\ x^2 + 3y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$, $\begin{cases} \dfrac{3x}{2x - y + 1} = \dfrac{3}{4} \\ x^2 + 3y = -5 \end{cases}$.

Giải hai hệ này tìm được các nghiệm của hệ (IV) là :

$$\left(-\frac{15}{2}; -\frac{37}{2}\right), \left(-\frac{3}{10}; \frac{11}{50}\right), (2 ; -3), (4 ; -7).$$

BÀI TẬP

Giải các hệ phương trình từ bài 4 đến bài 12 :

4. $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + y = 11 \\ -2x^2 + 6xy - 4y^2 + 7x - y = -20 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} 2x^2 - 4y^2 - 3x + 8y = 9 \\ 3x^2 - 6y^2 - 4x + 13y - 14 = 0 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} x + y + xy + 13 = 0 \\ x^2 + y^2 - x - y = 32 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3 \\ x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 = 5 \end{cases}$;

8. $\begin{cases} x - y + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} \\ x^2 + y^2 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{y} = \dfrac{25}{4} \end{cases}$;

9. $\begin{cases} 3x + 2y = \dfrac{4}{x^2} \\ 3y + 2x = \dfrac{4}{y^2} \end{cases}$;

10. $\begin{cases} (x + 1)y + x^2 = 2y^2 - x - 2 \\ xy + y^2 + y = 2x^2 - x - 2 \end{cases}$;

11. $\begin{cases} -3x^2 + 2y^2 = 23 \\ 2x^2 - 3xy - 2y^2 = 13 \end{cases}$;

12. $\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 2 \end{cases}$;

Hãy liên tưởng đến các phương pháp giải đã học để tìm cách giải các hệ phương trình từ bài 13 đến bài 17.

13. $\begin{cases} 2x^2 - 2xy - x - y = 0 \\ x^2 - 5xy + 3y^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$; 14. $\begin{cases} 2x^2 + 7xy + 3y^2 - 11x - 18y + 15 = 0 \\ x^2 - 5xy + 2y^2 + 3x - 2 = 0 \end{cases}$;

15. $\begin{cases} 2(x+y)^2 - x + y - 13 = 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 - 2(x-y)^2 - x + y + 46 = 0 \end{cases}$;

16. $\begin{cases} \dfrac{3x^2 + xy - y^2}{x+y} = 9 \\ \dfrac{2x^3 - x^2y}{x+y} = 20 \end{cases}$; 17. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{y}\left(x + \dfrac{1}{y} - 1\right) = 30 \\ x + \dfrac{x}{y} - 1 = -13 \end{cases}$;

18. Tìm nghiệm nguyên của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x(2-y^2) = x^2 - xy - 1 \\ y(2-x^2) = y^2 - xy - 1 \end{cases}.$$

§3. BIỆN LUẬN HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ

Nếu ngoài các ẩn, hệ phương trình còn chứa những chữ có thể nhận nhiều giá trị khác nhau thì những chữ ấy được gọi là những *tham số*.

Ví dụ. *Trong hệ phương trình*

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = m \\ x + y = 8 \end{cases},$$

m là tham số.

Các giá trị của tham số ảnh hưởng đến sự có nghiệm, và cả số nghiệm của hệ phương trình. *Lập luận để tìm được các giá trị của tham số làm cho hệ có một nghiệm, có nhiều nghiệm hoặc vô nghiệm, v.v... được gọi là biện luận hệ phương trình.*

Việc biện luận thường căn cứ vào ý nghĩa của các phép toán, định nghĩa của phương trình, v.v... . Chẳng hạn :

– *Phép chia chỉ có nghĩa khi số chia khác 0 ;*

– Căn bậc chẵn chỉ có nghĩa khi biểu thức dưới căn không âm ;

– Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là phương trình bậc hai nếu $a \neq 0$;

v.v... .

3.1. Giải và biện luận

Ví dụ 1. *Giải và biện luận hệ phương trình*

$$(I)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = m \\ x + y = 8 \end{cases}.$$

Giải. Điều kiện xác định của hệ phương trình : $x \neq 0$, $y \neq 0$. Với điều kiện này

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - mxy = 0 \\ y = 8 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 16x + 64 - mx(8 - x) = 0 \\ y = x - 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)x^2 - 8(m+2)x + 64 = 0 & (1) \\ y = 8 - x & (2) \end{cases}.$$

Theo phương trình (2), y được xác định duy nhất bởi x nên chỉ cần biện luận phương trình (1).

• $m = -2$, phương trình (1) trở thành : $0x + 64 = 0$. Vô nghiệm !

Khi $m \neq -2$, (1) là một phương trình bậc hai. $\Delta' = 16(m^2 - 4) \geq 0$ khi $m \geq 2$ hoặc $m \leq -2$. Từ đó suy ra :

• $m < -2$ hoặc $m > 2$ thì $\Delta' > 0$. (1) có hai nghiệm phân biệt $x = \dfrac{4(m+2) \pm 4\sqrt{m^2 - 4}}{m+2}$. Do đó hệ có hai nghiệm :

$$\left(\frac{4(m+2) - 4\sqrt{m^2-4}}{m+2}; \frac{4(m+2) + 4\sqrt{m^2-4}}{m+2}\right),$$

$$\left(\frac{4(m+2) + 4\sqrt{m^2-4}}{m+2}; \frac{4(m+2) - 4\sqrt{m^2-4}}{m+2}\right).$$

• $m = 2$ thì $\Delta' = 0$. Phương trình (1) có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = 4$. Do đó hệ có nghiệm kép : $(4 ; 4)$.

• $-2 < m < 2$ thì $\Delta' < 0$. Phương trình (1) vô nghiệm. Do đó hệ vô nghiệm.

$\boxed{?\ 1}$ Giải và biện luận hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - y = m \\ x^2 - xy + y^2 + x = 0 \end{cases}.$$

3.2. Biện luận về sự có nghiệm

Trong việc biện luận này không đòi hỏi phải viết rõ các nghiệm mà chỉ cần chỉ rõ khi nào hệ có nghiệm.

Ví dụ 1. *Với giá trị nào của m thì hệ phương trình sau có nghiệm :*

$$(I)\ \begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = -1 & (1) \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = m & (2) \end{cases}.$$

Giải. Từ phương trình (1) suy ra rằng hệ này không nhận nghiệm có dạng $(x ; 0)$ hoặc $(0 ; y)$. Vì thế có thể đặt $y = tx$, (nếu hệ có nghiệm $(0 ; y)$ với $y \neq 0$ mà ta đặt $y = tx$ thì sẽ mất nghiệm). Khi đó (I) trở thành :

$$\begin{cases} x^2(2 + 3t + t^2) = -1 & (3) \\ x^2(1 + 3t + 2t^2) = m & (4) \end{cases}.$$

Nếu $m = 0$ thì từ (4) suy ra $2t^2 + 3t + 1 = 0$. Do đó $t_1 = -1$, $t_2 = -\dfrac{1}{2}$. Các giá trị này của t không thoả mãn (3). Vì thế :

• $m = 0$, hệ vô nghiệm.

Khi $m \neq 0$,

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(2 + 3t + t^2) = -1 & (3) \\ (m+2)t^2 + 3(m+1)t + 2m + 1 = 0 & (5) \end{cases}.$$

• $m = -2$ thì từ (5) suy ra $t = -1$, không thoả mãn phương trình (3).

• Với $m \neq 0$ và $m \neq -2$, phương trình (5) có hai nghiệm : $t_1 = -1$, $t_2 = -\dfrac{2m+1}{m+2}$.

Giá trị $t_1 = -1$ không thoả mãn phương trình (3).

Vì y được xác định bởi x nên với $t_2 = -\dfrac{2m+1}{m+2}$, hệ có nghiệm khi phương trình (3) có nghiệm. Khi đó (3) trở thành :

$$\frac{3-3m}{(m+2)^2}x^2 = -1.$$

Vì hệ không có nghiệm dạng (0 ; y) nên (3) có nghiệm khi $3-3m < 0$. Suy ra $m > 1$.

Kết luận :

Hệ có nghiệm khi $m > 1$.

Ví dụ 2. *Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm :*

$$(II)\quad \begin{cases} x+y+xy = m \\ x^2+y^2 = m-1 \end{cases}.$$

Giải. Đặt $x + y = S$, $xy = P$, hệ (II) trở thành :

$$\begin{cases} S+P = m \\ S^2-2P = m-1 \end{cases} \text{ hay } \quad (III)\ \begin{cases} P = m-S & (1) \\ S^2+2S-3m+1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Muốn cho hệ (II) có nghiệm thì hệ (III) phải có nghiệm (S , P) thoả mãn điều kiện

$$S^2 - 4P \geq 0.$$

Phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 3m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$.

Khi $m \geq 0$ hệ (III) có nghiệm : $S_1 = -1-\sqrt{3m}$, $P_1 = m+1+\sqrt{3m}$,

$$S_2 = -1+\sqrt{3m},\ P_2 = m+1-\sqrt{3m}.$$

Vì hệ (II) có nghiệm khi $S^2 - 4P \geq 0$ nên :

$$(-1-\sqrt{3m})^2 - 4m - 4 - 4\sqrt{3m} \geq 0$$

hoặc $$(-1+\sqrt{3m})^2 - 4m - 4 + 4\sqrt{3m} \geq 0$$

hay đơn giản là khi : $$2\sqrt{3m} \leq -m-3 \quad (5)$$

hoặc $$2\sqrt{3m} \geq m+3 \quad (6).$$

Bất đẳng thức (5) không xảy ra vì $m \geq 0$.

Bất đẳng thức (6) tương đương với $12m \geq m^2 + 6m + 9$ hay $(m-3)^2 \leq 0$. Vì $(m-3)^2 \geq 0$ nên từ đó suy ra $m = 3$.

Kết luận :

Hệ (II) có nghiệm khi $m = 3$.

? 2 Chứng minh rằng hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = m \\ xy - y^2 = -4 \end{cases}$$

có nghiệm với mọi giá trị của m.

3.3. Biện luận về sự có nghiệm duy nhất

Ví dụ 1. *Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :*

$$(I) \quad \begin{cases} xy - x + y = 2 \\ m(x+y) - xy + 1 = 0 \end{cases}.$$

Giải.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y(x+1) = x+2 \\ m(x+y) - xy + 1 = 0 \end{cases}.$$

Từ phương trình thứ nhất suy ra $x \neq -1$. Với điều kiện này

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x+2}{x+1} & (1) \\ (m-1)x^2 + (2m-1)x + 2m + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Vì y được xác định duy nhất bởi x nên hệ có nghiệm duy nhất khi phương trình (2) có nghiệm duy nhất.

- $m = 1$ thì phương trình (2) trở thành $x+3 = 0$, có nghiệm duy nhất $x = -3$.

  Vậy hệ có nghiệm duy nhất : $\left(-3\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

- Khi $m \neq 1$, phương trình (2) là một phương trình bậc hai. Hệ có nghiệm duy nhất khi phương trình (2) có nghiệm kép khác -1. Điều đó xảy ra khi :

$$\begin{cases}\Delta = -4m^2 + 5 = 0 \\ -\dfrac{2m-1}{2(m-1)} \neq -1\end{cases} \quad \text{hay khi} \quad \begin{cases} m = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ 2m-1 \neq 2m-2\end{cases}.$$

Hiển nhiên $2m - 1 \neq 2m - 2$.

