**SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM**

**MỘT SỐ SAI LẦM CỦA HỌC SINH TRONG DẠY HỌC MÔN TOÁN**

 **NHÌN TỪ PHƯƠNG DIỆN HOẠT ĐỘNG**

**A. MỞ ĐẦU**

**I. BỐI CẢNH CỦA ĐỀ TÀI**

Ở trường phổ thông, dạy toán là dạy hoạt động toán học. Đối với học sinh, có thể xem giải toán là hình thức chủ yếu của hoạt động toán học. *Dạy học giải toán có vai trò đặc biệt ở trường phổ thông.* Tuy nhiên, thực tiễn cho thấy chất lượng dạy học Toán ở trường phổ thông có lúc, có chỗ còn chưa tốt, biểu hiện qua việc *năng lực giải toán của học sinh còn hạn chế do học sinh mắc nhiều sai lầm.* Một trong những nguyên nhân quan trọng là do giáo viên chưa chú ý một cách đúng mực việc phát hiện, uốn nắn và sửa chữa các sai lầm cho học sinh ngay trong các giờ học. Vì điều này nên học sinh nhiều khi gặp phải tình trạng *sai lầm nối tiếp sai lầm.*

 Đề tài ra đời trong bối cảnh việc tiếp thu tri thức một cách có ý thức được kích thích bởi việc tự học sinh phân tích một cách có suy nghĩ nội dung của từng sai lầm mà học sinh phạm phải, giải thích nguồn gốc của các sai lầm này và tư duy, lí luận về bản chất của các sai lầm chưa được quan tâm đúng mức. Hiện nay, để bắt nhịp đổi mới theo hình thức thi trắc nghiệm của Bộ Giáo dục và Đào tạo, việc phát hiện các sai lầm trong giải toán của học chưa xuất hiện rất cần thiết, tạo các tình huống bẫy cho các phương án nhiễu trong xây dựng các đáp án câu trắc nghiệm khách quan.

**II. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI**

Tôi chọn đề tài ***“Một số sai lầm của học sinh trong hoạt động dạy học môn toán nhìn từ phương diện hoạt động”***  vì những lý do sau đây:

+) Đây là nội dung đòi hỏi tư duy logic cao, kết hợp với hoạt động nhận thức và rất quan trọng trong chương trình toán THPT.

+) Các dạng toán trong chương trình THPT rất đa dạng, nhiều cấp độ nên không tránh khỏi học sinh gặp sai lầm khi tiếp cận giải toán.

+) Đây là tài liệu chuyên sâu về phát triển nhận thức của học sinh trong dạy học môn toán dựa trên việc phát hiện và sửa chữa sai lầm trong quá trình nhận thức, học tập.

+) Nội dung của đề tài nâng cao nhận thức lí luận và rèn luyện kĩ năng thực hành, tích lũy kinh nghiệm dạy học và nghiên cứu khoa học giáo dục để nâng cao hiệu quả dạy học.

**III. PHẠM VI VÀ ĐỐI TƯỢNG NGHIÊN CỨU**

**1. Phạm vi nghiên cứu**

Đề tài này nghiên cứu những sai lầm thường gặp khi giải toán của học sinh thuộc chương trình Trung học phổ thông.

**2. Đối tượng nghiên cứu**

Hệ thống các bài toán trong chương trình Toán THPT mà học sinh hay gặp sai lầm khi giải.

**IV. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU**

- Giúp giáo viên có kỹ năng phát hiện sai lầm của học sinh trong nhận thức, kỹ năng phân tích sai lầm của học sinh thể hiện qua các sản phẩm học tập. Bước đầu giáo viên có kỹ năng đề xuất và lựa chọn các biện pháp phòng ngừa, sửa chữa sai lầm của học sinh trong dạy học môn toán.

- Nhằm giúp học sinh hiểu sâu sắc bản chất của vấn đề, dự đoán và tránh được các sai lầm trong học tập, trong cuộc sống, góp phần phát triển thao tác phân tích – tổng hợp, trừu tượng hóa – khái quát hóa.

- Nội dung đề tài kết hợp giữa các yếu tố chẩn đoán nhận thức của học sinh với các biện pháp điều chỉnh hành vi của học sinh trong quá trình nhận thức, quá trình học tập tri thức môn toán. Từ đó, bồi dưỡng học sinh về phương pháp, kỹ năng giải toán, nâng cao khả năng tư duy, sáng tạo cho học sinh trong học toán.

**V. ĐIỂM MỚI TRONG KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU**

Thời gian qua, có nhiều tác giả đã nghiên cứu các mảng về đề tài này, nhưng điểm mới khác biệt ở đây là khi xem xét các sai lầm của học sinh tôi không sắp xếp theo từng dạng toán, nói cách khác là, không tiến hành theo con đường nêu những sai lầm theo từng chủ đề kiến thức, mà *những sai lầm của học sinh (khi giải Toán Đại số và Giải tích) sẽ được đề cập và làm sáng tỏ từ phương diện hoạt động toán học*, có sự kết hợp giữa các yếu tố chẩn đoán nhận thức của học sinh với các biện pháp điều chỉnh hành vi của học sinh trong quá trình nhận thức, quá trình học tập tri thức môn toán, thông qua các bài toán đa dạng, phong phú với nhiều tình huống giúp học sinh khắc phục sai lầm.

 **B. NỘI DUNG**

**I. CƠ SỞ LÝ LUẬN**

Đề tài nêu một số sai lầm của học sinh trong hoạt động dạy học môn toán nhìn từ phương diện hoạt động. Các đối tượng học sinh có thể tiếp thu được phương pháp và kỹ năng giải toán qua các ví dụ đã nêu trong đề tài để giải các bài toán một cách có hiệu quả.

**II. THỰC TRẠNG CỦA VẤN ĐỀ**

Đối với học sinh: Khi chưa học tập phương pháp và rèn luyện kĩ năng, chỉ có số ít các em học sinh suy nghĩ ,tập trung làm bài tập dạng này.

Đối với giáo viên: Tài liệu viết về các dạng bài tập này tuy đã có nhưng chưa có tính chất hệ thống, chưa chú ý đến phương pháp dạy học bộ môn.

**III. CÁC BIỆN PHÁP ĐÃ TIẾN HÀNH ĐỂ GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ**

Ứng với mỗi dạng của hoạt động, giáo viên xây dựng một số tình huống có chứa lời giải sai lầm, hướng dẫn học sinh phân tích, tìm ra sai lầm từ các ví dụ cụ thể, sau đó tổng hợp lại để khái quát cho một lớp các bài toán cùng loại.

 Công cụ chủ yếu: Bài kiểm tra, phiếu điều tra

**Một số sai lầm của học sinh trong dạy học môn toán**

Có nhiều cách phân loại các sai lầm của học sinh trong nhận thức tri thức toán. Các sai lầm được đề cập sau đây được nhìn từ phương diện hoạt động toán học.

- Sai lầm liên quan đến phân chia trường hợp riêng

- Sai lầm liên quan đến ngôn ngữ diễn đạt

- Sai lầm liên quan đến thao tác tư duy

- Sai lầm liên quan đến cảm nhận trực quan

- Sai lầm liên quan đến nắm nội hàm khái niệm hoặc điều kiện áp dụng định lí

- Sai lầm liên quan đến chuyển đổi bài toán

- Sai lầm liên quan đến chủ nghĩa hình thức

- Những sai lầm liên quan đến suy luận

Trong mục này để ám chỉ những lời giải có mắc phải sai lầm, tôi dùng kí hiệu (?) và sử dụng kí hiệu (!) để phân tích sai lầm của học sinh.

**1. Sai lầm liên quan đến phân chia trường hợp riêng**

Phân chia khái niệm là một thao tác logic ta thường gặp. Còn trong giải toán thì thường xuyên ta phải xét trường hợp này, xét trường hợp kia, hay ta có thể gọi chung là phân chia trường hợp.

