

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

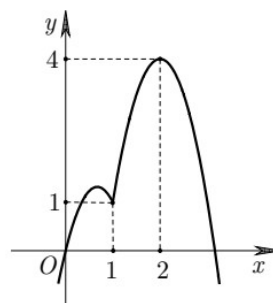
ĐỀ 37

Câu 1 (3,0 điểm). Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^2 = (\sqrt{x^2 + 1} + 1)(x^2 - y^3 + 3y - 2) \\ x^2 + (y + 1)^2 = 2\left(1 + \frac{1 - x^2}{y}\right) \end{cases}.$$

Câu 2 (5,0 điểm).

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m - 1)x^2 + 3m - 2$ đồng biến trên khoảng $(2; 5)$.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Tìm m để phương trình $\frac{1}{2}\sqrt{3x+36} + \sqrt{4-\frac{x}{2}} = mf\left(\frac{x}{4}\right)$ có nghiệm trên đoạn $[4; 8]$.

Câu 3 (2,0 điểm). Xếp 6 chữ số 1, 1, 4, 4, 5, 8 thành hàng ngang, gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có được sau khi xếp. Chọn một số từ tập S , tính xác suất sao cho số được chọn có hai chữ số giống nhau không đứng cạnh nhau.

Câu 4 (2,0 điểm). Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $c + d = 3$, $a^2 + b^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = ac + cd + db$.

Câu 5 (6,0 điểm). a) Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC cân tại B , $\widehat{ABC} = 120^\circ$, $AB = a$, $SB \perp (ABC)$ và góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng 45° . Gọi M là trung điểm của AC , N là trung điểm của SM . Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABN) .

b) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Trên cạnh CC' lấy điểm M sao cho $CM = 4MC'$. Gọi H, K lần lượt là điểm đối xứng của A', B' qua M . Tính thể tích khối đa diện $CABHKC'$ theo V .

Câu 6 (2,0 điểm). Gọi V và S lần lượt là thể tích và diện tích toàn phần của một tứ diện. Chứng minh $V^2 < \frac{S^3}{288}$

.....**Hết**.....

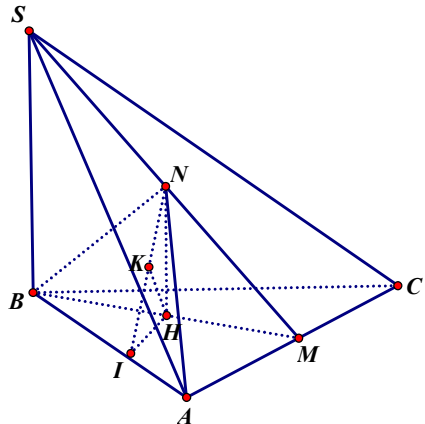
Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính bỏ túi.