Kết luận :

Hệ có nghiệm duy nhất khi $m = 1, m = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 2. *Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :*

$$(II) \quad \begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ (x^2 + mx + y)(2x^2 - my + 1) = 0\end{cases}.$$

Nghiên cứu cách giải. Hệ (II) tương đương với hai hệ :

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ x^2 + mx + y = 0\end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} y = 3x + 1 \\ 2x^2 - my + 1 = 0\end{cases},$$

hay

$$(III) \quad \begin{cases} y = 3x + 1 \\ x^2 + (m+3)x + 1 = 0\end{cases} \quad \text{và} \quad (IV) \quad \begin{cases} y = 3x + 1 \\ 2x^2 - 3mx - m + 1 = 0\end{cases}.$$

Vì y được xác định duy nhất bởi x nên hệ (II) có nghiệm duy nhất chỉ khi xảy ra một trong các trường hợp sau :

a) (III) có nghiệm kép và (IV) vô nghiệm ;

b) (IV) có nghiệm kép và (III) vô nghiệm ;

c) (III) và (IV) có nghiệm kép trùng nhau.

• a) xảy ra khi $\begin{cases} m^2 + 6m + 5 = 0 \\ 9m^2 + 8m - 8 < 0\end{cases}$.

Giải phương trình đối với ẩn m ta được $m = -1, m = -5$.

Với $m = -1$ thì $9m^2 + 8m - 8 = 9 - 16 < 0$.

Với $m = -5$ thì $9m^2 + 8m - 8 = 225 - 48 > 0$.

Vậy với $m = -1$, hệ có nghiệm duy nhất.

Vì hệ phương trình luôn luôn có nghiệm (0 ; 0) nên muốn cho nghiệm là duy nhất thì phương trình $\alpha^2 - 7\alpha - m = 0$ phải vô nghiệm hoặc có nghiệm kép bằng 0. Nếu phương trình này có nghiệm kép thì nghiệm kép bằng $\frac{7}{2} \neq 0$. Do đó phương trình này phải vô nghiệm. Muốn vậy, $\Delta = 49 + 4m < 0$ hay $m < -\frac{49}{4}$.

Ngược lại, giả sử $m < -\frac{49}{4}$. Ta có :

$$(VI) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2y^2 = 5x^2 + mx \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y - m) = 0 \end{cases}$$

Do đó (VI) tương đương với hai hệ :

$$(VII) \begin{cases} x^3 - 2y^2 = 5x^2 + mx \\ x - y = 0 \end{cases} \text{ và } (VIII) \begin{cases} x^3 - 2y^2 = 5x^2 + mx \\ x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y - m = 0 \quad (*) \end{cases}.$$

$$\text{Hệ (VII)} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x(x^2 - 7x - m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 = y \\ \begin{cases} x = y \\ x^2 - 7x - m = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vì $m < -\frac{49}{4}$ nên phương trình $x^2 - 7x - m = 0$ có $\Delta = 49 + 4m < 0$. Do đó hệ (VII) có nghiệm duy nhất là (0 ; 0).

Xét phương trình (*) của hệ (VIII). Nếu hệ (VIII) có nghiệm (x ; y) thì với giá trị này của y phương trình (*) đối với ẩn x phải có nghiệm. Viết lại phương trình (*) như một phương trình của ẩn x :

$$x^2 + (y - 3)x + y^2 - 3y - m = 0.$$

Với $m < -\frac{49}{4}$, phương trình này có $\Delta = -3y^2 + 6y + 9 + 4m < -3y^2 + 6m - 40$.

Nhưng $-3m^2 + 6m - 40 = -3(m + 1)^2 - 37 < 0$ nên $\Delta < 0$ với mọi $m < -\frac{49}{4}$.

Vậy khi $m < -\frac{49}{4}$ phương trình (*) vô nghiệm, do đó hệ (VIII) vô nghiệm.

Kết luận :

Hệ (VI) có nghiệm duy nhất khi $m < -\frac{49}{4}$.

$\boxed{?\,3}$ Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} x^2 + 2y = \dfrac{my}{x} \\ y^2 + 2x = \dfrac{mx}{y} \end{cases}.$$

3.4. Biện luận về nghiệm thoả mãn những điều kiện bổ sung.

Có những bài toán đòi hỏi phải biện luận không những về sự có nghiệm của hệ phương trình mà còn đòi hỏi các nghiệm phải thoả mãn những điều kiện nào đó.

Ví dụ 1. *Tìm giá trị của m để hệ*

$$(I)\ \begin{cases} x + y + xy = m + 1 \\ x^2y + xy^2 = m \end{cases}$$

có ít nhất một nghiệm (x ; y) thoả mãn điều kiện x > 0, y > 0.

Giải. Điều kiện $x > 0$, $y > 0$ tương đương với hai điều kiện $v = xy > 0$ và $u = x + y > 0$.

Hệ (I) có ít nhất một nghiệm $x > 0$. $y > 0$ khi hệ

$$(II)\ \begin{cases} u + v = m + 1 \\ uv = m \end{cases}$$

có ít nhất một nghiệm (u ; v) thoả mãn các điều kiện : $u > 0, v > 0$, $u^2 - 4v \geq 0$.

Hệ (II) luôn luôn có hai nghiệm (m ; 1) , (1 ; m). Do đó các điều kiện trên được thoả mãn khi :

$$\begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 4 \geq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m > 0 \\ 1 - 4m \geq 0 \end{cases}.$$

Điều này xảy ra khi : $m \geq 2$ hoặc khi $0 < m \leq \frac{1}{4}$.

Kết luận :

Hệ (I) có ít nhất một nghiệm (x ; y) thoả mãn điều kiện $x > 0$, $y > 0$ khi

$$m \geq 2 \text{ hoặc khi } 0 < m \leq \frac{1}{4}.$$

Ví dụ 2. *Tìm giá trị của m để hệ phương trình*

$$(III)\quad \begin{cases} x - 2y = m \\ x^2 + y^2 + m = 0 \end{cases}$$

có hai nghiệm $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$ sao cho khoảng cách d giữa hai điểm $A(x_1 ; y_1)$, $B(x_2 ; y_2)$ trên mặt phẳng toạ độ là lớn nhất.

Giải. Hệ (III) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 2y \\ 5y^2 + 4my + m^2 + m = 0 \quad (*) \end{cases}$.

Hệ có hai nghiệm khi

$\Delta' = 4m^2 - 5m^2 - 5m = -m^2 - 5m > 0 \Leftrightarrow m(m+5) < 0 \Leftrightarrow -5 < m < 0$

$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (2y_1 - 2y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$\quad = 5(y_1 - y_2)^2 = 5[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2]$.

Vì y_1, y_2 là hai nghiệm của phương trình (*) nên theo hệ thức Vi-ét

$$y_1 + y_2 = -\frac{4m}{5},\ y_1y_2 = \frac{m^2 + m}{5}.$$

Do đó d lớn nhất khi

$$\left(-\frac{4m}{5}\right)^2 - 4\frac{m^2 + m}{5} \text{ lớn nhất hay khi } \frac{-4(m^2 + 5m)}{25} \text{ lớn nhất.}$$

Điều này xảy ra khi biểu thức $A = m^2 + 5m$ có giá trị nhỏ nhất. Coi A như một hàm số bậc hai của biến số m trên tập xác định $(-5 ; 0)$, A nhỏ nhất khi $m = -\frac{5}{2}$.

Đáp số : $m = -\frac{5}{2}$.

Ví dụ 3. *(Đề thi vào Học viện Kĩ thuật quân sự 1998 – 1999)*

Tìm các giá trị của a và b để hệ phương trình sau có nhiều hơn 4 nghiệm :

$$(IV)\quad \begin{cases} x^2 - y^2 + a(x+y) = x - y + a \\ x^2 + y^2 + bxy = 3 \end{cases}.$$

Nghiên cứu cách giải. Hệ (IV) $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y-1)(x-y+a) = 0 \\ x^2 + y^2 + bxy = 3 \end{cases}$. Do đó hệ (IV) tương đương với hai hệ :

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 + y^2 + bxy = 3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y = x + a \\ x^2 + y^2 + bxy = 3 \end{cases}$$

hay

$$(V)\begin{cases} y = 1 - x \\ (2-b)x^2 - (2-b)x - 2 = 0 \end{cases}, \quad (VI)\begin{cases} y = x + a \\ (b+2)x^2 + a(b+2)x + a^2 - 3 = 0 \end{cases}.$$

Hãy xét xem mỗi hệ (V) hoặc (VI) có thể có bao nhiêu nghiệm.

Để cho tổng số nghiệm của hai hệ này lớn hơn 4 thì ít nhất phải có một hệ có nhiều hơn 2 nghiệm.

Nhưng số nghiệm của mỗi hệ phụ thuộc vào phương trình nào ?

Trong mỗi hệ, y được xác định duy nhất bởi x. Do đó số nghiệm của mỗi hệ phụ thuộc vào phương trình thứ hai của nó.

Muốn cho một hệ có nhiều hơn 2 nghiệm thì *phương trình thứ hai* trong hệ ấy phải có dạng như thế nào ?

Nếu $b \neq 2$ thì phương trình $(2-b)x^2 + (2-b)x - 2 = 0$ là một phương trình bậc hai, có nhiều nhất 2 nghiệm ; nếu $b = 2$ thì phương trình này trở thành $0x^2 + 0x - 2 = 0$, vô nghiệm. Như vậy, trong mọi trường hợp hệ (V) không thể có nhiều hơn 2 nghiệm.

Tương tự hãy xét hệ (VI).

– Nếu $b \neq -2$ thì hệ (VI) có nhiều nhất hai nghiệm, do đó hệ đã cho có nhiều nhất 4 nghiệm.

– Nếu $b = -2$ thì phương trình thứ hai của hệ (VI) trở thành $0x^2 + 0x + a^2 - 3 = 0$. Nếu $a^2 - 3 \neq 0$ thì phương trình này vô nghiệm ; nếu $a^2 - 3 = 0$ thì phương trình

28. $\begin{cases}(x^2+y-m)(x-y)=6\\x^2+x-m=5\end{cases}$;

29. $\begin{cases}m(x+y)-2xy=-2\\x^2+y^2-x-y=m\end{cases}$.

30. $\begin{cases}2x^2-2y=m\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\\2y^2-2x=m\left(1-\dfrac{1}{y}\right)\end{cases}$.

31. Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau có đúng 3 nghiệm :

$$\begin{cases}x^2+y^2+xy-x-y=m\\x^3-y^3-x+y=0\end{cases}.$$

32. Với giá trị của m thì hệ phương trình sau có hai nghiệm $(x_1 ; y_1)$, $(x_2 ; y_2)$ sao cho khoảng cách giữa hai điểm $A(x_1 ; y_1)$, $B(x_2 ; y_2)$ trên mặt phẳng toạ độ là lớn nhất :

$$\begin{cases}x^2+y^2+m=0\\2x-y=m\end{cases}.$$

BÀI TẬP TỰ KIỂM TRA

33. Giải hệ phương trình :

a) $\begin{cases}x^3-y=5(1-x)\\y(y^2+5)=x+5\end{cases}$; b) $\begin{cases}2x^2-4xy+2y^2-3x+3y+1=0\\x^2-5xy-3x+2y+4=0\end{cases}$.

34. Tìm các giá trị nguyên dương của m để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases}x^2+y^2-2x-2y+xy=-1\\x+y-xy=m\end{cases}.$$

35. Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases}x^2-y^2=1-2my\\y^2-x^2=1-2mx\end{cases}.$$

§4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯA ĐƯỢC VỀ HỆ BẬC HAI

4.1. Hệ có bậc cao hơn 2

Có nhiều hệ phương trình bậc cao hơn 2 có thể giải được bằng cách đưa về hệ bậc hai.

Những phương pháp thường dùng để đưa một hệ bậc cao về hệ bậc hai là :

– Biến một trong các phương trình của hệ thành phương trình tích ;

– Đặt ẩn phụ.

Ví dụ 1. *Giải hệ phương trình :*

$$(I)\quad \begin{cases} x^3 - y^3 = 3x - 3y \\ x^2 - xy - 2y^2 = 4 \end{cases}.$$

Giải. Trước hết có thể *biến phương trình thứ nhất của hệ thành phương trình tích.*

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2 - 3) = 0 \\ x^2 - xy - 2y^2 = 4 \end{cases}.$$

Hệ này tương đương với hai hệ :

$$(II)\ \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 - xy - 2y^2 = 4 \end{cases}, \quad (III)\ \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \\ x^2 - xy - 2y^2 = 4 \end{cases}.$$

Giải (II) : $\begin{cases} x = y \\ x^2 - x^2 - 2x^2 = 4 \end{cases}$. Hệ vô nghiệm.