Trong dạy học chủ đề phương trình, bất phương trình, hoạt động phân chia trường riêng thường gặp ở các bài toán giải và biện luận phương trình, bất phương trình chứa tham số; giải các PT, BPT có chứa ẩn dưới mẫu thức, có chứa ẩn trong dấu căn thức, giải các phương trình, bất phương trình tích, .... Trong dạng toán giải và biện luận, khái niệm được phân chia là tham số, trong dạng toán sau, khái niệm được phân chia là tập xác định.

Trong chủ đề Tổ hợp và Xác suất, hoạt động phân chia trường hợp riêng thường gặp ở bài toán đếm, ...

Trong dạy học hình học, hoạt động phân chia trường hợp thường gặp ở các bài toán dựng hình, quỹ tích, xác định chân đường vuông góc, ...

Nhìn nhận từ góc độ tổng quát thì việc phân chia trường hợp trong quá trình giải toán vô cùng phong phú và đa dạng, nó không theo một khuôn mẫu cố định nào. Do đó, khi thực hiện học sinh gặp rất nhiều khó khăn, mắc phải rất nhiều sai lầm, thậm chí không tìm ra được cơ sở để phân chia trường hợp.

Chẳng hạn, học sinh thường gặp những khó khăn và sai lầm sau đây khi giải những bài toán có liên quan đến việc phân chia trường hợp.

**1. 1. Không biết chia thành những trường hợp nào, nói cách khác không biết tìm ra tiêu chí làm cơ sở cho sự phân chia**

Đây có thể là khó khăn lớn nhất của học sinh trong quá trình giải toán liên quan đến sự phân chia. Về phương diện này giáo viên thì lắm lúc trình bày cho học sinh mang tính chất áp đặt, có vẻ hình như giáo viên chỉ quan tâm đến tính đúng đắn của từng khâu biến đổi chứ không quan tâm dến việc làm như thế nào đó để học sinh hiểu rõ tại sao lại chia các trường hợp cụ thể như vậy.

**Ví dụ 2***:* Giải và biện luận phương trình

Rất nhiều học sinh đã giải như sau:

(!)

Học sinh kết luận .

(!): Ở lời giải này học sinh chưa hiểu bản chất của thuật ngữ “giải và biện luận” nên suy ra giá trị của tham số.

**Ví dụ 3**: Giải và biện luận phương trình : (1)

Sai lầm thường gặp:

(1) (!)

(!): Học sinh không xét trường hợp . Ở bài toán này giáo viên phải phân tích để học sinh hiểu tại sao lại phân chia 2 trường hợp như vậy.

**Ví dụ 4***:* Giải và biện luận theo tham số a bất phương trình

 (1)

(?): Gặp bài toán này, học sinh hầu như không biết nên phân chia tham số a thành những trường hợp nào. Nhiều học sinh cứ ngỡ rằng 3 số: a, 2a, 3a thì dĩ nhiên 3a là lớn nhất, do đó điều kiện của bất phương trình chỉ là x > 3a và biến đổi

Việc phân chia 3 trường hợp a = 0; a < 0; a > 0 căn cứ một phần quan trọng vào việc tìm điều kiện chung để thay thế cho 3 điều kiện: ; ; .

Khi lần đầu tiên tiếp xúc với thuật ngữ “*Giải và biện luận*” chắc hẳn rất nhiều học sinh cảm thấy khó hiểu cho dù giáo viên có cố gắng giải thích thế nào đi nữa. Thực tế là học sinh đã quen với việc giải phương trình, còn giải và biện luận có khác với việc giải phương trình hay không? Chính điều băn khoăn này nếu không được giải thích sẽ làm học sinh ít nhiều cảm thấy lúng túng khi gặp bài toán giải và biện luận.

Học sinh không nắm vững bản chất của tham số, không hiểu nghĩa của cụm từ giải và biện luận, lẫn lộn giữa biện luận theo m và tìm m. Khi giải biện luận phương trình (bất phương trình) có tham số m, nhiều học sinh quy về tìm m để phương trình (bất phương trình) có nghiệm.

**Ví dụ 5***:* Tìm điều kiện tham số m để phương trình vô nghiệm:

 mx2 – 2mx + 2 = 0

(?): Học sinh đưa ra lời giải: phương trình trên có nghiệm khi và chỉ khi:

 ∆’ = - 2m 0 ⇔ .

(!): Giáo viên có thể chỉ ra một mâu thuẫn cho học sinh trong lời giải trên, rõ ràng với m = 0 thì phương trình trở thành: 0.x2 – 0x + 2 = 0 thì phương trình đã cho vô nghiệm. Học sinh có thể sẽ thấy khó hiểu khi gặp mâu thuẫn này, lời giải trên là sai lầm bởi khi m = 0 phương trình trên không còn là phương trình bậc hai nữa, nên việc vận dụng biệt số ∆’ trong trường hợp m = 0 là không còn đúng nữa. Ở đây, học sinh đã không ý thức được rằng biệt số ∆’ chỉ được nhắc tới (tồn tại) khi đó là phương trình bậc hai.

Học sinh đã không ý thức được sự suy biến của tham số, áp dụng thuật giải một cách máy móc vào những trường hợp không thuộc hệ thống .

**1. 2. Phân chia chưa đầy đủ (phân chia thiếu trường hợp)**

**Ví dụ 1:** Tìm m sao cho phương trình:

  chỉ có một nghiệm dương.

Nhiều học sinh đã giải như sau:

Phương trình chỉ 1 có nghiệm dương Phương trình có 2 nghiệm thõa mãn:

TH1:

TH2:

Vậy: (!)

Hoặc có học sinh giải: Phương trình chỉ có 1 nghiệm dương phương trình có nghiệm kép dương (!)

(!): Theo 2 tình huống trên học sinh đều phân chia thiếu trường hợp dẫn đến sai kết quả.

**Ví dụ 2:** Có bao nhiêu số tự nhiên, mà mỗi số có 6 chữ số phân biệt sao cho:

a) Không có mặt chữ số 0 và chữ số 1.

b) Có mặt chữ số 0 và chữ số 1.

 Rất nhiều HS đã xem nếu đã có kết quả của câu a) thì câu b) dễ dàng suy ra được. Nguyên nhân của suy nghĩ chủ quan đó là do HS đã lý luận như sau: Tập hợp các số tự nhiên, mà mỗi số có 6 chữ số phân biệt chia làm 2 loại: Loại 1 là tập hợp các số tự nhiên, mà mỗi số có 6 chữ số phân biệt không có mặt 0 và 1; loại 2 là tập hợp hợp các số tự nhiên, mà mỗi số có 6 chữ số phân biệt có mặt chữ số 0 và 1.

Từ đó dẫn đến kết quả của câu b) là: . Ở cách giải này, HS dựa vào tiêu chí có mặt hay không có mặt chữ số 0 và chữ số 1 trong mỗi số tự nhiên có 6 chữ số phân biệt để phân chia trường hợp. Tuy nhiên, cách phân chia của học sinh chưa đầy đủ còn thiếu loại có mặt chữ số 0 nhưng không có mặt chữ số 1 và loại có mặt chữ số 1 nhưng không có mặt chữ số 0.

**1. 3. Phân chia không độc lập (thừa trường hợp)**

**Ví dụ 1:**Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 2?

Có học sinh thực hiện lời giải bài toán này như sau:

Số cách lập số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau từ các chữ số {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} là

Số cách lập số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau không có chữ số 2 là

Suy ra, có tất cả - cách lập số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau trong đó nhất thiết có mặt chữ số 2.

(!): Sai lầm ở đây là học sinh không loại trừ trường hợp số tự nhiên có 5 chữ số lập được từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có dạng . Đây là dạng số tự nhiên không thõa mãn yêu cầu bài toán. Như vậy học sinh đã không trừ đi các số không thoả mãn yêu cầu dẫn đến tính sai kết quả.

**Ví dụ 2:** Với bài toán: "Bạn Hoa có 20 quyển sách gồm 8 quyển sách toán, 7 quyển sách lý, 5 quyển sách hóa. Hoa chọn ngẫu nhiên 6 quyển sách trên kệ để cho bạn mượn. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong 6 quyển sách đó có đủ cả 3 loại?", nhiều HS đã giải như sau:

Chọn 6 quyển sách từ 20 quyển sách có cách

Công việc chọn ngẫu nhiên 6 viên bi trong hộp sao cho không có đủ 3 loại có thể thực hiện bởi các phương án sau:

Phương án 1: Chỉ có 2 loại sách toán và sách lý có cách.