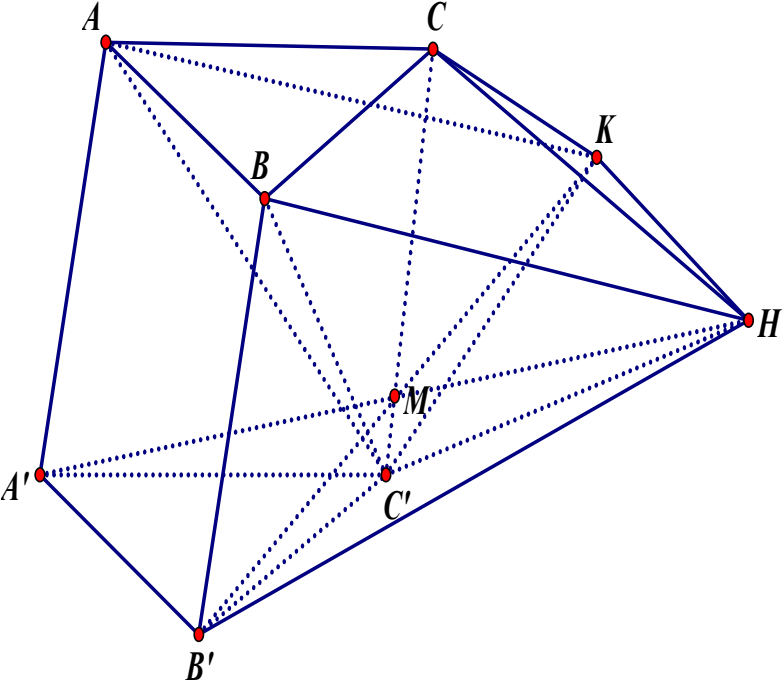
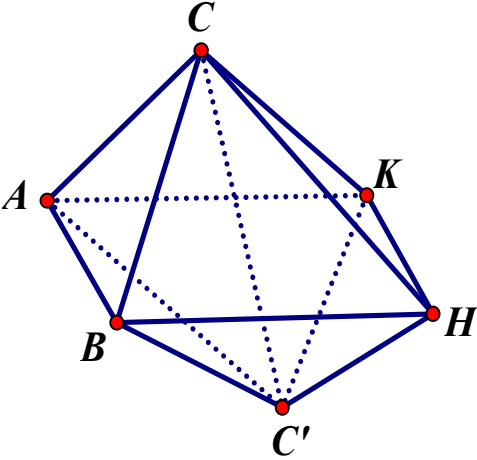
Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm															
1. (3,0đ)	Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2 = \left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(x^2-y^3+3y-2\right) & (1) \\ x^2+(y+1)^2 = 2\left(1+\frac{1-x^2}{y}\right) & (2) \end{cases}$	3,0															
	Đk: $y \neq 0$ $(2) \Leftrightarrow (y+2)(x^2+y^2-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$	0,5															
	TH1: Với $y=-2$ thay vào (1) ta được $x=0$ hoặc $x=\pm 2\sqrt{2}$ Do đó hệ có nghiệm là $(0;-2);(2\sqrt{2};-2);(-2\sqrt{2};-2)$	0,5															
	TH2: Với $x^2+y^2=1 \Rightarrow x \in [-1;1], y \in [-1;1]$ Ta có $(1) \Leftrightarrow 4\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=x^2-y^3+3y-2 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+1}=x^2-y^3+3y+2$ $\Leftrightarrow 4\sqrt{x^2+1}-x^2=-y^3+3y+2$	0,5															
	Lập BBT của hàm số $f(x)=4\sqrt{x^2+1}-x^2, g(x)=-y^3+3y+2$ trên $[-1;1]$ ta suy ra được TH2 hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$	1,0															
	Vậy nghiệm của hệ Pt đã cho là: $(0;-2);(2\sqrt{2};-2);(-2\sqrt{2};-2)$ và $(0;1)$	0,5															
2a. (3,0đ)	2a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+3m-2$ đồng biến trên khoảng $(2;5)$.	3,0															
	Ta có $y'=4x^3-4(m-1)x \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2=m-1 \end{cases}$	0,5															
	*TH1: Với $m-1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$ ta có $y' \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Vậy với $m \leq 1$ (thỏa mãn)	1,0															
	*TH2: Với $m > 1$. Ta có bảng xét dấu của đạo hàm <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\sqrt{m-1}$</td><td>0</td><td>$\sqrt{m-1}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table> Để hàm số đồng biến trên khoảng $(2;5)$ thì $\sqrt{m-1} \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 5$. Kết hợp với $m > 1$ ta được $1 < m \leq 5$	x	$-\infty$	$-\sqrt{m-1}$	0	$\sqrt{m-1}$	$+\infty$	y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	1,0
x	$-\infty$	$-\sqrt{m-1}$	0	$\sqrt{m-1}$	$+\infty$												
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$									
	Kết hợp 2 TH ta được $m \leq 5$.	0,5															
2b (2,0đ)	c) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ: Tìm m để phương trình $\frac{1}{2}\sqrt{3x+36}+\sqrt{4-\frac{x}{2}}=mf\left(\frac{x}{4}\right)$ có nghiệm trên đoạn $[4;8]$.	2,0															