Giải (III) : (III) là hệ vế trái đẳng cấp.

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x^2 - xy - 2y^2 = 4 \end{cases}.$$

Bạn đọc có thể kiểm tra để thấy rằng hệ không có nghiệm dạng (0 ; y), (x ; 0). Do đó có thể đặt x = ty và có :

$$\begin{cases} y^2(t^2 + t + 1) = 3 \\ y^2(t^2 - t - 2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2(t^2 + t + 1) = 3 \\ t^2 + 7t + 10 = 0 \end{cases}.$$

Phương trình $t^2 + 7t + 10 = 0$ có hai nghiệm : $t_1 = -2, t_2 = -5$.

• Với $t_1 = -2$ thì $y^2(4 - 2 + 1) = 3$. Suy ra $y = \pm 1$. Hệ có nghiệm : $(-2 ; 1)$, $(2 ; -1)$.

• Với $t = -5$ thì $y^2(25 - 5 + 1) = 3$. Suy ra $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{7}}$. Hệ có nghiệm :

$\left(-\dfrac{5}{\sqrt{7}};\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right), \left(\dfrac{5}{\sqrt{7}};-\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)$.

Kết luận :

Hệ có 4 nghiệm : $(-2 ; 1), (2 ; -1), \left(-\dfrac{5}{\sqrt{7}};\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right), \left(\dfrac{5}{\sqrt{7}};-\dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)$.

Ví dụ 2. *Giải hệ phương trình :*

$$(IV)\ \begin{cases} x(y-1)(x+2y-5)=3 \\ xy+2y-5=4 \end{cases}.$$

Nghiên cứu cách giải.

Nếu khai triển phương trình thứ nhất của hệ (IV), ta được một phương trình bậc cao hơn 2 và khó tìm ra cách giải. Nhận xét hai phương trình, ta thấy : $xy + 2y - 5 = (xy - x) + (x + 2y - 5)$. Do đó có thể *đặt ẩn phụ* :

$$\begin{cases} xy - x = u \\ x + 2y - 5 = v \end{cases}.$$

Khi đó hệ (IV) trở thành :

$$\begin{cases} uv = 3 \\ u + v = 4 \end{cases}.$$

Giải hệ này ta được $\begin{cases} u = 1 \\ v = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases}$.

hay : (V) $\begin{cases} xy - x = 1 \\ x + 2y - 5 = 3 \end{cases}$ hoặc (VI) $\begin{cases} xy - x = 3 \\ x + 2y - 5 = 1 \end{cases}$.

Hệ (V) cho ta hai nghiệm : $\left(3-\sqrt{7};\frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)$, $\left(3+\sqrt{7};\frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$.

Hệ (VI) vô nghiệm.

Kết luận :

Hệ (IV) có hai nghiệm : $\left(3-\sqrt{7};\frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)$, $\left(3+\sqrt{7};\frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$.

Ví dụ 3. *Giải hệ phương trình :*

$$(VII)\begin{cases} x+y+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4 \\ x^2+y^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=4 \end{cases}.$$

Nghiên cứu cách giải.

Điều kiện xác định hệ phương trình : $x \neq 0,\ y \neq 0$. Đây là một hệ đối xứng loại I. Hãy thử xem, nếu đặt $x + y = u$, $xy = v$ thì có thuận lợi hay khó khăn gì.

Khi đó phương trình thứ hai trở thành $x^4y^2 + x^2y^4 + x^2 + y^2 = 4x^2y^2$ hay $v^2(u^2 - 2v) + u^2 - 2v = 4v^2$. Đó là một phương trình *bậc 4* đối với u và v.

Có thể có cách nào tránh được khó khăn ấy?

Nhận xét hai phương trình ta thấy

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\frac{1}{x}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2.$$

Nếu đặt ẩn phụ $u = x+\frac{1}{x}$, $v = y+\frac{1}{y}$, hệ (VII) trở thành một hệ *bậc hai* :

$$\begin{cases} u+v=4 \\ u^2+v^2-4=4 \end{cases}.$$

Giải hệ này bằng phương pháp thế ta được : $u = 2$, $v = 2$.

Do đó

$$\begin{cases} x+\frac{1}{x}=2 \\ y+\frac{1}{y}=2 \end{cases}.$$

Giải hệ này ta được nghiệm của hệ (VII) : $(1\ ;\ 1)$.

Ví dụ 4. *Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm :*

$$(VIII)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x^4 + y^4 - xy = m^2 - 3 \end{cases}.$$

Giải. $(\text{VIII}) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 - xy = m^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ 2x^2y^2 + xy - 3 = 0 \end{cases}.$

Phương trình $2x^2y^2 + xy - 3 = 0$ cho ta $xy = 1$, $xy = -\frac{3}{2}$.

- Với $xy = 1$, từ $x^2 + y^2 = m$ suy ra $(x + y)^2 - 2xy = m$.

Do đó $(x + y)^2 = m + 2$.

- Với $xy = -\frac{3}{2}$, ta có $(x + y)^2 = m - 3$.

Muốn cho hệ có nghiệm thì $(x + y)^2 - 4xy \ge 0$. Như vậy ta phải có :

$$m + 2 - 4 \ge 0 \text{ hoặc } m - 3 + 6 \ge 0.$$

Kết luận :

Hệ (VIII) có nghiệm khi $m \ge -3$.

$\boxed{?\,1}$ Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 21 \end{cases}.$$

4.2. Hệ phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

Nhớ lại rằng $|A| = \left[\begin{array}{ll} A & \text{nếu } A \ge 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{array}\right.$;

$$|A| \le \alpha \Leftrightarrow -\alpha \le A \le \alpha \ ; \quad |A| \ge \alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A \ge \alpha \\ A \le -\alpha \end{array}\right..$$

Ví dụ. *1)* $|2x - 6| = \left[\begin{array}{ll} 2x - 6 & \textit{nếu } x \ge 3 \\ -2x + 6 & \textit{nếu } x < 3 \end{array}\right..$

2) Ta biết rằng $x^2 + 5x - 6 = \left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{47}{4}$ *nên* $x^2 + 5x - 6 \geq 0$ *khi* $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{7}{2}\right)^2$.

Do đó $x+\frac{5}{2} \geq \frac{7}{2}$ *hoặc* $x+\frac{5}{2} \leq -\frac{7}{2}$ *hay khi* $x \geq 1$ *hoặc* $x \leq -6$. *Vì thế :*

$$|x^2+5x-6| = \left[\begin{array}{ll} x^2+5x-6 & \text{nếu } x \in (-\infty\,;-6] \cup [1;+\infty) \\ -x^2-5x+6 & \text{nếu } x \in (-6\,;1) \end{array}\right..$$

$$3)\ |x-y| = \left[\begin{array}{ll} x-y & \text{nếu } x \geq y \\ y-x & \text{nếu } x < y \end{array}\right..$$

$$4)\ |xy+7| = \left[\begin{array}{ll} xy+7 & \text{nếu } xy \geq -7 \\ -xy-7 & \text{nếu } xy < -7 \end{array}\right.$$

Như vậy, đối với biểu thức $|f(x)|$, nếu ta tìm được những giá trị của x chia trục số thành những khoảng mà trên mỗi khoảng biểu thức $f(x) \geq 0$ hoặc $f(x) \leq 0$ thì có thể viết $|f(x)|$ thành những biểu thức không chứa dấu giá trị tuyệt đối. Chẳng hạn :

x	$-\infty$		-6		1		$+\infty$
$\lvert x^2+5x-6\rvert$		x^2+5x-6		$-x^2-5x+6$		x^2+5x-6	

Hai phương pháp thông dụng để giải hệ phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối là :

1. Tìm các điều kiện của ẩn để có thể viết hệ phương trình dưới dạng những hệ phương trình không chứa dấu giá trị tuyệt đối.

2. Nếu có phương trình có dạng $|f(x)| = g(x)$ *thì phương trình này tương đương với hệ*

$$\begin{cases} (f(x))^2 = (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Ví dụ 1. *Giải hệ phương trình :*

$$(I)\quad \begin{cases} |x-1|+y^2=6 \\ x+1+|y-2|=-2 \end{cases}.$$

Giải.

$$(I) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (II)\begin{cases} x-1+y^2=6 & \text{nếu } x\ge 1 \\ x+1+y-2=-2 & \text{nếu } y\ge 2 \end{cases} \\ (III)\begin{cases} x-1+y^2=6 & \text{nếu } x\ge 1 \\ x+1-y+2=-2 & \text{nếu } y<2 \end{cases} \\ (IV)\begin{cases} 1-x+y^2=6 & \text{nếu } x<1 \\ x+1+y-2=-2 & \text{nếu } y\ge 2 \end{cases} \\ (V)\begin{cases} 1-x+y^2=6 & \text{nếu } x<1 \\ x+1-y+2=-2 & \text{nếu } y<2 \end{cases} \end{array}\right..$$

Bốn hệ này đều giải được bằng phương pháp thế. Bạn đọc hãy tự giải

Đáp số : (−4 ; 1) , (−5 ; 0).

Ví dụ 2. *Giải hệ phương trình :*

$$(VI)\quad \begin{cases} |xy+2|-x^2=4 \\ 3x^2+y^2=21 \end{cases}.$$

Giải.

$$(VI) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (VII)\begin{cases} xy+2-x^2=4 & \text{nếu } xy\ge -2 \\ 3x^2+y^2=21 \end{cases} \\ (VIII)\begin{cases} -xy-2-x^2=4 & \text{nếu } xy<-2 \\ 3x^2+y^2=21 \end{cases} \end{array}\right..$$

(VII) và (VIII) là những hệ vế trái đẳng cấp

Rõ ràng hai hệ không có nghiệm dạng (0 ; y), (x ; 0).

Đặt y = tx, hệ (X) trở thành :

$\begin{cases} x^2(t-1)=2 \\ x^2(3+t^2)=21 \end{cases}$. Vì $x \neq 0$ suy ra $\begin{cases} x^2(t-1)=2 \\ 6+2t^2=21t-21 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x^2(t-1)=2 \\ 2t^2-21t+27=0 \end{cases}$.

Phương trình thứ hai của hệ này cho ta : $t_1 = 9, t_2 = \frac{3}{2}$.

Với $t_1 = 9$, ta có $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$. Từ $y = 9x$ suy ra các giá trị tương ứng của y là $y = \frac{9}{2}$, $y = -\frac{9}{2}$.

Các giá trị tương ứng của x và y thoả mãn điều kiện $xy \geq -2$. Do đó hệ (VII) có nghiệm :

$$\left(\frac{1}{2} ; \frac{9}{2}\right), \left(-\frac{1}{2} ; -\frac{9}{2}\right).$$

Với $t_2 = \frac{3}{2}$, ta có $x = \pm 2$. Lập luận tương tự như trên, hệ (VII) có nghiệm : $(-2 ; -3), (2 ; 3)$.

Với $y = tx$ hệ (VIII) trở thành :

$\begin{cases} x^2(t+1) = -6 \\ x^2(3+t^2) = 21 \end{cases}$. Vì $x \neq 0$ nên ta có :

$\begin{cases} x^2(t+1) = -6 \\ -18 - 6t^2 = 21t + 21 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x^2(t+1) = -6 \\ 2t^2 + 7t + 13 = 0 \end{cases}$.

Hệ này vô nghiệm.

Kết luận :

Hệ (VI) có 4 nghiệm : $\left(\frac{1}{2} ; \frac{9}{2}\right), \left(-\frac{1}{2} ; -\frac{9}{2}\right), (-2 ; -3), (2 ; 3)$.