Phương án 2: Chỉ có 2 loại sách toán và sách hóa có cách.

Phương án 3: Chỉ có 2 loại sách lý và sách hóa có cách.

Vậy số cách chọn để trong 6 quyển sách đó có đủ cả 3 loại là cách chọn.

Lời giải trên đã sai lầm ở chỗ: Các phương án đưa ra chưa độc lập, việc thực hiện công việc của phương án này bị trùng lặp ở phương án kia. Chẳng hạn, trong  cách chọn chỉ có loại sách toán và sách lý, trường hợp cả 6 quyển sách đều là toán sẽ lặp lại trong  cách chọn chỉ có 2 loại sách toán và sách hóa.

Cũng với bài toán trên, có HS giải như sau: Công việc chọn ngẫu nhiên 6 quyển sách trong hộp có thể thực hiện bởi các phương án sau:

 Phương án 1: Chỉ có 2 loại sách toán và sách lý: cách.

 Phương án 2: Chỉ có 2 loại sách toán và sách hóa: cách.

 Phương án 3: Chỉ có 2 loại sách lý và sách hóa: cách.

 Phương án 4: Chỉ có sách toán: cách.

 Phương án 5: Chỉ có sách lý: cách.

 Phương án 6: Có cả sách toán, sách lý và sách hóa: *x* cách chọn.

Theo quy tắc cộng, ta có:

 cách chọn.

Lời giải này đã sai lầm ở chỗ: Các phương án đưa ra chưa độc lập, việc thực hiện công việc của phương án này bị trùng lặp ở phương án kia. Chẳng hạn trong  cách chọn chỉ có loại sách toán và sách lý, trường hợp cả 6 quyển sách đều là toán sẽ lặp lại trong phương án 4 chỉ có sách toán.

Từ đó, chúng ta có thể đưa ra nhận xét tổng quát về nguyên nhân sai lầm này là do HS không biết phân chia một bài toán đếm thành các trường hợp riêng đơn giản hơn để đếm, không biết dựa vào tiêu chí nào để phân chia, không biết yêu cầu của việc phân chia một khái niệm, từ đó dẫn đến sai lầm là phân chia không đầy đủ các trường hợp, hoặc các trường hợp đưa ra không độc lập.

**1.4. Phân chia không liên tục**

**Ví dụ 1**: Một nhóm học sinh 20 em gồm 8 học sinh nam và 12 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn 5 học sinh trong nhóm sao cho có ít nhất một học sinh nữ.

Học sinh giải vắn tắt:

(?): Số cách chọn 5 học sinh trong nhóm sao cho có ít nhất một học sinh nữ là:

(!): Học sinh gặp sai lầm do phân chia các trường hợp không liên tục dẫn đến thiếu trường hợp “4 học sinh nữ và 1 học sinh nam ứng với số cách chọn là: ”

**2. Sai lầm liên quan đến ngôn ngữ diễn đạt**

**2. 1. Sai lầm về cú pháp và ngữ nghĩa**

Trong dạy học Toán, nhằm mục đích rèn luyện cho học sinh kỹ năng, kỹ xảo giải bài tập, giáo viên nhấn mạnh vào những quy tắc có tính chất thuật giải và hướng dẫn học sinh vận dụng đúng đắn các quy tắc đó. Mặt khác, để chống lại việc lĩnh hội kiến thức một cách hình thức và máy móc, giáo viên cần yêu cầu học sinh hiểu được bản chất, cơ sở của các quy tắc, thuật giải đó. Do đó, trong dạy học, giáo viên cần tập luyện cho học sinh xem xét bài toán từ cả hai phương diện ngữ nghĩa và cú pháp, đặc biệt là về mặt ngữ nghĩa. Việc xem xét bài toán từ cả hai phương diện ngữ nghĩa và cú pháp chính là rèn luyện cho học sinh kỹ năng phân tích, tổng hợp và so sánh.

Về sự phối hợp giữa hai mặt ngữ nghĩa và cú pháp trong giảng dạy ngôn ngữ Toán học, A. A. Stôliar cho rằng: "Mặt ngữ nghĩa nói chung phải trội hơn trong tất cả các giai đoạn của quá trình giảng dạy, mặt cú pháp nên áp dụng chỉ ở chỗ mà ở đó cần phải nắm vững các angôrit xác định".

Chẳng hạn, không ít học sinh đã cho rằng: ;

; logc(a.b) = logca.logcb; ;

(-x)n = - xn (không cần chú ý tới n chẵn, n lẻ), ; ; ...

Có những bài toán học sinh chỉ giải được theo một quy tắc hình thức mà không biết được bản chất của nó là gì.

**Ví dụ 1:** chứng minh rằng là một số tự nhiên. Không ít em đã áp dụng công thức hình thức và lúng túng trong việc chứng minh tử số chia hết cho mẫu số. Điều đó có nghĩa là các em không nắm được bản chất của ký hiệu chính là số tập con gồm k phần tử lấy trong n phần tử.

(!): Phải thật sự hiểu được bản chất của ký hiệu mới có thể có được lời giải hay như vậy.

Có những hiện tượng học sinh biến đổi đúng những chưa hẳn họ đã nắm được kiến thức một cách thực thụ.

Có nhiều học sinh “nắm được” cú pháp một cách hình thức nhưng không hẳn hiểu được ngữ nghĩa của kí hiệu toán học.

**Ví dụ 2:** Học sinh học rất “*vần*” một số công thức “*lim của một tổng bằng tổng các lim*”, “*lim của một tích bằng tích các lim*” hay “*đạo hàm của một tổng bằng tổng các đạo hàm*”,... nhưng không hiểu bản chất của các công thức đó.

**Ví dụ 3:** Khi học xong định lí về giới hạn hàm số, học sinh trả lời nhanh kết quả tính  với một cách suy nghĩ hình thức là thay giá trị x = 1 vào  để cho kết quả. Suy nghĩ kiểu như vậy nên học sinh cho rằng  . Điều đó cho thấy học sinh không hiểu lim.

**2. 2. Bị ám ảnh bởi các ngôn ngữ thông thường của các từ trong tiếng Việt**

**Ví dụ 4:** Trong tiếng Việt *đại* là to hơn *tiểu*, học sinh ấn tượng với điều này, nên nghĩ rằng hàm số có cực đại lớn hơn cực tiểu. Nhưng thực ra, nếu hàm số có cực trị thì giá trị cực tiểu lại lớn hơn giá trị cực đại.

**2. 3. Áp đặt những tính chất liên quan đến khái niệm này cho khái niệm khác có những từ gần giống**

**Ví dụ 5:** Học sinh nghĩ: “Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương bằng tổng, hiệu, tích, thương các đạo hàm,” do bắt chước tính chất “Giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương bằng tổng, hiệu, tích, thương các giới hạn”;

 Ngoài những sai lầm trên học sinh còn sử dụng ngôn ngữ một cách tùy tiện: “đồ thị đồng biến”; “hàm số cắt trục hoành”; “điểm uốn của hàm số”; “tiệm cận của hàm số” ..., hay như nói “*tổ hợp chập k của n phần tử là ”, “chỉnh hợp chập k của n phần tử là* ” và không thấy được rằng, thay đổi một từ có thể làm thay đổi hẳn mệnh đề, có thể dẫn đến sai mệnh đề. Khi phiên dịch từ ngôn ngữ Tiếng Việt sang ngôn ngữ Toán học học sinh thường hay mắc sai lầm. Chẳng hạn, tìm m để hàm số có hai khoảng đồng biến trên toàn miền xác định của nó thì học sinh phiên dịch thành hai khoảng đồng biến là (.

**3. Sai lầm liên quan đến thao tác tư duy**

**Ví dụ 1:**Tìm giá trị nhỏ nhất của

Nhiều học sinh đã giải bài toán trên như sau:

(?): Với mọi x, y thì: .

Vậy hay .

