

ĐỀ SỐ 6- A1K75 THPT NGUYỄN XUÂN ÔN

Câu 1. (5,0 điểm)

1. Tính tổng các nghiệm của phương trình sau trên $[0; 100\pi]$

$$\frac{2\sin 2x - \cos 2x - 5\sin x + 2\cos x - 2}{2\cos x + \sqrt{3}} = 0.$$

2. Cho hàm số $y = \sqrt{\frac{2(\sin^4 x + \cos^4 x) - \cos^2 x - m}{2\sin x \cos x + 2\cos^2 x - 3}}$, (m là tham số thực).

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số trên xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Cho $n > 3$, $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $\frac{C_{n+1}^{n+1}}{n(n+1)} + \frac{C_{n+2}^{n+1}}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{C_{n+2018}^{n+1}}{(n+2017)(n+2018)} = \frac{C_{2026}^9}{90}$.

Tìm hệ số của số hạng chứa x^n trong khai triển biểu thức $(1+2x)^{n+3} \left(\frac{1}{4} + x + x^2 \right)^3$ thành đa thức.

2. Cho X là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau mà tổng các chữ số bằng 18. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp X , tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

Câu 3. (2,0 điểm) Cho dãy số (u_n) được xác định như sau $\begin{cases} u_1 = 4 \\ 9u_{n+1} = u_n + 4 + 4\sqrt{1+2u_n} \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*.$

Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Câu 4. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp trong đường tròn (C) có tâm O và điểm G sao cho $3\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AO}$. Gọi D là điểm thay đổi trên đường tròn (C) . Gọi M, I lần lượt là trung điểm của AD và OM . Tìm tập hợp điểm I khi D thay đổi trên đường tròn (C) .

Câu 5. (5,0 điểm) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm là G , $AB = AD = AA' = a$ và $\widehat{BAD} = 120^\circ$, $\widehat{DAA'} = 90^\circ$, $\widehat{BAA'} = 60^\circ$.

1. Một mặt phẳng (α) đi qua điểm M thuộc cạnh BC (M khác B và C), song song với mặt phẳng $(A'BD)$ và cắt hình hộp theo thiết diện là đa giác có diện tích bằng $\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$. Tìm vị trí điểm M .

2. Trên các đoạn $C'A', C'B, C'D$ lần lượt lấy các điểm A_1, B_1, D_1 (khác C') sao cho bốn điểm A_1, B_1, D_1, G luôn đồng phẳng. Đặt $C'A' = x.C'A_1$, $C'B = y.C'B_1$, $C'D = z.C'D_1$. Tính chu vi của tam giác $A_1B_1D_1$ theo a khi biểu thức $P = xy + yz + zx$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 6. (2,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz + x + z = y$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{2}{x^2 + 1} - \frac{2}{y^2 + 1} - \frac{4z}{\sqrt{z^2 + 1}} + \frac{3z}{(z^2 + 1)\sqrt{z^2 + 1}}$.

---HẾT---

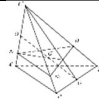
Câu	ý	Nội dung	Điểm
1. (5,0 đ)	1. (2,5 đ)	Điều kiện: $\cos x \neq -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{5\pi}{6} + m2\pi, m \in \mathbb{Z}.$	0,25
		PT $\Rightarrow 2 \sin 2x - \cos 2x - 5 \sin x + 2 \cos x - 2 = 0$ $\Leftrightarrow 2 \cos x (2 \sin x + 1) + 2 \sin^2 x - 5 \sin x - 3 = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow 2 \cos x (2 \sin x + 1) + (2 \sin x + 1)(\sin x - 3) = 0$ $\Leftrightarrow (2 \sin x + 1)(2 \cos x + \sin x - 3) = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ 2 \cos x + \sin x - 3 = 0 \end{cases}$	0,25
		+) $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$	0,25
		+) $2 \cos x + \sin x - 3 = 0$ (Phương trình vô nghiệm).	0,25
		Đối chiếu với điều kiện $\Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$	0,25
		Vì $x \in [0; 100\pi] \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq -\frac{\pi}{6} + k2\pi \leq 100\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq k \leq 50 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$	0,25
		Suy ra có 50 nghiệm trên $[0; 100\pi]$ lập thành một cấp số cộng với $x_1 = \frac{11\pi}{6}; d = 2\pi$	0,25
		Tổng các nghiệm $S_{50} = \frac{50}{2} \left[2 \cdot \frac{11\pi}{6} + 49 \cdot 2\pi \right] = \frac{7625\pi}{3}.$	0,25
	2. (2,5 đ)	Vì $2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 3 = \sin 2x + \cos 2x - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$	0,5
		Nên hàm số xác định $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow 2(\sin^4 x + \cos^4 x) - \cos^2 x - m \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$	0,25
		$\Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right) - \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) - m \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$	0,25