Ví dụ 3. *Giải hệ phương trình :*

$$(IX) \begin{cases} |x - 2y| = 3x + 2 \\ 2x^2 - 3xy - 4x + y = -25 \end{cases}.$$

Nghiên cứu cách giải.. Ta cũng có thể dùng tính tương đương của hệ (XII) với hai hệ ứng với các trường hợp : $x \geq 2y$, $x < 2y$ và khi tìm được các giá trị tương ứng của x và y ta phải kiểm tra các điều kiện này.

Có thể có phương pháp khác không ?

Theo nhận xét ở đầu mục 4.2, với điều kiện

$$3x + 2 \geq 0, \text{ hay } x > -\frac{2}{3},$$

ta có thể bình phương hai vế của phương trình thứ nhất. Như vậy,

$$(XII) \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2y)^2 = (3x+2)^2 \\ 2x^2 - 3xy - 4x + y = -25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2y)^2 - (3x+2)^2 = 0 \\ 2x^2 - 3xy - 4x + y = -25\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2y-3x-2)(x-2y+3x+2) = 0 \\ 2x^2 - 3xy - 4x + y = -25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-2x-2y-2)(4x-2y+2)^2 = 0 \\ 2x^2 - 3xy - 4x + y = -25\end{cases}.$$

Do đó hệ (XII) tương đương với hai hệ :

$$(XIII)\begin{cases}2x+2y+2=0 \\ 2x^2 - 3xy - 4x + y = -25\end{cases} \quad \text{và} \quad (XIV)\begin{cases}4x-2y+2=0 \\ 2x^2 - 3xy - 4x + y = -25\end{cases}.$$

Giải (XIII) : $\begin{cases}y = -x-1 \\ 2x^2 + 3x^2 + 3x - 4x - x - 1 = -25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = -x-1 \\ 5x^2 - 2x + 24 = 0\end{cases}.$

Hệ này vô nghiệm.

Giải (XIV) : $\begin{cases}y = 2x+1 \\ 2x^2 - 6x^2 - 3x - 4x + 2x + 1 = -25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = 2x+1 \\ -4x^2 - 5x + 26 = 0\end{cases}.$

Phương trình thứ hai của hệ vừa được cho ta : $x_1 = 2, x_2 = -\frac{13}{4}$.

Nhưng $x_2 = -\frac{13}{4} < -\frac{2}{3}$, không thoả mãn điều kiện $x > -\frac{2}{3}$.

Kết luận :

Hệ (IX) có một nghiệm (2 ; 5).

$\boxed{?2}$ Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}|xy - 10| = 20 - x^2 \\ xy = 5 + y^2\end{cases}.$$

4.3. Hệ phương trình vô tỉ

Những phương pháp thường dùng để giải hệ phương trình vô tỉ là :

– Khử căn thức để đưa hệ đã cho về hệ hữu tỉ ;

– Đặt ẩn phụ.

Khi khử căn thức ta thường phải nâng cả hai vế của một phương trình lên luỹ thừa cùng một bậc. Lúc đó ta dùng các phép biến đổi tương đương sau đây :

1) Phương trình $\sqrt{f(x)} = g(x)$ *tương đương với hệ* $\begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$;

2) Phương trình $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = h(x)$ *tương đương với hệ*

$$\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ g(x) \ge 0 \\ h(x) \ge 0 \\ [\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}]^2 = [h(x)]^2 \end{cases}$$

3) Phương trình $\sqrt[3]{f(x)} = g(x)$ *tương đương với phương trình* $f(x) = [g(x)]^3$.

Ví dụ 1. *Giải hệ phương trình :*

$$(I) \quad \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \\ \sqrt{x+3} + \sqrt{y+3} = 4 \end{cases}.$$

Giải. Điều kiện của các ẩn là : $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$. Với các điều kiện này :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = 2 - \sqrt{x} \\ \sqrt{y+3} = 4 - \sqrt{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 4\sqrt{x} + x \\ y + 3 = 16 - 8\sqrt{x+3} + x + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 4\sqrt{x} + x \\ 4 - 4\sqrt{x} + x = 16 - 8\sqrt{x+3} + x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 4\sqrt{x} + x \\ 2\sqrt{x+3} = 3 + \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 4\sqrt{x} + x \\ 4x + 12 = 9 + x + 6\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 4\sqrt{x} + x \\ x + 1 = 2\sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 4\sqrt{x} + x \\ x^2 + 2x + 1 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - 4\sqrt{x} + x \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Từ đó suy ra hệ có nghiệm (1 ; 1).

Kết luận :

Hệ (I) có một nghiệm (1 ; 1)

Ví dụ 2. *Giải hệ phương trình :*

$$(II)\ \begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{\sqrt{x-y}}=8 \\ \sqrt{\sqrt{x^3+x^2y-xy^2-y^3}}=12 \end{cases}.$$

Nghiên cứu cách giải.

Có nên nâng hai vế của phương trình thứ hai lên luỹ thừa bậc 4 chăng? Nếu vậy hệ phương trình trở nên phức tạp.

Hãy nhận xét dạng các phương trình trong hệ.

Phương trình thứ hai có thể viết thành $\sqrt{\sqrt{(x+y)(x^2-y^2)}}=12$.

Cách viết này đã cho thấy mối liên hệ của nó với phương trình thứ nhất chưa?

Có thể viết cách khác. Vì $x+y\geq 0$ nên : $\sqrt{\sqrt{(x+y)(x^2-y^2)}}=\sqrt{\sqrt{(x+y)^2(x-y)}}=\sqrt{(x+y)\sqrt{(x-y)}}=\sqrt{x+y}.\sqrt{\sqrt{x-y}}$.

Vậy có thể dùng phương pháp *đặt ẩn phụ* : $\sqrt{x+y}=u$, $u\geq 0$, $\sqrt{\sqrt{x-y}}=v$, $v\geq 0$.

Bây giờ ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} u+v=8 \\ uv=12 \end{cases}.$$

Hệ này cho ta $\begin{cases} u=2 \\ v=6 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=6 \\ v=2 \end{cases}$.

Từ đó ta có : $\begin{cases} \sqrt{x+y}=2 \\ \sqrt{\sqrt{x-y}}=6 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \sqrt{x+y}=6 \\ \sqrt{\sqrt{x-y}}=2 \end{cases}$.

Giải hai hệ này ta được các nghiệm : (650 ; –646), (26 ; 10).

Kết luận :

Hệ (II) có hai nghiệm : (650 ; –646), (26 ; 10).

Ví dụ 3. *Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm :*

$$(III)\ \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=\sqrt{m} \\ \sqrt{x-2}+\sqrt{y+1}=\sqrt{m} \end{cases}.$$

Giải. Điều kiện xác định của hệ phương trình : $x \geq 2$, $y \geq 2$.

$$(III) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=\sqrt{m} \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=\sqrt{x-2}+\sqrt{y+1} \end{cases}.$$

Vì hai vế của phương trình thứ hai không âm nên có thể bình phương chúng :

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=\sqrt{m} \\ x+y-1+2\sqrt{xy-2x+y-2}=x+y-1+2\sqrt{xy+x-2y-2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=\sqrt{m} \\ \sqrt{xy-2x+y-2}=\sqrt{xy+x-2y-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=\sqrt{m} \\ -2x+y=x-2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=\sqrt{m} \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{m} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x-1+2\sqrt{x^2-x-2}=m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2\sqrt{x^2-x-2}=m+1-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x \leq \dfrac{m+1}{2} \\ 4x^2-4x-8=4x^2-4(m+1)x+(m+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x \leq \dfrac{m+1}{2} \\ 4mx=(m+1)^2+8 \end{cases}.$$

- $m=0$, từ phương trình cuối suy ra hệ vô nghiệm.
- $m \neq 0$ hệ có nghiệm nếu $2 \leq x = \dfrac{(m+1)^2+8}{4m} \leq \dfrac{m+1}{2}$.

Suy ra $m \in [3 ; +\infty)$

Kết luận :

Hệ (III) có nghiệm khi $m \in [3\,;+\infty)$.

$\boxed{?\,3}$ Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y+1}=3\\ \sqrt{x-1}+\sqrt{y+6}=3\end{cases}.$$

4.4. Dùng hệ phương trình để giải phương trình vô tỉ

Ví dụ 1. *Giải phương trình :* $\sqrt[4]{47-2x}+\sqrt[4]{35+2x}=4$.

Nghiên cứu cách giải.

Có thể khử căn bậc bốn bằng cách nâng hai vế lên luỹ thừa bậc bốn được chăng ?

Hãy nhận xét dạng của hai căn thức. Tổng của hai biểu thức dưới căn là một hằng số, cụ thể là : $47 - 2x + 35 + 2x = 82$.

Nếu đặt $u = \sqrt[4]{47-2x}$, $v = \sqrt[4]{35+2x}$, ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}u+v=4\\ u^4+v^4=82\end{cases}.$$

Chỉ cần tìm được u hoặc v là đủ để tìm được x.

Hệ trên đây tương đương với hệ :

$$\begin{cases}u+v=4\\ [(u+v)^2-2uv]^2-2u^2v^2=82\end{cases} \text{ hay } \begin{cases}u+v=4\\ u^2v^2-32uv+87=0\end{cases}.$$

Hệ vừa nhận được tương đương với hai hệ :

$$\text{(I)}\begin{cases}u+v=4\\ uv=29\end{cases} \text{ và (II) } \begin{cases}u+v=4\\ uv=3\end{cases}.$$

Hệ (I) vô nghiệm.

Hệ (II) cho ta $\begin{cases}u=1\\ v=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u=3\\ v=1\end{cases}$.

- Với $u = 1$ ta có $\sqrt[4]{47-2x} = 1$. Do đó : $47-2x = 1$. Suy ra $x = 23$.
- Với $u = 3$ ta có $\sqrt[4]{47-2x} = 3$. Do đó : $47-2x = 81$. Suy ra $x = -17$.

Kết luận :

Phương trình đã cho có hai nghiệm : $x_1 = 23, x_2 = -17$.

Ví dụ 2. *Giải phương trình :*

$$x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}.$$

Giải. Đặt $t = \sqrt[3]{2x-1}$, ta có : $t^3 = 2x-1$. Do đó có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3+1=2t \\ t^3+1=2x \end{cases}$$

Đó là một hệ đối xứng loại II. Hệ này tương đương với hệ :

$$\begin{cases} x^3+1=2t \\ (x-t)(x^2+xt+t^2+2)=0 \end{cases}$$

do đó nó tương đương với hai hệ :

$$\text{(III)}\begin{cases} x^3+1=2t \\ x-t=0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \text{(IV)}\begin{cases} x^3+1=2t \\ x^2+xt+t^2+2=0 \end{cases}$$

Hệ (III) cho ta : $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \; x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Hệ (IV) vô nghiệm vì $x^2 + xt + t^2 + 2 = \left(x+\dfrac{t}{2}\right)^2 + \dfrac{3t^2}{4} + 2 > 2$.

Kết luận :

Phương trình đã cho có 3 nghiệm : $x_1 = 1, x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \; x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

BÀI TẬP

Giải các hệ phương trình từ bài 36 đến bài 39 :

36. $\begin{cases} x^3+y^3=2 \\ xy(y+x)=1 \end{cases}$; **37.** $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^7+y^7=x^4+y^4 \end{cases}$

38. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$; **39.** $\begin{cases} (x-1)(y-1)(x+y-2) = 6 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3 \end{cases}$

40. Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = x - y \\ x + y = m \end{cases}$$

41. Tìm giá trị của m sao cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} y^2 - 2x + 1 = -4 \\ (x - y^2)(x - 1) = m \end{cases}$$

có 3 nghiệm.

42. Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau có 8 nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = m + 1 \\ x^4 + y^4 - 2x^3 - 2y^3 + x + y = m^2 - m \end{cases}$$

Hệ này có thể có 6 nghiệm được không ?