Sai lầm ở đây là học sinh không chỉ ra các giá trị x, y để

Giáo viên cần phân tích để học sinh nhận ra rằng: , và nếu tồn tại giá trị sao cho thì mới kết luận . Đối với bài toán này thì không tồn tại :

**Ví dụ 2:** Tìm a để tập nghiệm trùng nhau.

**(?**): Ta có:

Do đó, yêu cầu bài toán .

(!): Học sinh đã không xét đến tính chất của hàm số là có tập giá trị [0; 1]

(!): Yêu cầu bài toán .

**Ví dụ 3:** Với bài toán, giải hệ phương trình , nhiều HS đã giải như sau:

Trừ theo vế của phương trình (1) và (2) ta được:

Trường hợp 1: thế vào (1) ta có .

Trường hợp 2: thế vào (1) ta có

.

Trong ví dụ này, đa số học sinh đã biết phân chia thành hai trường hợp để giải nhưng lại không thực hiện thao tác tổng hợp để kết luận về nghiệm của hệ phương trình.

**Ví dụ 4:** Phân tích ứng dụng tính đơn điệu của hàm số dẫn đến kết quả: "Nếu hàm số f(x) đơn điệu trên (a; b) thì từ , sẽ tương đương với x = y". Tuy nhiên, do GV phân tích không sâu sắc nên dẫn tới tình trạng là HS chỉ nhớ được nội dung: "Nếu hàm số f(x) đơn điệu thì ", mà không chỉ rõ f là hàm số đơn điệu trên khoảng và . Kết quả đó dẫn tới các sai lầm trong giải toán.

Chẳng hạn, với phương trình , nhiều HS giải như sau: Xét hàm số , hàm số này đạo hàm  nên phương trình  có không quá một nghiệm. Nhận thấy  nên phương trình  có nghiệm duy nhất là . Rõ ràng rằng HS đã không quan tâm đến điều kiện là hàm số  phải đơn điệu trên khoảng . Ở đây, hàm số  đơn điệu trên từng khoảng xác định  và , suy ra trên mỗi khoảng phương trình có không quá một nghiệm. Xét riêng trên , phương trình có nghiệm duy nhất, và tương tự trên , phương trình có thêm nghiệm .

**Ví dụ 5:** Tìm m để đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành.

Có học sinh giải như sau:

(?): Đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành phương trình có nghiệm duy nhất.

Đây là cách giải sai. Dễ thấy rằng đồ thị hàm bậc ba tiếp xúc với trục hoành nhưng không nhất thiết có 1 nghiệm vì ngoài điểm tiếp xúc ra còn tồn tại điểm cắt khác nữa. Sai lầm trong cách phân tích ở đây là học sinh quen với đồ thị hàm bậc hai, mà đồ thị hàm bậc hai là parabol nên parabol tiếp xúc với trục hoành thì phương trình thiết có 1 nghiệm kép. Tuy nhiên, sang hàm số bậc 3, bậc 4 thì điều đó không còn đúng nữa.

Ngoài ra, một trong những biểu hiện sai lầm của HS là không tìm được dấu hiệu bản chất, ngộ nhận giữa dấu hiệu chung và dấu hiệu bản chất (trừu tượng hoá sai); không tiên đoán được một số trường hợp suy biến của cái tổng quát, ...

**Ví dụ 6:** Tìm nguyên hàm . Hãy khái quát hóa bài toán.

HS đã tìm nguyên hàm như sau:

(?): Vì 

nên .

HS dễ dàng khái quát hóa được bài toán tổng quát:

Tìm nguyên hàm , với

HS đã đưa ra kết quả sau: .

(!): Tuy nhiên lời giải đó đã mắc phải sai lầm được chỉ ra như sau:

Nếu  không nguyên thì không có nghĩa với những x làm cho không dương.

Nếu thì

Nếu thì .

Nguyên nhân sai lầm ở đây là do HS không ý thức được sự suy biến của nguyên hàm khi thay đổi nên đã khái quát hóa sai.

**Ví dụ 7:** Tính đạo hàm của hàm số

(?): Ta có: nên

(!): Nếu tính đạo hàm của hàm số tại một điểm bằng cách gán giá trị đối số để tìm giá trị hàm số rồi lấy đạo hàm thì với mọi hàm số và tại mọi điểm thuộc miền xác định của hàm số đều cho kết quả bằng 0.

Đối với bài này giáo viên cần hướng dẫn học sinh sử dụng công thức tính đạo hàm tại một điểm bằng định nghĩa .

**4. Sai lầm liên quan đến cảm nhận trực quan**

Trong cuộc sống cũng như trong toán học, cảm nhận, cảm thụ là rất quan trọng. Nói riêng đối với hình học thì vấn đề trực quan lại càng cần thiết. Trực quan giúp cho ta phát hiện vấn đề, chẳng hạn có những bài toán về hình học, nếu như ta vẽ hình chuẩn và thấy lặp đi lặp lại một số quy luật thì nhiều khi ta có thể khám phá ra một vấn đề ẩn náu đằng sau những hình ảnh trực quan đó. Tuy nhiên, trong toán học không chấp nhận việc chứng minh mà trong đó không có những lập luận có căn cứ một cách rõ ràng. Vì vậy trực quan chỉ là chỗ dựa để khám phá chứ không phải là phép chứng minh. Nếu không nhận thức được điều đó thì nhiều khi ta sẽ đưa ra những kết luận sai lầm liên quan đến cảm nhận trực quan.

**Ví dụ 1:** Cho (P): . Xác định m để (P) cắt d tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB = 3.

(?): Hoành độ giao điểm (P) và d là nghiệm của phương trình:

 (1).

Đặt = và gọi đồ thị của nó là , và gọi đồ thị của nó là đường thẳng . Khi đó, (P) cắt d tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn AB = 3 ứng với cắt đường thẳng tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB = 3.

(!): Thông qua hình ảnh trực quan học sinh cảm nhận rằng hai điểm A và B là những điểm cần tìm, ứng với m = 0.



 Hình 1

(!) Học đã gặp phải sai lầm khi cho rằng (P) cắt d tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn AB = 3 tương đương với cắt đường thẳng tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB = 3, do trực quan học sinh nhầm tưởng hai giao điểm của của (P) với đường thẳng d và hai giao điểm của với đường thẳng là có cùng tọa độ giao điểm, nhưng thực ra chỉ có cùng hoành độ nhưng không tung độ. Dẫn đến đáp án sai.

*Lời giải đúng là:*

Hoành độ giao điểm (P) và d là nghiệm của phương trình

 (1).

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi .

Gọi . Khi đó:

AB = 3 (\*)

Áp dụng định lí Vi-et:

(\*) thõa mãn.

**Ví dụ 2:**Trong mặt phẳng Oxy cho điểm A(0; 2) và đường thẳng . Tìm trên đường thẳng d hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông tại B và BC = 2AB.

(?): Thông qua hình vẽ trực quan có học sinh dự đoán rằng tọa độ điểm B(0; 1) và C(2; 2) hoặc C(-2; 0). Sau đó, cố gắng chứng minh hai điểm B, C có tọa độ như thế là các điểm cần tìm. Điều này dẫn đến sai lầm.



 Hình 2

*Lời giải đúng là:*

 và A(0; 2) nên AB:y=−2x+2

Tọa độ của B là nghiệm của hệ:

Gọi ). Theo giả thiết BC = 2AB:

Vậy

**5. Sai lầm liên quan đến không nắm vững nội hàm khái niệm hoặc điều kiện áp dụng định lí**

**5.1. Sai lầm khi không nắm vững nội hàm các khái niệm Toán học**

Thực tiễn sư phạm cho thấy trong quá trình vận dụng khái niệm, việc không nắm vững nội hàm và ngoại diên khái niệm sẽ dẫn tới học sinh hiểu không trọn vẹn, thậm chí hiểu sai lệch bản chất khái niệm. Mặt khác, nhiều khái niệm Toán học là sự mở rộng hoặc thu hẹp của khái niệm trước đó, việc không nắm và hiểu không đúng khái niệm có liên quan làm học sinh không hiểu, không có biểu tượng đúng về khái niệm mới.