	Đặt $\frac{x}{4} = t$, khi $x \in [4; 8]$ thì $t \in [1; 2]$. Khi đó PT đã cho trở thành $\sqrt{3t+9} + \sqrt{4-2t} = mf(t) \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{3t+9} + \sqrt{4-2t}}{f(t)} (*)$	0,5
	Đặt $g(t) = \sqrt{3t+9} + \sqrt{4-2t}$ Chúng minh được khi $t \in [1; 2]$ thì $g(t) > 0, g'(t) < 0$ và $f(t) > 0, f'(t) > 0$	0,5
	Xét hàm số $h(t) = \frac{g(t)}{f(t)}$ trên đoạn $[1; 2]$ Có $h'(t) = \frac{g'(t).f(t) - g(t).f'(t)}{f^2(t)} < 0$, suy ra hàm số $h(t)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$	0,5
	PT đã cho có nghiệm $x \in [4; 8] \Leftrightarrow$ PT (*) có nghiệm $t \in [1; 2]$ $\Leftrightarrow h(2) \leq m \leq h(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{15}}{4} \leq m \leq \sqrt{12} + \sqrt{2}$. Vậy $\frac{\sqrt{15}}{4} \leq m \leq \sqrt{12} + \sqrt{2}$	0,5
3. (3,0đ)	Xếp 6 chữ số 1,1,4,4,5,8 thành hàng ngang, gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên có được sau khi xếp. Chọn một số từ tập S, tính xác suất sao cho số được chọn có hai chữ số giống nhau không đứng cạnh nhau.	3,0
	$n(S) = \frac{6!}{2!2!} = 180$; $n(\Omega) = C_{180}^1 = 180$ Gọi A là biến cố “Chọn được 1 số từ tập S sao cho hai chữ số giống nhau đứng cạnh nhau”	0,5
	TH1 : Số đó có hai chữ số 1 và hai chữ số 4 đứng cạnh nhau Có $4! = 24$ (số)	0,5
	TH2 : Số đó có hai chữ số 1 đứng cạnh nhau hoặc hai chữ số 4 đứng cạnh nhau Có $2 \cdot \left(\frac{5!}{2!} - 24 \right) = 72$ (số)	1,0
	$n(A) = 24 + 72 = 96 \Rightarrow n(\bar{A}) = 180 - 96 = 84$ Vậy xác suất $P(\bar{A}) = \frac{84}{180} = \frac{7}{15}$	0,5 0,5
4. (2,0đ)	Cho $a, b, c, d \in R$ thỏa mãn $c + d = 3, a^2 + b^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = ac + cd + db$	2,0
	Do $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (c^2 + d^2)$ và $cd = \frac{9 - (c^2 + d^2)}{2}$ nên ta có $M \leq -\frac{c^2 + d^2}{2} + \sqrt{c^2 + d^2} + \frac{9}{2}$	0,5

	$\text{Đặt } t = \sqrt{c^2 + d^2} \Rightarrow M \leq -\frac{t^2}{2} + t + \frac{9}{2} \text{ với } t \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$	0,5
	$\text{Lập BBT của hàm số } f(t) = -\frac{t^2}{2} + t + \frac{9}{2} \text{ trên } \left[\frac{3\sqrt{3}}{2}; +\infty \right)$	0,5
	$\text{Từ BBT suy ra max } M = \frac{9+6\sqrt{2}}{4} \text{ khi } \begin{cases} c = d = \frac{3}{2} \\ a = b = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$	0,5
5a. (3,0đ)	a) Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC cân tại B, $\widehat{ABC} = 120^\circ$, $AB = a$, $SB \perp (ABC)$ và góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng 45°. Gọi M là trung điểm của AC, N là trung điểm của SM. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (ABN).	3,0
	Kẻ $NH \parallel SB$ (H là trung điểm của BM). Suy ra $NH \perp (ABC)$. Ta có $d(C; (ABN)) = 2d(M; (ABN)) = 4d(H; (ABN))$ Kẻ $HI \perp AB$, $HK \perp NI$. $\Rightarrow HK = d(H; (ABN))$ 	1,0 1,0
	Ta có: $\begin{cases} AC \perp BM \\ AC \perp SB \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBM) \Rightarrow AC \perp SM$. Suy ra: $\left[\widehat{(SAC), (ABC)} \right] = \left[\widehat{SM, BM} \right] = \widehat{SMB} = 45^\circ$. Mà $\widehat{ABM} = 60^\circ$. Xét tam giác ABM ta có: $BM = AB \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2} \Rightarrow BH = \frac{a}{4}$ Xét tam giác SBM ta có: $SB = BM \cdot \tan 45^\circ = \frac{a}{2} \Rightarrow NH = \frac{a}{4}$ Xét tam giác BHI ta có: $HI = BH \cdot \sin 60^\circ = \frac{a}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{8}$	1,0