Giải các phương trình từ bài 43 đến bài 46 :

43. $\begin{cases} x - |y-3| = 1 \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases}$; **44.** $\begin{cases} 2 + |x-2| = y \\ xy - |y+1| = -5 \end{cases}$

45. $\begin{cases} |y - 2x| = x - 1 \\ x^2 - 2y^2 + 3x - y = -11 \end{cases}$; **46.** $\begin{cases} |xy - 1| + 2x^2 = 13 \\ x + y - |y| = 2 \end{cases}$

47. Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau có đúng hai nghiệm :

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x|x| - xy + y^2 = m \end{cases}$$

48. Giải và biện luận hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ x|y| + y|x| = -m^2 \end{cases}$$

Giải các hệ phương trình từ bài 49 đến bài 53 :

49. $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=9 \end{cases}$;

50. $\begin{cases} \sqrt{x-2y}+\sqrt{x+y-1}=5 \\ 2x-y=14 \end{cases}$

51. a) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y-3}=3 \\ \sqrt{x-3}+\sqrt{y}=3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+\sqrt{y-1}=3 \\ y+\sqrt{x-1}=3 \end{cases}$

52. $\begin{cases} x+y+\sqrt{4x^2-y^2}=3 \\ x^3\sqrt{4x^2-y^2}=0 \end{cases}$;

53. $\begin{cases} \sqrt{x^2-xy}+\sqrt{xy-y^2}=3(x-y) \\ x^2-y^2=369 \end{cases}$

54. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm :

$\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3 \\ x\sqrt{y+1}+y\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=m \end{cases}$. *(Đề thi vào ĐH Thuỷ sản năm 2001).*

55. Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} |x|+3+\sqrt{y^2+1}=m \\ |y|+\sqrt{2x^2+9}=m-1 \end{cases}.$$

Giải các phương trình từ bài 56 đến bài 60 :

56. $\sqrt{\sqrt{48+x}}-\sqrt{\sqrt{49-x}}=1$;

57. $\sqrt[3]{x^2+x+6}-\sqrt[3]{x^2+x-1}=1$;

58. $\sqrt{5x^2-2x-2}-\sqrt{5x^2-2x-6}=2$;

59. $x^2+\sqrt{x+7}=7$;

60. $\sqrt{x+5}=5-x^2$.

§5. HỆ BA PHƯƠNG TRÌNH BA ẨN

5.1. Phương pháp chung

Nguyên tắc chung để giải hệ phương trình nhiều ẩn vẫn là biến đổi hệ phương trình đã cho thành những hệ tương đương hoặc những hệ phương trình hệ quả dễ giải hơn, (trong đó có những phương trình với số ẩn ngày càng ít). Để đạt được điều này ta thường dùng :

– Phương pháp cộng đại số ;

– Phương pháp thế.

Nếu có dùng phép biến đổi không tương đương thì cần phải thử lại các giá trị tìm được của ẩn.

Ví dụ 1. *Giải hệ phương trình :*

$$(I)\ \begin{cases} x+y=3z \\ x^2+y^2=5z. \\ x^3+y^3=9z \end{cases}$$

Giải. (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3z \\ (x+y)^2-2xy=5z \\ (x+y)^3-3xy(x+y)=9z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3z \\ 9z^2-5z=2xy \\ 27z^3-9z.\dfrac{9z^2-5z}{2}=9z \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3z \\ 2xy=9z^2-5z \\ 3z^3-5z^2+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3z \\ 2xy=9z^2-5z \\ \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=1 \\ z=\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \end{cases}.$$

• Với $z=0$, ta có :

$$\begin{cases} x+y=0 \\ xy=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

Hệ này có nghiệm (0 ; 0 ; 0)

• Với z = 1, ta có :

$$\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \\ z=1 \end{cases}.$$

Giải hệ này ta được hai nghiệm : (1 ; 2 ; 1), (2 ; 1 ; 1).

• Với $z = \frac{2}{3}$, ta có : $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = \frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$.

Giải hệ này ta được hai nghiệm : $\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}; \frac{3+\sqrt{6}}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{6}}{3}; \frac{3-\sqrt{6}}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Kết luận :

Hệ (I) có 5 nghiệm :

(0 ; 0 ; 0), (1 ; 2 ; 1), (2 ; 1 ; 1) , $\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}; \frac{3+\sqrt{6}}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{3+\sqrt{6}}{3}; \frac{3-\sqrt{6}}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Ví dụ 2. *Giải hệ phương trình*

$$(III) \begin{cases} xy = 12 \\ yz = 20 \\ zx = 15 \end{cases}.$$

Nghiên cứu cách giải. Hãy thử giải hệ này bằng phương pháp thế.

Tuy nhiên có thể nhận xét về dấu của x, y, z để đề ra một cách giải khác. Rõ ràng x, y, z khác 0 và cùng dấu.

Nhân vế với vế của ba phương trình ta được một phương trình ; kết hợp với hai trong ba phương trình đã cho ta được hệ :

$$(IV) \begin{cases} xy = 12 \\ yz = 20 \\ (xyz)^2 = 3600 \end{cases}.$$

Bạn đọc hãy tự kiểm tra rằng (III) ⇔ (IV).

Vì $(xyz)^2 = 3600 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xyz = 60 \\ xyz = -60 \end{array}\right.$

nên hệ (IV) tương đương với hai hệ :

$$(V)\begin{cases} xy = 12 \\ yz = 20 \\ xyz = 60 \end{cases} \quad \text{và} \quad (VI)\ \begin{cases} xy = 12 \\ yz = 20 \\ xyz = -60 \end{cases}.$$

Giải (V) : thay xy = 12 vào phương trình thứ ba ta được z = 5 ; thay yz = 20 vào phương trình thứ ba ta được x = 3. Thay x = 3, z = 5 vào phương trình thứ ba được y = 4. Hệ (V) có nghiệm : (3 ; 4 ; 5).

Giải (VI) : Tương tự, hệ (VI) có nghiệm : (–3 ; –4 ; –5).

Kết luận :

Hệ (III) có hai nghiệm : (3 ; 4 ; 5), (–3 : –4 ; –5).

5.2. Áp dụng hệ thức Viét đối với phương trình bậc ba

Hệ thức Viét đối phương trình bậc ba được phát biểu như sau :

ĐỊNH LÍ. *Nếu phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thì :*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}.$$

Ngược lại, nếu ba số x_1, x_2, x_3 thoả mãn các đẳng thức :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = S_1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = S_2 \\ x_1x_2x_3 = P \end{cases}$$

thì chúng là ba nghiệm của phương trình :

$$x^3 - S_1x^2 + S_2x - P = 0.$$

Theo định lí trên đây *có thể giải hệ phương trình ba ẩn*

$$\begin{cases} x + y + z = S_1 \\ xy + yz + zx = S_2 \\ xyz = P \end{cases}$$

bằng cách giải một phương trình bậc ba $x^3 - S_1x^2 + S_2x - P = 0$.

Ví dụ 1. *Giải hệ phương trình :*

$$(I)\ \begin{cases} x+y+z=-1 \\ xy+yz+zx=-10 \\ xyz=-8 \end{cases}.$$

Giải. Theo định lí Viét x, y, z là ba nghiệm của phương trình

$$x^3+x^2-10x+8=0.$$

Bằng tính nhẩm ta thấy $x = 1$ là một nghiệm. Do đó phương trình trên viết thành :

$$(x-1)(x^2+2x-8)=0.$$

Giải phương trình này ta được : $x_1 = 1, x_2 = -4, x_3 = 2$.

Vì hệ phương trình này đối xứng đối với x, y, z nên hệ có 3! = 6 nghiệm sau :

(1 ; –4 ; 2), (1 ; 2 ; –4), (2 ; –4 ; 1), (–4 ; 1 ; 2), (2 ; 1 ; –4), (–4 ; 2 ; 1).

Ví dụ 2. *Giải hệ phương trình :*

$$(II)\ \begin{cases} x+y+z=-4 \\ x^2+y^2+z^2=22 \\ xyz=18 \end{cases}.$$

Giải. Biến đổi hệ này thành hệ có dạng (I). Bình phương hai vế phương trình thứ nhất rồi trừ từng vế với phương trình thứ hai ta được :

$$\begin{cases} x+y+z=-4 \\ 2(xy+yz+zx)=-6 \\ xyz=18 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x+y+z=-4 \\ xy+yz+zx=-3 \\ xyz=18 \end{cases}.$$

Theo định lí Viét, x y, z là ba nghiệm của phương trình :

$$x^3+4x^2-3x-18=0.$$

Bằng tính nhẩm ta thấy $x = 2$ là một nghiệm. Do đó :

$$(x-2)(x^2+6x+9)=0.$$

Giải phương trình này ta được : $x_1 = 2, x_2 = x_3 = -3$.

Kết luận :

Hệ có ba nghiệm : (2 ; –3 ; –3) , (–3 ; 2 ; –3) , (–3 ; –3 ; 2).

Ví dụ 3. *Giải hệ phương trình :*

$$(III)\ \begin{cases} x+y+z=-2 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ x^3+y^3+z^3=-8 \end{cases}.$$

Giải. Hệ

$$(III) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=-2 \\ (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=6 \\ (x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-(xy^2+x^2y+yz^2+y^2z+zx^2+z^2x)=-8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=-2 \\ (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=6 \\ (x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+zx)(x+y+z)+3xyz=-8 \end{cases}$$

$$\text{hay} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=-2 \\ xy+yz+zx=-1 \\ xyz=2 \end{cases}.$$

Vậy x, y, z là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$t^2+2t-t-2=0 \quad \text{hay} \quad (t+2)(t^2-1)=0.$$

Phương trình này có nghiệm là : $t_1=-1, t_2=1, t_3=-2$.

Do đó hệ phương trình có 6 nghiệm là 6 hoán vị của ba số $-1, 1, -2$:

$(-1, 1, -2)$, $(-1, 1, -2)$, $(-2, 1, -1)$, $(-1, -2, 1)$, $(1, -1, -2)$, $(-2, -1, 1)$.

BÀI TẬP

Giải các hệ phương trình :

61. $\begin{cases} x+y+xy+1=4 \\ y+z+yz+1=10 \\ z+x+zx+1=6 \end{cases}$;

62. $\begin{cases} (y+z)^2-x^2=2 \\ (z+x)^2-y^2=3 \\ (x+y)^2-z^2=4 \end{cases}$

63. $\begin{cases} x+yz=2 \\ y+zx=2 \\ z+xy=2 \end{cases}$;

64. $\begin{cases} zx+xy=x^2+2 \\ xy+yz=y^2+3 \\ yz+zx=z^2+4 \end{cases}$

65. $\begin{cases} (x+y)(z+x)=x \\ (y+z)(x+y)=2y \\ (z+x)(y+z)=3z \end{cases}$

66. $\begin{cases} x+y^2+z^2=1 \\ x^2+y+z^2=1 \\ x^2+y^2+z=1 \end{cases}$

67. $\begin{cases} 6x(y^2+z^2)=13yz \\ 3y(z^2+x^2)=5zx \\ 6z(x^2+y^2)=5xy \end{cases}$;

68. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3 \\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=3 \\ \dfrac{1}{xyz}=1 \end{cases}$

69. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=9 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$;

70. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=5 \\ x^4+y^4+z^4=17 \end{cases}$

§6. VÀI HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỢC GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶC BIỆT (KHÔNG MẪU MỰC)

Có những phương trình rất khó giải được bằng cách vận dụng trực tiếp các kiến thức thuộc chương trình. Song bằng những nhận xét về đặc điểm của phương trình mà có thể đưa ra những cách giải đặc biệt. Những đặc điểm này thường lẩn khuất ở cách viết các vế của phương trình hoặc ở những điều kiện mà các ẩn phải thoả mãn, nhưng những điều kiện ấy lại không thể hiện rõ ràng mà đòi hỏi phải suy nghĩ, phải biến đổi phương trình mới làm cho chúng xuất hiện. Vì đó là những hệ phương trình đặc biệt nên không có một phương pháp chung.