Sai lầm về các khái niệm Toán học (đặc biệt là các khái niệm ban đầu có tính chất nền tảng) sẽ dẫn đến hệ quả tất yếu học kém toán. Vì vậy có thể nói sự “mất gốc” của học sinh về kiến thức Toán học trước hết coi là sự “mất gốc” về các khái niệm.

**Ví dụ 1:** Không nắm vững khái niệm nghiệm của phương trình và bất phương trình nên khi giải phương trình  học sinh không thừa nhận kết quả trên là nghiệm, do lâu nay học sinh nghĩ rằng nghiệm của phương trình là các giá trị rời rạc, đơn lẻ mà không phải là một khoảng, một đoạn.

**Ví dụ 2:**Nắm khái niệm hàm số, khái niệm giới hạn hàm số một cách hình thức nên không ít học sinh cho rằng kí hiệu f(x) là kí hiệu của tích hai đại lượng fx, xem ;  .

Chẳng hạn,

= 

 **Ví dụ 3:** Do không nắm vững khái niệm phương trình nên học sinh không cho rằng là phương trình theo ẩn m. Học sinh quen với các phương trình theo ẩn x, ẩn y, ẩn z,... nên khi gặp phương trình chứa đồng thời hai giá trị x và m thì học sinh mặc nhiên cho rằng x ẩn và m là tham số. Hay do không hiểu khái niệm nghiệm hệ phương trình nên khi giải hệ cho nghiệm x = 2; y = 3 thì kết luận hệ phương trình có hai nghiệm.

**Ví dụ 4:** Do nắm khái niệm tiếp xúc một cách trực quan từ hình vẽ nên dẫn tới sai lầm khi giải bài toán “tìm tham số để đồ thị hàm số bậc ba tiếp xúc với trục hoành”. Học sinh quan niệm tiếp xúc là đồ thị cắt trục hoành tại một điểm duy nhất, hơn nữa không hình dung được khái niệm tiếp xúc của hai đường nên cho rằng tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị hàm số bậc ba không tiếp xúc với hàm bậc ba.

**Ví dụ 5:**Không nắm vững “hệ trục trục tọa độ Đề các vuông góc” nên nhiều khi học sinh lấy đơn vị đo trên hai trục tọa độ khác nhau cho dễ vẽ đồ thị của một hàm số nào đó.

**Ví dụ 6:**Học sinh không nắm vững giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của nên khi tìm ra giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất, không tìm điều kiện xẩy ra dấu “=” của biến số, giả sử không tồn tại dấu “=” học sinh vẫn cứ kết luận tồn tại giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất. Chẳng hạn như:

(?): Cho . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Học sinh giải như sau:

(!):. Mâu thuẫn với giả thiết

Đối với bài toán này, do ràng buộc điều kiện nên ta không thể áp dụng bất đẳng thức Cauchy thông thường đối với hai số dương được. Bằng cách đoán thì S nhận giá trị nhỏ nhất, hay là *điểm rơi*. Lúc này ta sẽ giả định sử dụng bất đẳng thức Cauchy cho cặp số ( sao cho tại “điểm rơi a = 3” thì , tức là ta có lược đồ “điểm rơi” sau đây:

 .

Lời giải đúng: :

với a = 3 thì Min S = .

**Ví dụ 7:**Một sai lầm khác khi tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất là học sinh có khi xem giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất là *biểu thức chứa biến* và cho dấu bằng xẩy ra để suy ra giá trị cần tìm. Chẳng hạn, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

(?): Áp dụng Bất đẳng thức Côsi ta có với mọi

suy ra với mọi . Dấu “=” khi

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là .

(!): Nhầm lẫn giữa quy tắc này cho quy tắc kia, chẳng hạn: nhầm lẫn giữa quy tắc cộng và quy tắc nhân trong Đại số tổ hợp.

**Ví dụ 8:** Một lớp có 20 bạn nữ và 23 bạn nam. Cần chọn hai bạn nam và nữ đi tham dự đại hội đoàn trường, hỏi có bao nhiêu cách chọn?

(?): Học sinh giải như sau: Áp dụng quy tắc cộng cho rằng 20 + 23 = 43 cách chọn. Thực ra ở đây phải dùng quy tắc nhân và ta có 20. 23= 460 cách chọn. Ta thấy rằng nếu giáo viên chỉ chọn một bạn thì mới áp dụng quy tắc cộng.

**5. 2. Sai lầm liên quan đến sử dụng định lý**

 Cấu trúc thông thường của định lý có dạng AB trong đó A là giả thiết của định lý, B là kết luận của định lý. Sai lầm phổ biến khi học định lý do xem thường ngôn ngữ và các điều kiện của giả thiết A nên suy ra các kết luận sai lầm: không có A vẫn suy ra B; không có A suy ra không có B; sử dụng định lý tương tự chưa đúng. Không nắm vững kết luận B nên sử dụng B mà không nhớ A; có B suy ra có A; có A nhưng suy ra không phải B, mà chỉ chú trọng tới phương pháp giải Toán. Do đó trong quá trình áp dụng vào giải Toán học sinh hay áp dụng thiếu điều kiện hoặc sử dụng đúng nhưng không chính xác; sử dụng định lí như định nghĩa. Đặc biệt là những định lý học sinh bị “mất gốc” hoặc không hiểu bản chất nên khi sử dụng định lý không hiểu rõ phạm vi sử dụng của định lý.

**Ví dụ 1:** Tính tích phân I = 

(?): I = 

(!):Ta thấy rằng hàm số  gián đoạn tại x = 0  nên không sử dụng được công thức Niutơn – Lapnít để tính tích phân trên. Giả thiết của công thức Niutơn – Lapnít là hàm số y = f(x) liên tục trên [a; b] nên cách giải trên thiếu việc kiểm tra điều kiện áp dụng định lí. Thực ra tích phân trên không tồn tại.

**Ví dụ 2:** Giải hệ phương trình

(?): Xét hàm nên hàm số đồng biến do đó . Thay x = y vào hệ ta tìm được các nghiệm là: .

(!): Thực ra, ta có định lý: Nếu thì f(t) đồng biến trên (a; b). Nói cách khác ta có định lí nêu lên mối liên hệ giữa dấu của đạo hàm và sự đơn điệu của hàm số trên một khoảng (a; b). Không có định lí đề cập đến vấn đề đó trên một tập D bất kì, nói riêng khi D là hợp của hai khoảng rời nhau. Hơn nữa, trong Sách giáo khoa hiện hành cũng không có khái niệm hàm số đồng biến, nghịch biến trên một tập bất kỳ, mà chỉ có trên một khoảng, đoạn hay nửa khoảng thôi!

Ta lại xét tình huống học sinh gặp sai lầm như sau:

**Ví dụ 3:** Giải phương trình (1)

(?): Với điều kiện thì (1)

Xét hàm số

, suy ra hàm số đồng biến. Mà f(3) = 0 nên x = 3 là nghiệm duy nhất.

(!): Sai lầm ở chỗ: Hàm f(x) đồng biến trên và đồng biến trên , do đó phương trình f(x) = 0 có không quá một nghiệm trên và có không quá một nghiệm trên , chứ không phải phương trình f(x) = 0 có không quá một nghiệm trên . Như vậy do f(3) = 0 nên x = 3 là nghiệm duy nhất trên , ngoài ra f(x) = 0 vẫn có thể có nghiệm trên .

Sai lầm trong khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy để tìm trong bài toán chứng minh bất đẳng thức thường không giống nhau, với mỗi bài toán học sinh gặp các lỗi khác nhau. Cụ thể, ta phân tích ở các ví dụ sau:

**Ví dụ 4:** So sánh và 2

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số ta có:

đẳng thức xảy ra

(!): Học sinh đã không để ý đến điều kiện trong bất đẳng thức Cauchy áp dụng cho 2 số a và b là .

*Lời giải đúng:*

Ta có:

+ khi đó :

+ khi đó :

**Ví dụ 5:** Chứng minh rằng với mọi a ta có:

(?): Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số a và 1 - a ta có:

(!) Học sinh gặp sai lầm như đã phân tích ở ví dụ 1, tức là đã chỉ áp dụng định lí Cauchy cho 2 số a và b nếu a và b đều không âm. Ở đây, a và 1 – a không âm khi và chỉ khi .