	Có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HN^2} + \frac{1}{HI^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{21}}{28}$. Suy ra $d[C;(ABN)] = 4 \cdot \frac{a\sqrt{21}}{28} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$	
5b (3,0đ)	b) Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có thể tích V . Trên cạnh CC' lấy điểm M sao cho $CM = 4MC'$. Gọi H, K lần lượt là điểm đối xứng của của A', B' qua M . Tính thể tích khối đa diện $CABHKC'$ theo V . 	3,0
	Ta có $HK // A'B'$, mà $A'B' // AB$ nên $HK // AB$ $V_{ABCHKC'} = V_{C'ABC} + V_{C'NBC} + V_{C'CHK} + V_{C'ACK}$ 	0,5

	Tính được $V_{C'ABC} = \frac{V}{3}$ $V_{C'ABC} = V_{H.C'BC} = \frac{1}{3} \cdot S_{C'BC} \cdot d(H; (C'BC)) = \frac{1}{3} \cdot S_{C'BC} \cdot d(A'; (C'BC)) = V_{A'.C'BC} = \frac{V}{3}$ Tương tự tính được $V_{C'ACK} = \frac{V}{3}, V_{C'ACK} = \frac{V}{3}$ Vậy $V_{ABCHKC'} = \frac{4V}{3}$	0,5 0,5 1,0 0,5
6. (2,0đ).	Gọi V và S lần lượt là thể tích và diện tích toàn phần của một tứ diện. Chứng minh $V^2 < \frac{S^3}{288}$	
	Gọi tứ diện đã cho là $ABCD$. Gọi diện tích các mặt ABC, ACD, ADB, BCD là S_D, S_B, S_C, S_A Gọi B' là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (ACD) và C' là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (ABD). Ta có: $V = \frac{1}{3} S_B \cdot BB' = \frac{1}{3} S_C \cdot CC' \Rightarrow V^2 = \frac{1}{9} S_B \cdot S_C \cdot BB' \cdot CC'$ Hạ $BH \perp AB$. Ta có $BB' \leq BH$ và $CC' \leq AC$. Từ đó suy ra $V^2 \leq \frac{2}{9} S_B \cdot S_C \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH = \frac{2}{9} S_B \cdot S_C \cdot S_D$ Đấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAB} = 90^\circ$	1,0
	Lập luận tương tự ta được $V^2 \leq \frac{2}{9} \cdot S_C \cdot S_B \cdot S_A, V^2 \leq \frac{2}{9} \cdot S_D \cdot S_A \cdot S_B$ và $V^2 \leq \frac{2}{9} \cdot S_A \cdot S_B \cdot S_C$. Do đó $V^8 \leq \left(\frac{2}{9}\right)^4 \cdot (S_A S_B S_C S_D)^3$. Vì đẳng thức không đồng thời xảy ra nên $V^2 \leq \frac{2}{9} \cdot \left(\sqrt[4]{S_A S_B S_C S_D}\right)^3$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki $\sqrt[4]{S_A S_B S_C S_D} \leq \frac{S_A + S_B + S_C + S_D}{4} = \frac{S}{4}$ Vậy: $V^2 < \frac{S^3}{288}$	1,0
	<u>Ghi chú:</u> HS giải cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.	