Hãy xem vài ví dụ sau :

Ví dụ 1. *Giải hệ phương trình :*

$$\begin{cases} y+xy^2=6x^2 \\ 1+x^2y^2=5x^2 \end{cases}$$

Nghiên cứu cách giải.

Hệ phương trình này không thuộc một dạng nào trong các dạng ta đã học. Hãy tìm cách viết hệ phương trình dưới dạng khác. Rõ ràng nghiệm của hệ phương trình không có dạng (0 ; y). Do đó có thể chia hai vế của mỗi phương trình cho x^2. Thử quan sát cách viết mới.

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x^2}+\dfrac{y^2}{x}=6 \\ \dfrac{1}{x^2}+y^2=5 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \dfrac{y}{x}(\dfrac{1}{x}+y)=6 \\ \dfrac{1}{x^2}+y^2=5 \end{cases}$$

Bây giờ, hệ này thuộc dạng quen thuộc nào?

Đặt $u = \dfrac{1}{x}$, hệ trở thành :

$$\begin{cases} uy(u+y)=6 \\ u^2+y^2=5 \end{cases}$$

Đó là hệ đối xứng loại I. Giải hệ này ta được $u = 1, y = 2$, hoặc $u = 2, y = 1$.

Kết luận :

Hệ đã cho có hai nghiệm : $(1 ; 2), (\dfrac{1}{2} ; 1)$.

Ví dụ 2. *Giải hệ phương trình :*

$$\begin{cases} \dfrac{4z^2}{1+4z^2}=x \\ \dfrac{4x^2}{1+4x^2}=y \\ \dfrac{4y^2}{1+4y^2}=z \end{cases}$$

Nghiên cứu cách giải.

Đây cũng là một hệ lạ. Hãy nhận xét một cách thô sơ về đặc điểm của nghiệm. Rõ ràng $(0 ; 0 ; 0)$ là một nghiệm.

Tiếp tục tìm nghiệm khác (0 ; 0 ; 0). Hãy thử viết hệ dưới một dạng khác. Nếu $x > 0$ thì từ phương trình thứ hai suy ra $y > 0$; từ phương trình thứ ba tiếp tục suy ra $z > 0$. Do đó có thể viết hệ đã cho dưới dạng :

$$\begin{cases} \dfrac{4z}{1+4z^2} = \dfrac{x}{z} \\ \dfrac{4x}{1+4x^2} = \dfrac{y}{x} \\ \dfrac{4y}{1+4y^2} = \dfrac{z}{y} \end{cases}$$

Hãy đánh giá vế trái của mỗi phương trình.

Vì $1 - 4x + 4x^2 = (1 - 2x)^2 \geq 0$ nên $1 + 4x^2 \geq 4x$. Do đó

$$\frac{4x}{1+4x^2} \leq 1.$$

Vì thế $\dfrac{y}{x} \leq 1$ hay $y \leq x$ (vì $x > 0$).

Tương tự, $x \leq z \leq y$. Vậy nếu (x, y, z) là một nghiệm của hệ phương trình thì $x = y = z$. Từ đó suy ra $\dfrac{4x}{1+4x^2} = \dfrac{y}{x} = 1$. Do đó $4x = 1 + 4x^2$ hay $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

Phương trình này có nghiệm kép : $x = \dfrac{1}{2}$. Tương tự $y = z = \dfrac{1}{2}$.

Kết luận :

Hệ có hai nghiệm : $(0 ; 0 ; 0)$, $\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$.

?1 Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 1 + x^3y^3 = 19x^3 \\ y + xy^2 = 6x^2 \end{cases}.$$

?2 Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 1 \\ x^9 + y^9 = 1 \end{cases}$$

BÀI TẬP

Giải các hệ phương trình :

71. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y+1}=1\\ \sqrt{x-1}+\sqrt{y}=1\end{cases}$;

72. $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x^9+y^9=1\end{cases}$

73. $\begin{cases}x(x^2+y^2)=10y\\ 2y(x^2-y^2)=3x\end{cases}$;

74. $\begin{cases}x^3-3x=y^3-3y\\ x^6+y^6=1\end{cases}$

75. $\begin{cases}x^2y^2+2x+y^2=0\\ x^2-2x+2-y=0\end{cases}$;

76. $\begin{cases}y+2=(3-x)^3\\ (y+2)(2z-y)=9+4y\\ x^2+z^2=4x\\ z\geq 0\end{cases}$

77. Xã Quang Vinh có hai cánh đồng cấy thí điểm hai giống lúa mới. Cánh đồng A rộng hơn cánh đồng B 10ha. Khi thu hoạch, năng suất trên cánh đồng B cao hơn trên cánh đồng A là 5 tạ trên 1ha. Trên cánh đồng A thu được 150 tấn, trên cánh đồng B thu được 110 tấn. Tính năng suất lúa trên 1ha ở mỗi cánh đồng.

78. Trong cuộc đua xe đạp vòng quanh bờ hồ, ở vòng đua thứ nhất anh Long về đích trước anh Phương $\frac{5}{24}$ phút. Ở vòng thứ hai vận tốc của anh Long giảm đi 40m/phút, nhưng vận tốc của anh Phương lại tăng 40m/phút. Vì thế hết vòng đua thứ hai, hai anh về đích cùng một lúc. Tính vận tốc của mỗi anh ở vòng đua thứ nhất, biết rằng độ dài quãng đường quanh Bờ Hồ là 2km.

BÀI TẬP TỰ KIỂM TRA

Giải các phương trình

79. $\begin{cases}x+y=5\\ x^4+y^4=97\end{cases}$;

80. $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3\\ \sqrt{x+5}+\sqrt{y+3}=5\end{cases}$

81. $\begin{cases}xy+yz=-9\\ yz+zx=-4\\ zx+xy=-1\end{cases}$;

82. $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$

ĐÁP SỐ – HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI

1. a) *HD*. Nhân phương trình thứ hai với -2 rồi cộng vào phương trình thứ nhất.

ĐS : $(1\,;\,1)$, $\left(\dfrac{9}{17}\,;\,\dfrac{20}{17}\right)$.

b) *HD*. Cộng vế với vế của hai phương trình.

ĐS : $(3\,;\,2)$, $(3\,;\,10)$.

c) *ĐS* : $(2\,;\,-3)$, $(-2\,;\,3)$, $\left(\dfrac{2}{\sqrt{15}}\,\dfrac{11}{\sqrt{15}}\right)$; $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{15}}\,;\,-\dfrac{11}{\sqrt{15}}\right)$.

d) *HD*. Nhân phương trình thứ hai với 2 rồi cộng vào phương trình thứ nhất ; sau đó dùng phương pháp thế.

ĐS : $(4\,;\,-1)$, $(-4\,;\,1)$.

2. Có.

4. *HD*. Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với 2 rồi cộng vào phương trình thứ hai.

ĐS : $(-1\,;\,1)$.

5. *ĐS* : $(-1\,;\,1)$, $\left(6\,;\,-\dfrac{5}{2}\right)$.

6. *ĐS* : $(-5\,;\,2)$, $(2\,;\,-5)$, $(-3\,;\,5)$, $(5\,;\,-3)$.

7. *HD*. Đặt $u = x^2 + y^2$, $v = x + y$.

ĐS : $(-1\,;\,2)$, $(2\,;\,-1)$.

8. *HD*. Đặt $u = x + \dfrac{1}{x}$, $v = y + \dfrac{1}{y}$.

ĐS : $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$; $(2\,;\,1)$; $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$; $(-1\,;\,-2)$.

9. *ĐS* : $\left(\sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}\,;\,\sqrt[3]{\dfrac{4}{5}}\right)$.

10. *ĐS* : $(-1\,;\,-1)$, $(1\,;\,-1)$, $(-1\,;\,1)$.

11. *ĐS :* (3 ; –5) , (–3 ; 5).

12. *ĐS :* $\left(\frac{3}{\sqrt{17}};-\frac{8}{\sqrt{17}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{17}};\frac{8}{\sqrt{17}}\right)$.

13. *HD*. Biến phương trình thứ nhất thành phương trình tích.

ĐS : $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{6}\right)$.

14. *HD*. Biến phương trình thứ nhất thành phương trình tích : $(x + 3y - 3)(2x + y - 5) = 0$.

ĐS : (0 ; 1) . $\left(-5 ; \frac{8}{3}\right)$.

15. *HD*. Đặt $u = x + y$, $v = x - y$.

ĐS : (4 ; –1) , (1 ; –4), $\left(\frac{-21-\sqrt{62}}{8};\frac{21-\sqrt{62}}{8}\right)$, $\left(\frac{-21+\sqrt{62}}{8};\frac{21+\sqrt{62}}{8}\right)$.

16. *HD*. Đặt $u = \frac{x^2}{x+y}$, $v = 2x - y$.

ĐS : (2 ; –1) , (10 ; 15), $\left(\frac{15-\sqrt{145}}{2};11-\sqrt{145}\right)$, $\left(\frac{15+\sqrt{145}}{2};11+\sqrt{145}\right)$.

17. *HD*. Đặt $u = x - 1$, $v = \frac{1}{y}$.

ĐS : $\left(-4;\frac{1}{2}\right)$, $\left(3;-\frac{1}{5}\right)$, $\left(-4+2\sqrt{7};\frac{5-2\sqrt{7}}{3}\right)$, $\left(-4-2\sqrt{7};\frac{5+2\sqrt{7}}{3}\right)$.

18. ĐS : (1 ; 1).

19. *ĐS :* $m \neq 1$, vô nghiệm ; $m = 1$, hệ có nghiệm kép (1 ; 0).

20. *ĐS :*
- $m = 1$, hệ có nghiệm (–3 ; –4)
- $m < \frac{11}{12}$, hệ vô nghiệm ;

• $m = \frac{11}{12}$, hệ có nghiệm kép $(-6\ ;\ -\frac{13}{2})$;

• $m > \frac{11}{12}$ và $m \neq 1$, hệ có hai nghiệm :

$$\left(\frac{1-\sqrt{12m-11}}{2(m-1)}\ ;\ \frac{2-m-m\sqrt{12m-11}}{2(m-1)}\right),$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{12m-11}}{2(m-1)}\ ;\ \frac{2-m+m\sqrt{12m-11}}{2(m-1)}\right).$$

21. *HD*. Lấy phương trình thứ hai trừ đi phương trình thứ nhất ta được phương trình tích : $(x+y)(x-y+m) = 0$.

ĐS : • $m < -7$ hoặc $m > 1$, hệ có hai nghiệm : $\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\ ;\ \frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)$, $\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\ ;\ \frac{-3-\sqrt{13}}{2}\right)$;

• $m = -7$, hệ có nghiệm kép $(4\ ;\ -3)$;

• $-7 < m < 1$, hệ có hai nghiệm :

$$\left(\frac{3(1-m)-\sqrt{-3m^2-18m+21}}{6}\ ;\ \frac{3(1+m)-\sqrt{-3m^2-18m+21}}{6}\right),$$

$$\left(\frac{3(1-m)+\sqrt{-3m^2-18m+21}}{6}\ ;\ \frac{3(1+m)+\sqrt{-3m^2-18m+21}}{6}\right);$$

• $m = 1$, hệ có nghiệm kép $(0\ ;\ 1)$.

22. *HD*. Đặt $u = \frac{1}{2x+y}$, $v = 2y - y$.