**Ví dụ 6:** Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng

(?) Học sinh giải:

Phân tích: . Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số không âm: , ta có:

Vậy min B =

(!) Dấu hiệu "mỗi số hạng không âm" thỏa mãn, tuy nhiên dấu hiệu "tích không đổi" thỏa mãn. Tuy nhiên, với cách phân tích các số hạng của B như trên đẳng thức không xảy ra.

Tách đúng phải là .

Ở mức độ khó hơn, GV có thể ràng buộc thêm giả thiết , hãy tìm giá trị nhỏ nhất của .

Sẽ rất nhiều HS làm tương tự như bài toán trên, phân tích , nhưng tiếc rằng đẳng thức xảy ra tại . Lúc này GV có thể gợi ý như sau:

Hãy nhận xét giá trị của B khi cho  một giá trị rất gần số 0?! Cho thêm một số giá trị khác của *x* thuộc và tính giá trị B tại những điểm đó, so sánh với giá trị của B tại !

Với cách làm như vậy, HS sẽ dự đoán được rằng giá trị nhỏ nhất của B đạt được tại . GV gợi ý thêm để củng cố niềm tin cho HS khi liên tưởng đến bất đẳng thức Cauchy để tìm giá trị nhỏ nhất của B là hoàn toàn tự nhiên, nhưng áp dụng cho những số nào để đẳng thức xảy ra? Để ý rằng nên suy ra hay . Chúng ta cần phân tách B thành tổng các số hạng có thể *dư* ra lượng , lượng còn lại có tích không đổi.

.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số đầu tiên và đẳng thức xảy ra tại nên suy ra . Do đó táchB như sau: .

**Ví dụ 7:** Sai lầm trong viêc áp dụng các định lý về phép biến đổi tương đương

“Nếu cộng vào hai vế của một phương trình với cùng một hàm số mà không làm thay đổi tập xác định của phương trình đó thì ta được phương trình tương đương”

Điều cần chú ý ở đây là phép biến đổi không làm thay đổi điều kiện của phương trình.

Trong khi thực hiện phép biến đổi tương đương nhiều học sinh chỉ làm theo “*quán tính*” mà hoàn toàn không ý thức được việc biến đổi và cũng không hiểu cơ sở của phép biến đổi đó. Chính điều này tạo cơ sở cho những sai lầm trong biến đổi như sau:

 3x+

Phương trình đã cho có điều kiện còn khi thực hiện phép chuyển vế rút gọn , ta đã làm mất điều kiện nên phép biến đổi đó không phải là phép biến đổi tương đương. Do đó, xuất hiện nghiệm ngoại lai x = 0.

Hay như bài toán sau:

Giải phương trình:

(?):

(!): Phương trình vô nghiệm do biến đổi thừa điều kiện , tức là phép biến đổi cộng cả hai vế của phương trình với là không tương đương.

Việc nắm bắt kiến thức về phép biến đổi tương đương để giải phương trình, bất phương trình là điều không dễ đối với học sinh, đặc biệt là phép biến đổi bình phương hai vế thường dùng để giải phương trình, bất phương trình vô tỉ. Học sinh thường nhầm lẫn giữa phương trình hệ quả và phương trình tương đương.

**Ví dụ 8:** Khi giải phương trình (1) có học sinh thực hiện như sau:

(?): (1)

(!) Học sinh thực hiện phép biến đổi bình phương hai vế nhưng đã làm thay đổi tập xác định của phương trình (1), dẫn đến xuất hiện phương trình hệ quả. Vì thế đã không loại nghiệm x = 1.

**Ví dụ 9:** Sai lầm trong việc áp dụng hệ quả của định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục.

"Nếu hàm số liên tục trên đoạn [a; b] và thì tồn tại ít nhất một điểm sao cho " [79, tr. 171].

Chẳng hạn, xét hàm số

Ta có , nhưng giả thiết f liên tục trên đoạn [-1; 1] không thỏa mãn. Do đó, không thể kết luận phương trình  có nghiệm trên . Vận dụng định lí máy móc, đưa ra những điều kiện không cần thiết chẳng hạn, trong bài toán về tam thức bậc hai “Tìm điều kiện để f(x) = (a) có hai nghiệm phân biệt ”, học sinh thường đưa ra điều kiện thỏa mãn bài toán như sau: . Trong hệ điều kiện này, điều kiện đã bị thừa. Sự “thừa” này tuy không sai nhưng nhiều khi gặp phải những cồng kềnh thì có thể chấp nhận thất bại ngay chỗ đó. Nói cách khác, lẽ ra không cần xử lí điều kiện thì đằng này lại hướng vào việc giải điều kiện , mà nhiều khi điều này lại không vượt qua nổi, cho nên ta chấp nhận bỏ cuộc

**6. Sai lầm liên quan đến chuyển đổi bài toán**

 Khi đặt ẩn phụ thường lãng quên đặt điều kiện của ẩn phụ, và cho rằng, phương trình f(x) = 0 có nghiệm khi và chỉ khi phương trình g(t) = 0 có nghiệm, trong đó g(t) là biểu thức thu được từ f(x) thông qua một phép đặt ẩn phụ  nào đó. Nói cách khác, nếu phương trình xuất phát có dạng f[g(x)] thì học sinh thường đặt t = g(x) để đưa về phương trình f(t) = 0, và quan niệm rằng, phương trình f[g(x)] = 0 có nghiệm khi và chỉ khi f(t) = 0 có nghiệm.

**Ví dụ 1:**Giải phương trình

(?): Đặt , phương trình trở thành

 .

(!): Học sinh sai lầm khi không đặt điều kiện cho ẩn t, sau đó giải theo quán tính hay theo thói quen học sinh lại tiếp tục sai lầm khi viết logarit của số âm.

**Ví dụ 2:** Tìm m để phương trình: có nghiệm.

(?): Phương trình (1) 

Đặt , (!)

Phương trình (1) trở thành

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm

(!): Sai lầm của học sinh trong bài toán này là điều kiện ở trên chưa phải là điều kiện đủ với t, điều kiện của t phải là

Khi đặt ẩn phụ, mặc dù có đặt điều kiện, nhưng điều kiện quá hẹp hoặc quá rộng không sát, đặt ẩn phụ t =  để đưa phương trình về ẩn t, tuy nhiên học sinh chỉ đưa ra một điều kiện cần đối với t, chứ không phải là điều kiện cần và đủ.

(!): Ngoài sai lầm do đặt điều kiện ẩn phụ không chính xác thì trong khi giải phương trình, bất phương trình bằng phương pháp đặt ẩn số phụ, học sinh thường gặp sai lầm trong phát biểu chuyển đổi yêu cầu bài toán từ ẩn ban đầu sang ẩn phụ. Một sai lầm phổ biến đó là học sinh thường mang yêu cầu bài toán đối với ẩn ban đầu sang áp dụng cho ẩn phụ. Chẳng hạn:

**Ví dụ 3:** Giải bất phương trình

 (?): Bài này với học sinh kém thì họ bình phương hai vế một cách không ngần ngại. Có những học sinh khá hơn lập luận rằng: Bất phương trình tương đương với

 .

(!): Sở dĩ học sinh lập luận như trên bởi vì họ nghĩ, với bất phương trình dạng , điều kiện của x là f(x) ≥ 0. Do vế trái không âm, mà vế phải không nhỏ hơn vế trái nên vế phải cũng không âm. Vì vậy hai vế đều không âm, ta có quyền bình phương hai vế để được bất phương trình tương đương . Với lập luận như thế, họ đã tìm được hoặc . Thực ra, không thể thỏa mãn bất phương trình ban đầu bởi với tồn tại giá trị sao cho 2x – 7 < 0.

Nguyên nhân sai lầm “vế trái ≥ 0, vế trái ≤ vế phải vế phải ≥ 0” điều này chỉ đúng đối với những x là nghiệm của bất phương trình, do đó  là tương đương với hệ  trên tập nghiệm của bất phương trình chứ không phải là tương đương trên tập xác định.