		$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 2m + 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x \leq 2m - 1, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$	
		Đặt $t = \cos 2x, t \in [-1; 1]$ Khi đó $(1) \Leftrightarrow 2t^2 - t \leq 2m - 1, \forall t \in [-1; 1] \quad (2)$	0,25
		Xét hàm số $f(t) = 2t^2 - t, t \in [-1; 1]$ Bảng biến thiên 	0,5
		Khi đó $(2) \Leftrightarrow 2m - 1 \geq f(t), \forall t \in [-1; 1]$ Từ bảng biến thiên $\Rightarrow 2m - 1 \geq 3$	0,5
		$\Leftrightarrow m \geq 2$ Kết luận $m \geq 2$.	0,25
2. (4,0 đ)	1. (2,0đ)	Xét $\frac{C_k^{n+1}}{(k-1)k} = \frac{1}{(k-1)k} \cdot \frac{k!}{(n+1)![k-(n+1)]!} \quad (k \geq n+1)$	0,25
		$= \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{(k-2)!}{(n-1)![k-2-(n-1)]!} = \frac{1}{n(n+1)} C_{k-2}^{n-1}$	0,25
		Suy ra $VT = \frac{1}{n(n+1)} [C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1} + C_{n+1}^{n-1} + \dots + C_{n+2016}^{n-1}]$	0,25
		Áp dụng công thức $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1} \Rightarrow C_n^k = C_{n+1}^{k+1} - C_n^{k+1}$	0,5
		Có $VT = \frac{1}{n(n+1)} [C_{n-1}^{n-1} + (C_{n+1}^n - C_n^n) + (C_{n+2}^n - C_{n+1}^n) + \dots + (C_{n+2017}^n - C_{2016}^n)]$	
		$= \frac{1}{n(n+1)} C_{n+2017}^n = \frac{C_{9+2017}^9}{9 \cdot 10} \Rightarrow n = 9.$	0,25
		Ta có $P(x) = \frac{1}{2^6} \cdot (1+2x)^{18} = \frac{1}{2^6} \sum_{k=0}^{18} C_{18}^k \cdot 2^k \cdot x^k \Rightarrow k = 9$	0,25
		Hệ số của số hạng chứa x^9 là $2^3 C_{18}^9 = 8C_{18}^9$.	0,25
	2. (2,0đ)	Gọi số có 6 chữ số khác nhau là $\overline{abcdef}$	0,25

	Mà tổng các chữ số bằng 18 nên tập $\{a, b, c, d, e, f\}$ là 1 trong các tập hợp sau: $\{0, 1, 2, 3, 4, 8\}; \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}; \{0, 1, 2, 4, 5, 6\}$.	
	Ứng với mỗi trường hợp có 5 cách chọn chữ số a , các chữ số còn lại có 5! cách chọn	0,25
	$\Rightarrow$ có $3.5.5! = 1800$ số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau mà tổng bằng 18. $\Rightarrow n(\Omega) = 1800$.	0,25
	Gọi A : " Số tự nhiên được chọn là số chẵn" $\Rightarrow \bar{A}$: " Số tự nhiên được chọn là số lẻ"	0,25
	TH1: $a, b, c, d, e, f \in \{0, 1, 2, 3, 4, 8\} \Rightarrow$ có $2.4.4! = 192$ (số).	
	TH2: $a, b, c, d, e, f \in \{0, 1, 2, 3, 5, 7\} \Rightarrow$ có $4.4.4! = 384$ (số).	0,25
	TH3: $a, b, c, d, e, f \in \{0, 1, 2, 4, 5, 6\} \Rightarrow$ có $2.4.4! = 192$ (số). Suy ra $n(\bar{A}) = 768$	0,25
3. (2,0đ)	$\Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)} = \frac{32}{75}$.	0,25
	Vậy $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{43}{75}$.	0,25
	Ta có $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $9u_{n+1} = u_n + 4 + 4\sqrt{1 + 2u_n}$	0,25
	$\Leftrightarrow 18u_{n+1} = 2u_n + 8 + 8\sqrt{1 + 2u_n}$ $\Leftrightarrow 9(1 + 2u_{n+1}) = (\sqrt{1 + 2u_n} + 4)^2$	0,25
	$\Leftrightarrow 3\sqrt{1 + 2u_{n+1}} = \sqrt{1 + 2u_n} + 4$ $\Leftrightarrow 3(\sqrt{1 + 2u_{n+1}} - 2) = \sqrt{1 + 2u_n} - 2$	0,25
	Đặt $v_n = \sqrt{1 + 2u_n} - 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ Ta có $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*$	0,25