ĐS : • $m > \frac{25}{4}$, hệ vô nghiệm,

• $m = \frac{25}{4}$, hệ có một nghiệm $\left(\frac{29}{40}\ ;\ -\frac{11}{20}\right)$;

• $m < \dfrac{25}{4}$, hệ có hai nghiệm :

$$\left(\frac{(1+m)(5-\sqrt{25-4m})}{8m};\frac{(1-m)(5-\sqrt{25-4m})}{4m}\right),$$

$$\left(\frac{(1+m)(5+\sqrt{25-4m})}{8m};\frac{(1-m)(5+\sqrt{25-4m})}{4m}\right).$$

23. *ĐS* : • $m < -6$ hoặc $m > 2$, hệ có 4 nghiệm :

$$(0 ; 0), (m+2 ; m+2), \left(\frac{m-2-\sqrt{m^2+4m-12}}{2};\frac{m-2+\sqrt{m^2+4m-12}}{2}\right),$$

$$\left(\frac{m-2+\sqrt{m^2+4m-12}}{2};\frac{m-2-\sqrt{m^2+4m-12}}{2}\right);$$

• $m = -6$, hệ có hai nghiệm : $(0 ; 0)$, $(-4 ; -4)$;

• $m = 2$, hệ có hai nghiệm $(0 ; 0)$, $(4 ; 4)$;

• $-6 < m < 2$, hệ có hai nghiệm : $(0 ; 0)$, $(m + 2 ; m + 2)$.

24. ĐS : • $m = 0$, hệ có hai nghiệm : $(1 ; 1)$, $(-1 ; -1)$;

• $0 \neq m \leq 1$, hệ vô nghiệm ;

• $m > 1$, hệ có hai nghiệm :

$$\left(\frac{m}{\sqrt{2m-2}};\frac{2-m}{\sqrt{2m-2}}\right),\left(-\frac{m}{\sqrt{2m-2}};-\frac{2-m}{\sqrt{2m-2}}\right).$$

25. *ĐS* : $m \geq -\dfrac{73}{92}$.

26. *ĐS* : Hệ có nghiệm với mọi giá trị của m.

27. *HD*. Đặt $u = x(x + 1)$, $v = y(y + 1)$.

ĐS : $-\dfrac{33}{16} \leq m \leq 16$.

28. *HD*. Nhận thấy $x^2 + x - m = (x^2 + y - m)+(x - y)$. Do đó có thể đặt $u = x^2 + y - m$, $v = x - y$. Hệ phương trình đã cho tương đương với hai hệ

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ x^2 + x - 5 - m = 0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 + x - 5 - m = 0 \end{cases}.$$

ĐS : Không có giá trị nào của m.

29. *HD.* Vì hệ phương trình đối xứng loại I nên nếu $(\alpha ; \beta)$ là nghiệm duy nhất thì

$\alpha = \beta$ và $\begin{cases} 2m\alpha - 2\alpha^2 = -2 \\ 2\alpha^2 - \alpha = m \end{cases}$. Từ đó suy ra $m = 0, m = \dfrac{3}{2}$.

Kiểm tra lại các giá trị này của m ta thấy chỉ có m = 0 thoả mãn yêu cầu của bài toán.

ĐS : m = 0.

30. *ĐS : $m < 0$.*

31. *Trả lời* : Không có giá trị nào của m.

32. *ĐS : $m = -\dfrac{1}{10}$.*

33. a) *ĐS* : (1 ; 1) ; b) HD. Viết phương trình thứ nhất dưới dạng

$2(x - y)^2 - 3(x - y) + 1 = 0$. Tính $x - y$.

ĐS : $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}; \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\left(\dfrac{3-\sqrt{201}}{16}; \dfrac{-5-\sqrt{201}}{16}\right)$, $\left(\dfrac{3+\sqrt{201}}{16}; \dfrac{-5+\sqrt{201}}{16}\right)$

34. *ĐS* : m = 1.

35. *HD.* Với mỗi giá trị $m \neq 0$, hệ đều có nghiệm $\left(\dfrac{1}{2m}; \dfrac{1}{2m}\right)$. Vì thế muốn cho hệ có nghiệm duy nhất thì hệ $\begin{cases} x + y - m = 0 \\ x^2 - y^2 = 1 - 2my \end{cases}$ phải vô nghiệm hoặc có nghiệm trên. Nhưng từ hệ này suy ra phương trình $0x = m^2 - 1$. Từ đó suy ra hệ này phải vô nghiệm.

Vậy $m \neq \pm 1$.

ĐS : $m \neq 0, m \neq \pm 1$.

36. *ĐS* : (1 ; 1).

37. *HD*. Viết phương trình thứ hai dưới dạng : $(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^4-x^4y^3=x^4+y^4$.

ĐS : (0 ; 1), (1 ; 0).

38. *HD*. Đặt $u=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$ ta sẽ tính được u.

ĐS : $(\sqrt{2};\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{3}};\dfrac{1-\sqrt{5}}{3}\right)$, $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{3}};\dfrac{1+\sqrt{5}}{3}\right)$,

$\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{3}};\dfrac{-1-\sqrt{5}}{3}\right)$, $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{\sqrt{3}};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{3}\right)$.

39. *HD*. Viết hệ dưới dạng

$$\begin{cases}(x-1)(y-1)(x-1+y-1)=6\\(x-1)^2+(y-1)^2=5\end{cases}$$

rồi đặt $u=x-1$, $v=y-1$.

ĐS : (3 ; 2), (2 ; 3).

40. *HD*. Hệ phương trình tương đương với hai hệ :

$$\text{(I)}\ \begin{cases}x=y\\x+y=m\end{cases}\quad \text{và}\quad \text{(II)}\ \begin{cases}x^2+xy+y^2-1=0\\x+y=m\end{cases}.$$

Hệ (I) luôn có nghiệm $\left(\dfrac{m}{2};\dfrac{m}{2}\right)$. Do đó muốn cho hệ đã cho có nghiệm duy nhất thì hệ (II) phải vô nghiệm hoặc chỉ có một nghiệm $\left(\dfrac{m}{2};\dfrac{m}{2}\right)$.

ĐS : $m\le-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $m\ge\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

41. *HD*. Hệ phương trình có thể viết thành $\begin{cases}(y^2-x)+(1-x)=-4\\(y^2-x)(1-x)=m\end{cases}$.

Đặt $u = y^2 - x$, $v = 1 - x$, ta có hệ $\begin{cases} u + v = -4 \\ uv = m \end{cases}$.

Khi $m \le 4$ từ hệ này suy ra (I) $\begin{cases} x = 3 - \sqrt{4-m} \\ y^2 = 1 - 2\sqrt{4-m} \end{cases}$ và

(II) $\begin{cases} x = 3 + \sqrt{4-m} \\ y^2 = 1 + 2\sqrt{4-m} \end{cases}$

Khi m = 4 hệ có hai nghiệm (3 ;–1), (3 ; 1).

Khi m < 4, hệ (II) có hai nghiệm phân biệt. Muốn cho hệ đã cho có đúng ba nghiệm thì hệ (I) chỉ có một nghiệm. Do đó y = 0. Suy ra $m = \dfrac{15}{4}$.

Ngược lại, khi $m = \dfrac{15}{4}$ hệ đã cho có đúng ba nghiệm : $\left(\dfrac{5}{2};0\right)$, $\left(\dfrac{7}{2};-\sqrt{2}\right)$, $\left(\dfrac{7}{2};\sqrt{2}\right)$.

ĐS : $m = \dfrac{15}{4}$.

42. *HD*. Cộng hai phương trình, vế với vế được :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = m + 1 \\ x^4 + y^4 - 2x^3 - 2y^3 + x^2 + y^2 = m^2 + 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} (x^2 - x) + (y^2 - y) = m + 1 \\ (x^2 - x)^2 + (y^2 - y)^2 = m^2 + 1 \end{cases}.$$

Hệ này tương đương với hai hệ :

(I) $\begin{cases} x^2 - x = m \\ y^2 - y = 1 \end{cases}$ và (II) $\begin{cases} x^2 - x = 1 \\ y^2 - y = m \end{cases}$.

ĐS : $m \in \left(-\dfrac{1}{4} ; 1\right) \cup (1 ; +\infty)$. Hệ không thể có 6 nghiệm.

43. *ĐS* : (2 ; 2).

44. *ĐS* : (0 ; 4).

45. *ĐS* : (2 ; 3), $\left(\dfrac{6+\sqrt{206}}{17};\dfrac{1+3\sqrt{206}}{17}\right)$.

46. *ĐS* : (2 ; 3), $\left(\dfrac{12}{5};-\dfrac{1}{5}\right)$.

47. *HD*. Hệ phương trình tương đương với hai hệ phương trình :

$$\text{(I)}\begin{cases} y = 2x - 4 \\ 3x^2 - 12x + 16 - m = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(II)}\begin{cases} y = 2x - 4 \\ x^2 - 12x + 16 - m = 0. \\ x < 0 \end{cases}$$

Nhận thấy số nghiệm của hai hệ này chỉ phụ thuộc vào số nghiệm của phương trình bậc hai trong hệ.

Hệ đã cho có đúng hai nghiệm đúng hai nghiệm chỉ có thể xẩy ra trong các trường hợp sau :

(I) có hai nghiệm thoả mãn điều kiện $x \geq 0$, (II) vô nghiệm ;

(II) có hai nghiệm thoả mãn điều kiện $x < 0$, (I) vô nghiệm ;

(I) có nghiệm kép thoả mãn điều kiện $x \geq 0$, (II) có nghiệm kép thoả mãn điều kiện $x < 0$.

(I) có một nghiệm, (II) có một nghiệm.

• Khi (I) có hai nghiệm thoả mãn điều kiện $x \geq 0$ thì $4 < m \leq 16$ và (II) vô nghiệm (vì phương trình $x^2 - 12x + 16 - m = 0$ có hai nghiệm không âm).

Vậy các giá trị của m sao cho $4 < m \leq 16$ thoả mãn yêu cầu của bài toán.

• Khi $m \leq 4$ thì (I) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép, còn (II) vô nghiệm. Hệ có nhiều nhất một nghiệm. Các giá trị $m \leq 4$ không thoả mãn yêu cầu của bài toán.

• Khi $m > 16$ thì $16 - m < 0$, hai phương trình $3x^2 - 12x + 16 - m = 0$ và $x^2 - 12x + 16 - m = 0$ đều có hai nghiệm trái dấu. Vậy các giá trị $m > 16$ thoả mãn yêu cầu của bài toán.

ĐS : $m > 4$.

48. *ĐS* : • $m = 0$, hệ có một nghiệm : $(0 ; 0)$;

• $m < 0$, hệ có một nghiệm $\left(\frac{m}{2} ; \frac{m}{4}\right)$;

• $m > 0$, hệ có một nghiệm : $\left(-\frac{m}{2} ; -\frac{m}{4}\right)$.

49. *ĐS* : $(1 ; 4), (4 ; 1)$.

50. *ĐS* : $(8 ; 2)$, $\left(\frac{19}{3} ; -\frac{4}{3}\right)$.

51. *ĐS* : a) $(4 ; 4)$; b) $(2 ; 2)$.

52. *ĐS* : $(1 ; 2), (-3 ; 6)$.

53. *ĐS* : $(25 ; 16)$.

54. *HD*. Đặt $u = \sqrt{x+1}$, $v = \sqrt{y+1}$, ta có hệ :

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ uv(u+v) = m \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} u + v = 3 \\ 3uv = m \end{cases} \quad (*)$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm khi hệ (*) có nghiệm $(u ; v)$ thoả mãn điều kiện u, v không âm.

ĐS : $0 \leq m \leq \frac{27}{4}$.

55. *HD*. Nếu $(\alpha ; \beta)$ là một nghiệm của hệ thì $(-\alpha ; -\beta)$ cũng là nghiệm. Vì thế muốn cho hệ có nghiệm duy nhất thì $\alpha = -\alpha$, $\beta = -\beta$; do đó nghiệm duy nhất phải là $(0 ; 0)$. Từ đó suy ra $m = 4$.