**Ví dụ 4:** Giải bất phương trình

(?): Bất phương trình

Phép biến đổi đã bỏ sót nghiệm x = 1.

(!): Bất phương trình

Một số sai lầm khi học sinh chuyển đổi từ biến này sang biến khác mà không tìm miền giá trị của biến mới.

**Ví dụ 5:** Tìm cực trị của hàm số

(?): Đặt

Xét

(!): Nguyên nhân sai lầm: do tìm điểm cực trị theo x nên khi đổi biến số và lấy đạo hàm thì cần sử dụng công thức đạo hàm cho hàm hợp: .

**Ví dụ 6:** Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

(?): Một số học sinh giải như sau:

đặt x; hàm số viết lại ,

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên  không tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

(!): Sai lầm: Học sinh đã chuyển về bài toán không tương đương cho rằng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của f(x) trùng với giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của g(t),  nên sau khi đổi biến đã không tìm miền xác định của g(t).

Lời giải đúng:

Ta có:

**

Qua một số ví dụ và phân tích sai lầm ở trên chúng ta nhận thấy học sinh chưa nắm rõ bản chất của định nghĩa dẫn đến không nắm vững kiến thức cơ bản liên quan đến giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

**7. Sai lầm liên quan đến chủ nghĩa hình thức**

Theo nhà toán học A. Ia. Khinsin, chủ nghĩa hình thức trong nhận thức của học sinh thường bắt nguồn từ chỗ: “Trong ý thức học sinh có sự phá vỡ nào đó mối quan hệ tương hỗ, đúng đắn giữa nội dung bên trong của sự kiện toán học và cách diễn đạt bên ngoài của sự kiện ấy”.

**Ví dụ 1:** Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x1 và x2 thỏa mãn

 (?): Học sinh cho rằng x2 là nghiệm lớn còn x1 là nghiệm nhỏ nên sau khi tìm được điều kiện có nghiệm đã tìm từng nghiệm rồi thay vào hệ thức cho trong bài toán, với suy nghĩ như vậy làm mất vai trò bình đẳng giữa hai nghiệm, thực chất hai nghiệm có vai trò như nhau, x1, x2 chỉ là kí hiệu hình thức, hơn nữa nếu các nghiệm có chứa căn bậc hai thay vào được phương trình vô tỷ, rất dễ học sinh giải sai khi phương trình phức tạp.

(!): Phương trình có hai nghiệm phân biệt (\*)

Theo Định lí Viét và giả thiết thì x1, x2 thỏa mãn

 Giải hệ và so sánh với (\*) tìm được m cần tìm là m = 3 hoặc

 **Ví dụ 2:** Giải bất phương trình

(?): Học sinh bị hình thức của bài toán che khuất nên sau một thời gian biến đổi không tìm ra hướng giải quyết.

(!): Chỉ cần chú ý một chút ta có:

Nếu và luôn đúng

Nếu và mẫu thuẫn với giả thiết

Vậy nghiệm của bất phương trình là .

**Ví dụ 3:** Học sinh bị ảnh hưởng bởi hình thức nên cho rằng –x là số âm và tương tự như vậy có dấu trừ đằng trước là nhỏ hơn 0, nên học sinh không chấp nhận khi viết vì cho rằng biểu thức dưới căn bậc hai là âm.

 **Ví dụ 4:**Giải và biện luận phương trình

(!): Học sinh khó khăn không giải được dạng toán này vì phương trình bậc ba tổng quát đối với họ là không có thuật giải. Khi được giáo viên gợi ý xem phương trình trên là phương trình bậc hai đối với ẩn a và tạm xem x là tham số thì học sinh vẫn phân vân với kiểu trao đổi vai trò của ẩn và tham số cho nhau. Nhưng thực ra nếu đưa phương trình về ẩn a ta được phương trình:

 Khi đó bài toán được giải dễ dàng hơn, chỉ cần giải và biện luận . Cách giải trên có được chính là nhờ cách nhìn linh hoạt, không hình thức, nhìn rõ đúng bản chất từng vai trò của mỗi kí hiệu trong phương trình.

 Cũng chính sai lầm như vậy nên học sinh có thể giải được hệ phương trình 3 ẩn x, y, z nhưng không giải được hệ có dạng như thế với các ẩn a, b, c, chẳng hạn: Giải hệ phương trình ẩn x, y, z , học sinh không biết đổi vai trò giữa ẩn và tham số để giải.

**8. Những sai lầm liên quan đến suy luận**

 Suy luận là một trong những hình thức của tư duy. Suy luận là một quá trình suy nghĩ để rút ra một mệnh đề mới từ một hoặc nhiều mệnh đề đã cho. Một suy luận thường có cấu trúc logic , trong đó A là tiền đề, B là kết luận. Cấu trúc logic phản ánh cách thức rút ra kết luận tức là cách lập luận. Học sinh thiếu kiến thức về logic, sử dụng mệnh đề sai hoặc ngộ nhận là mệnh đề đúng, đánh tráo luận đề sẽ mắc sai lầm trong suy luận. Sai lầm trong suy luận khi giải Toán có các kiểu sai lầm sau:

**8. 1. Sai lầm về luận cứ**

Sai lầm thuộc loại này là do trực giác: dựa vào các mệnh đề sai do ngộ nhận, hoặc mệnh đề chưa được chứng minh là đúng, hoặc dựa vào mệnh đề tương đương với mệnh đề cần chứng minh.

**Ví dụ 1:** Tìm m để f(x) =  

(?): Để f(x) ≥ 0 .

 (!): Kết quả trên tuy đúng nhưng là đúng một cách ngẫu nhiên. Về nguyên tắc ta phải xét riêng trường hợp hệ số bậc 2 bằng 0. Chỉ khi nó khác 0 ta mới được dùng mệnh đề trên.

**Ví dụ 2:** Giải hệ bất phương trình: (1)

(?) Sai lầm thường gặp:

1. .

(!): Với thì (1) nghiệm đúng, nên là nghiệm của (1).

Cách giải trên đã làm mất nghiệm của hệ phương trình.

Lời giải đúng:

(1)

**Ví dụ 3:** Tìm a để tập nghiệm trùng nhau.

**(?**): Ta có:

Do đó, yêu cầu bài toán .

(!): Học sinh đã không xét đến tính chất của hàm số là có tập giá trị [0; 1]

(!): Yêu cầu bài toán .

**Ví dụ 4:** Tính giới hạn

Một số học sinh thực hiện:

(!): Cách giải trên đã sai lầm khi coi . Bài toán này phải xét giới hạn trái và giới hạn phải tại x = 0. Ta tính được .

Do đó, giới hạn không tồn tại.

**8. 2. Sai lầm về luận chứng**

Sai lầm này chủ yếu sai lầm về suy luận không logic

**Ví dụ 1**: Giải phương trình (\*)

Sai lầm thường gặp: (\*) !

(!): Nguyên nhân sai lầm: với thì mẫu thức nên là nghiệm ngoại lai.

**Ví dụ 2:** Giải phương trình:

(?):

(!): Phép biến đổi từ thành là không tương đương, tuy rằng kết quả vẫn đúng.

**Ví dụ 3:** Kinh nghiệm cho thấy trong việc chứng minh bất đẳng thức, học sinh thường mắc sai lầm sau đây: Xuất phát từ bất đẳng thức phải chứng minh, họ thực hiện một loạt phép biến đổi và sau cùng đi tới một bất đẳng thức quen thuộc, chẳng hạn, chứng minh Bất đẳng thức Cauchy với hai số a, b không âm thì

Học sinh lập luận như sau: Bình phương hai vế của bất đẳng thức (1) ta được:

Nhân hai vế của (2) với 4 ta được (a + b)2 ≥ 4ab. Chuyển vế phải sang vế trái, ta có: (a + b)2 – 4ab = (a - b)2 ≥ 0. Vì bất đẳng thức (a - b)2 ≥ 0 là đúng nên bất đẳng thức (1) cũng đúng.