Ngược lại, khi $m = 4$, hệ đã cho trở thành :

$$\begin{cases} |x| + \sqrt{|y|^2 + 1} = 1 \\ |y| + \sqrt{2|x|^2 + 9} = 3 \end{cases}.$$

Hệ này tương đương với hệ

$$\begin{cases} x^2 - 2|x| - y^2 = 0 \\ x^2 + 2|x| + 6|y| = 0 \end{cases}.$$

Từ phương trình thứ hai của hệ cuối cùng suy ra (0 ; 0) là nghiệm duy nhất.

56. *HD*. Đặt $u = \sqrt{\sqrt{48 + x}}$, $v = \sqrt{\sqrt{49 - x}}$, ta có hệ :

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ u^4 + v^4 = 97 \end{cases}$$

hay $\begin{cases} u - v = 1 \\ [(u - v)^2 + 2uv]^2 - 2u^2v^2 = 97 \end{cases}$ hay $\begin{cases} u - v = 1 \\ [1 + 2uv]^2 - 2u^2v^2 = 97 \end{cases}$.

ĐS : $x = 33$.

57. *HD*. Đặt $u = \sqrt[3]{x^2 + x + 6}$, $v = \sqrt[3]{x^2 + x - 1}$.

ĐS : $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

58. *ĐS :* $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{7}{5}$.

59. *HD*. Đặt $t = \sqrt{x + 7}$, $t \geq 0$, ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + t = 7 \\ t^2 - x = 7 \end{cases}.$$

ĐS : $x_1 = \frac{1 - \sqrt{29}}{2}$, $x_2 = 2$.

60. *ĐS :* $x_1 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$.

61. *HD*. Biến đổi hệ phương trình thành :

$$\begin{cases} (x + 1)(y + 1) = 4 \\ (y + 1)(z + 1) = 10 \\ (z + 1)(x + 1) = 6 \end{cases}.$$

Nhân vế với vế của ba phương trình.

ĐS : $\left(\frac{2\sqrt{15}-5}{5};\frac{2\sqrt{15}-3}{3};\sqrt{15}-1\right)$.

62. *HD*. Phân tích vế trái của mỗi phương trình thành tích, rồi áp dụng phương pháp giải bài **61.**

ĐS : $\left(\frac{7}{6};1;\frac{5}{6}\right)$, $\left(-\frac{7}{6};-1;-\frac{5}{6}\right)$.

63. *HD*. Giữ nguyên phương trình đầu, lấy phương trình thứ nhất lần lượt trừ phương trình thứ hai và thứ ba, vế với vế, được hai phương trình tích.

ĐS : (1 ; 1 ; 1) , (–2 ; –2 ; –2).

64. *HD*. Cộng vế với vế của ba phương trình ta được $2(xy + yz + zx) = x^2 + y^2 + z^2 + 9$.

Mặt khác, từ phương trình thứ nhất suy ra : $2(xy+yz+zx) = 2x^2 + 2yz + 4$. Do đó :

$x^2 - y^2 + 2yz - z^2 = 5$ hay $(x + y - z)(x - y + z) = 5$. Tương tự, áp dụng những điều vừa làm đối với phương trình thứ hai và thứ ba ta có hệ :

$$\begin{cases}(x+y-z)(z+x-y)=5\\(z+x-y)(y+x-z)=1\\(y+z-x)(x+y-z)=3\end{cases}.$$

ĐS : $\left(\frac{10}{\sqrt{15}};\frac{9}{\sqrt{15}};\frac{4}{\sqrt{15}}\right)$, $\left(-\frac{10}{\sqrt{15}};-\frac{9}{\sqrt{15}};-\frac{4}{\sqrt{15}}\right)$.

65. *HD*. Hệ có các nghiệm (0 ; 0 ; 0).

Nếu $y = 0$ thì từ phương trình thứ hai suy ra $x = 0$ hoặc $z = 0$. Nếu $z = 0$ thì từ phương trình thứ nhất suy ra $x = 0$ hoặc $x = 1$. Ngược lại, rõ ràng (1 ; 0 ; 0) là một nghiệm. Nếu $x = 0 = y$ thì từ phương trình thứ ba suy ra $z = 0$ hoặc $z = 3$; ngược lại, (0 ; 0 ; 3) là một nghiệm . Tương tự, hệ có nghiệm (0 ; 2 ; 0). Với lập luận trên nếu còn các nghiệm khác thì chúng phải có dạng $(\alpha ; \beta ; \gamma)$ với α, β, γ khác 0. Vì vậy có thể chia phương trình thứ nhất lần lượt cho phương trình thứ hai và thứ ba, vế với vế, được hệ :

$$(I)\ \begin{cases}(x+y)(x+z)=x\\ xy+2yz-zx=0\\ -xy+3yz+2zx=0\end{cases}.$$

Từ hai phương trình cuối của hệ này suy ra :

$$\begin{cases}5yz+zx=0\\ xy+7yz=0\end{cases}.$$

Vì z và y khác 0 nên ta lại suy ra :

$$\begin{cases}y=-\dfrac{x}{5}\\ z=-\dfrac{x}{7}\end{cases}.$$

Hệ (I) tương đương với hệ :

$$\begin{cases}(x+y)(x+z)=x\\ y=-\dfrac{x}{5}\\ z=-\dfrac{x}{7}\end{cases}.$$

Giải hệ này ta được nghiệm : $\left(\dfrac{35}{24};-\dfrac{7}{24};-\dfrac{5}{24}\right)$.

ĐS : (0 ; 0 ; 0) , (1 ; 0 ; 0) , (0 ; 2 ; 0) , (0 ; 0 ; 3) , $\left(\dfrac{35}{24};-\dfrac{7}{24};-\dfrac{5}{24}\right)$.

66. *HD*. Giữ nguyên phương trình đầu, lấy phương trình đầu trừ lần lượt phương trình thứ hai và thứ ba, vế với vế, ta được một hệ có hai phương trình tích.

ĐS : (1 ; 0 ; 0) , (0 ; 1 ; 0), (0 ; 0 ; 1), (–1 ; –1 ; –1), $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

67. *HD*. Nhận thấy hệ có các nghiệm : (0 ; 0 ; z), (0 ; y ; 0), (x ; 0 ; 0), với x, y, z tuỳ ý. Các nghiệm còn lại nếu có thì phải có dạng (α, β, γ), với α, β, γ đều khác 0. Do đó hệ đã cho có thể đổi thành :

$$\begin{cases} x^2y^2 + z^2x^2 = \dfrac{13}{6}xyz \\ y^2z^2 + x^2y^2 = \dfrac{5}{3}xyz. \\ z^2x^2 + y^2z^2 = \dfrac{5}{6}xyz \end{cases}$$

Cộng vế với vế ba phương trình của hệ này và tiếp tục tính toán ta sẽ đi tới hệ :

$$\begin{cases} xy = \dfrac{3}{2}z \\ yz = \dfrac{1}{6}x. \\ zx = \dfrac{2}{3}y \end{cases}$$

ĐS : $\left(1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3}\right)$, $\left(-1 ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{3}\right)$, $\left(1 ; -\frac{1}{2} ; -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-1 ; \frac{1}{2} ; -\frac{1}{3}\right)$.

68. *ĐS* : (1 ; 1 ; 1).

69. *HD*. Bình phương hai vế của phương trình thứ nhất và để ý đến phương trình thứ hai, ta sẽ tính được $xy + yz + zx$. Nhân phương trình thứ nhất với phương trình thứ hai vế với vế và để ý đến phương trình thứ ba ta sẽ tính được xyz.

ĐS : (1 ; –2 ; 2), (1 ; 2 ; –2), (–2 ; 1 ; 2), (2 ; 1 ; –2), (2 ; –2 ; 1), (–2 ; 2 ; 1).

70. *HD*. Bình phương hai vế của phương trình thứ nhất và để ý đến phương trình thứ hai, ta sẽ tính được $xy + yz + zx$. Bình phương hai vế của phương trình thứ hai và để ý đến phương trình thứ ba, ta sẽ tính được $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$. Tiếp tục tính $(xy + yz + zx)^2$ ta sẽ tìm được xyz.

ĐS : (0 ; 1; 2), (0 ; 2 ; 1), (1 ; 0 ; 2), (1 ; 2 ; 0), (2 ; 0 ; 1), (2 ; 1 ; 0).

71. *HD*. So sánh $\sqrt{x}$ và $\sqrt{y+1}$ với 0 và 1.

ĐS : (0 ; 0).

72. *HD*. So sánh x^2, y^2 với 1 và so sánh x^9 với x^2, y^9 với y^2.

73. *HD*. Nhận thấy (0 ; 0) là một nghiệm. Nếu $x \neq 0$ thì y cũng khác 0 và $x \neq \pm y$. Chia phương trình thứ nhất cho phương trình thứ hai, vế với vế ta được hệ :

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2) = 10y \\ \dfrac{x}{2y} \cdot \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y} = \dfrac{10x}{3x} \end{cases}$$

Chia tử và mẫu ở vế trái của phương trình thứ hai cho y^2 rồi đặt $t = \dfrac{x}{y}$ để giải phương trình thứ hai.

ĐS : $(0 ; 0)$, $(2 ; 1)$, $(-2 ; -1)$, $\left(\dfrac{\sqrt{5\sqrt{15}}}{2} ; \dfrac{\sqrt{3\sqrt{15}}}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{5\sqrt{15}}}{2} ; -\dfrac{\sqrt{3\sqrt{15}}}{2}\right)$.

74. *HD*. Hệ phương trình tương đương với hai hệ :

(I) $\begin{cases} x = y \\ x^6 - y^6 = 1 \end{cases}$ và (II) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}$.

Nhận thấy $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ và $(1 ; 0)$, $(0 ; 1)$ không phải là nghiệm của hệ nên nếu $(\alpha : \beta)$ là nghiệm thì $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$. Do đó hệ (II) vô nghiệm.

ĐS : $\left(\sqrt[6]{\dfrac{1}{2}} ; \sqrt[6]{\dfrac{1}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt[6]{\dfrac{1}{2}} ; -\sqrt[6]{\dfrac{1}{2}}\right)$ (số α mà $\alpha^6 = a$ được gọi là một căn bậc 6 của a : nếu $\alpha \ge 0$ thì ta kí hiệu $\alpha = \sqrt[6]{a}$).

75. *HD*. Từ phương trình thứ nhất suy ra : $y^2 = \dfrac{-2x}{x^2 + 1} \le 1$.

Từ phương trình thứ hai suy ra : $y - 1 = (x + 1)^2 \ge 0$. Vậy $y = 1$. Như vậy, $x = -1$. Cần kiểm tra xem $(-1 ; 1)$ có phải là nghiệm của hệ hay không.

ĐS : $(-1 ; 1)$.

76. *HD*. Có thể viết phương trình thứ hai dưới dạng $(y - z + 3)^2 = z^2 - 2z$. Suy ra $z \le 0$ hoặc $z \ge 2$. Từ phương trình thứ ba suy ra $z^2 = 4x - x^2$. Hàm số $f(x) = 4x - x^2$ có giá trị lớn nhất bằng 4 nên $z^2 \le 4$. Vì $z \ge 0$ nên $0 \le z \le 2$.

ĐS : $(0 ; -3 ; 0)$, $(2 ; 2 ; -1)$

77. *ĐS :* 5 tấn/ha và 5,5 tấn/ha.

78. *ĐS :* Ở vòng thứ nhất vận tốc của anh Long là 640m/ph, của anh Phương là 600m/ph.

79. *HD*. Thay phương trình thứ hai bởi $[(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 = 97$.

ĐS : (2 ; 3), (3 ; 2).

80. *ĐS :* (4 ; 1), $\left(\frac{121}{64} ; \frac{169}{64}\right)$

81. *HD :* Cộng ba phương trình vế với vế.

ĐS : (–1 ; 3 ; –2), (1 ; –3 ; 2).

82. *HD*. Đặt $u = \sqrt{2x^2 + 3x + 5}$, $v = \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$, ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} u = \sqrt{2x^2 + 3x + 5} \\ u + v = 3x \\ u^2 - v^2 = 6x \end{cases}$$

ĐS : x = 4.