Lập luận như trên của học sinh, về mặt logic, chưa phải là một phép chứng minh. Đó chỉ là một cố gắng để tìm đường lối chứng minh. Nếu ta kí hiệu các mệnh đề kế tiếp ở trên là: ; ;

; 0.

lập luận trên được mô tả như sau: . Để chứng minh bất đẳng thức (1) cần lập luận theo chiều ngược lại, tức là chứng minh theo dãy kéo theo sau: .

Học sinh hay vận dụng các quy tắc suy luận sai nên: khi chứng minh phản chứng không biết phủ định một mệnh đề, nếu biết phủ định thì không phủ định hoàn toàn xét thiếu trường hợp, như lấy “lớn hơn” để mẫu thuẫn với “bằng nhau” là sai lầm bỏ sót, còn nếu lấy “không bằng nhau” hoặc “nhỏ hơn” lại phạm sai lầm “trùng lặp”, có nhiều cụm từ “nhiều nhất”, “ít nhất” gây nhiễu cho học sinh không biết nên phủ định thế nào, nhất là các mệnh đề chứa lượng từ với mọi, tồn tại.

Nhiều khi biết phải dẫn tới mâu thuẫn thì mới kết thúc chứng minh, nhưng học sinh chỉ nghĩ tới mâu thuẫn với giả thiết chứ không nghĩ rằng, có thể mâu thuẫn với một định lí, tiên đề, một kết luận đã chứng minh đúng, hoặc là dẫn đến hai mâu thuẫn lẫn nhau, không biết kết hợp cùng giả thiết dẫn tới mâu thuẫn với một chân lí khác. Trong quá trình chứng minh phản chứng, học sinh xem thường khi kết luận cuối cùng nên dễ sai lầm khi kết luận: lấy kết luận trung gian thay thế cho kết luận cuối cùng hoặc dùng một kết luận bộ phận thay thế cho kết luận toàn bộ.

Nhiều học sinh không hiểu đâu là điều kiện cần, điều kiện đủ. Trong bài sử dụng kí hiệu  một cách tùy tiện, đặc biệt là phép toán kéo theo lại là nguyên nhân dẫn tới nhiều sai lầm. Sự thiếu hiểu biết về các quy tắc suy luận nên dẫn tới sai lầm trong lí luận và chứng minh, có học sinh cho rằng: Nếu dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn, mà dãy số có giới hạn nên dãy số phải tăng và bị chặn trên. Ngay việc sử dụng từ nối “hoặc”, “và” vẫn là điều khó khăn của rất nhiều học sinh. Chẳng hạn, khi biến đổi phương trình tích A. B = 0, học sinh vẫn viết A = 0 và B = 0.

 Không nắm vững mối quan hệ giữa phép phủ định và các lượng từ  nên học sinh dễ phát biểu sai các mệnh đề và nhiều khi dẫn đến các chứng minh sai, hoặc khó khăn trong chứng minh. Chẳng hạn, để chứng minh phương trình có nghiệm, học sinh nghĩ tới điều kiện để phương trình có nghiệm, ít để ý là cần chỉ ra một nghiệm là đủ. Thậm chí, khi giáo viên chỉ một nghiệm rõ ràng mà học sinh vẫn chưa chịu đó là phép chứng minh (cứ tưởng phép chứng minh phải là một lí luận gì đó thật ghê gớm!), hoặc như chứng minh hàm số  không có tiệm cận, thì học sinh không biết làm như thế nào.

**IV. HIỆU QUẢ MANG LẠI CỦA ĐỀ TÀI**

- Đề tài được thiết kế cho giáo viên nhằm giúp giáo viên có cái nhìn chiều sâu hơn về nhận thức toán học cũng như tư duy logic của học sinh trong quá trình giải toán. Từ đó, giáo viên có thể dự đoán và có biện pháp sửa chữa sai lầm của học sinh trong dạy học các nội dung cụ thể.

- Đối tượng để áp dụng là học sinh đại trà, có khả năng học toán từ trung bình trở lên.

- Kết quả đạt được: Sau khi bản thân nghiên cứu đề tài, đồng thời triển khai đề tài vận dụng vào dạy toán thì các em học sinh hạn chế tối đa tình trạng giải sai, “sai lầm nối tiếp sai lầm”, tăng cường tính tích cực và độc lập cho học sinh trong tư duy cũng như quá trình vận dụng kiến thức vào thực tiễn.

**C. KẾT LUẬN**

**I. NHỮNG BÀI HỌC KINH NGHIỆM**

Để đề tài mang lại hiệu quả cao hơn thì cần phải bổ sung những mảng kiến thức liên kết sâu sát hơn với thực tiễn, mang tính “lối mòn”, phân dạng bài toán cụ thể, chi tiết hơn nữa và đối với mỗi dạng cần nêu kinh nghiệm giải. Bên cạnh đó, phải nêu được lời giải đúng chi tiết.

**II. Ý NGHĨA CỦA ĐỀ TÀI**

Các sai lầm của học sinh khi giải Toán còn tương đối phổ biến. Những sai lầm này được ***nhìn nhận từ góc độ các hoạt*** ***động toán học***, đồng thời phân tích những nguyên nhân chủ yếu dẫn đến các khó khăn, và sai lầm đó;

Từ đó giúp học sinh hình thành được phương pháp và kỹ năng giải toán góp phần phòng tránh và sửa chữa các sai lầm của học sinh khi giải Toán, đồng thời góp phần quan trọng vào việc nâng cao hiệu quả dạy học môn Toán ở trường Trung học phổ thông.

**III. KHẢ NĂNG ỨNG DỤNG VÀ TRIỂN KHAI**

Đề tài dùng để rèn luyện các kỹ năng giải toán cho học sinh ở cấp THPT để các em đạt điểm tối đa khi tham gia kỳ thi THPT Quốc gia

Hướng phát triển của đề tài: Bổ sung thêm các bài toán khó, đa dạng, mang tính ứng dụng và gắn liền với thực tiễn hơn đồng thời đề xuất một số biện pháp sư phạm nhằm góp phần hạn chế sai lầm của học sinh trong dạy học Toán.

**IV. NHỮNG KIẾN NGHỊ, ĐỀ XUẤT**

 Đề tài này tôi viết với tinh thần trách nhiệm cao, mong muốn phần nào giúp thầy cô dạy Toán, các em học sinh THPT có tài liệu tham khảo và học tập, cũng hi vọng các thầy giáo, cô giáo và các em tìm thấy nhiều bổ ích, lí thú ở đề tài. Tuy nhiên đề tài chắc chắn sẽ không thoát khỏi thiếu sót. Tôi rất mong nhận được sự động viên, đóng góp chân thành của quý thầy cô và các em để đề tài được phong phú hơn, hoàn thiện hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

**TÀI LIỆU THAM KHẢO**

1**.** Trần Văn Hạo (Tổng Chủ biên) – Vũ Tuấn (Chủ biên), Doãn Minh Cường – Đỗ Mạnh Hùng – Nguyễn Tiến Tài (2012), Đại số 10, NXB Giáo dục.

2. Trần Văn Hạo (Tổng Chủ biên) – Vũ Tuấn (Chủ biên), Doãn Minh Cường – Đào Ngọc Nam – Lê Văn Tiến – Vũ Viết Yên (2013), giải tích 11, NXB Giáo dục.

3. Trần Văn Hạo (Tổng Chủ biên) – Vũ Tuấn (Chủ biên), Lê Thị Thiên Hương – Nguyễn Tiến Tài – Cấn Văn Tuất (2013), giải tích 12, NXB Giáo dục.

4. Nguyễn Thi Mỹ Hằng – Phạm Xuân Chung – Trương Thị Dung (2016), Rèn luyện các thao tác tư duy cho học sinh trong dạy học môn Toán ở trường THPT, NXB Đại học Sư phạm.

5. Nguyễn Bá Kim (2002), Phương pháp dạy học môn Toán, NXB Đại học sư phạm.

6. Lê thống Nhất (1996), Rèn luyện năng lực giải Toán cho học sinh phổ thông trung học thông qua việc phân tích và sửa chữa sai lầm của học sinh khi giải Toán, Luận án Phó tiến sĩ khoa học Sư phạm – Tâm lí, Trường Đại học sư phạm Vinh, Vinh.

7. Các tài liệu trên mạng Internet.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_