		$\Rightarrow$ dãy số (v_n) là một cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{3}$, số hạng đầu $v_1 = 1$.	0,25
		$\Rightarrow v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$	0,25
		$\Rightarrow u_n = \frac{(v_n + 2)^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^{2n-2}} + \frac{4}{3^{n-1}} + 3 \right)$.	0,25
		Kết luận $u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^{2n-2}} + \frac{4}{3^{n-1}} + 3 \right), \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,25
4. (2,0đ)			
		Ta có $3\vec{AG} = 2\vec{AO} \Rightarrow G$ là trọng tâm ΔABC .	0,25
		$\Rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$	0,25
		$\Rightarrow \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = 3\vec{IG}$ (1)	0,25
		M, I lần lượt là trung điểm của AD và OM .	0,25
		$\Rightarrow \vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} + \vec{ID} = \vec{0}$ (2)	
		Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3\vec{IG} + \vec{ID} = \vec{0}$	0,25
		$\Leftrightarrow \vec{GI} = \frac{1}{4} \vec{GD}$	0,25
		$\Rightarrow I$ là ảnh của điểm D qua phép vị tự tâm G tỉ số $k = \frac{1}{4}$	0,25
		Mà $D \in (C) \Rightarrow I \in (C')$ là ảnh của đường tròn (C) qua $V_{\left(G; \frac{1}{4}\right)}$.	0,25
5. (5,0đ)	1. (3,5đ)		
		Dựng thiết diện của mp(α) cắt hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ +) Trong mp($ABCD$), vẽ đường thẳng qua M song song với BD cắt CD, AB, AD lần lượt tại N, J và K .	0,5
		+) Trong mp($ADD'A'$), vẽ đường thẳng qua K song song với $A'D$ cắt $D'D, D'A', AA'$ lần lượt tại P, Q và I .	0,5

+) Trong mp($ABB'A'$), đường thẳng IJ cắt $A'B', BB'$ lần lượt tại R và S .	0,25
Thiết diện là lục giác $MNPQRS$.	0,25
Do các mặt đối diện của hình hộp song song nên $MN \parallel RQ \parallel BD$; $NP \parallel RS \parallel A'B$; $SM \parallel PQ \parallel A'D$.	0,25
$\Rightarrow$ Các tam giác $IJK, A'BD, IRQ, SJM, PNK$ đồng dạng.	0,25
* Chứng minh: $\Delta MJS = \Delta NKP = \Delta QRI$ Ta có: +) $\frac{MJ}{MN} = \frac{MB}{MC} = \frac{ND}{NC} = \frac{NK}{MN} \Rightarrow MJ = NK$ +) $SPNJ$ là hình bình hành $\Rightarrow SJ = PN$ +) $SPKM$ là hình bình hành $\Rightarrow SM = PK$ Suy ra $\Delta MJS = \Delta NKP$ (c.c.c) Tương tự có $\Delta NKP = \Delta QRI$ (c.c.c) $\Rightarrow \Delta MJS = \Delta NKP = \Delta QRI$	0,25
* Có $AB = AD = AA' = a$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ, \widehat{DAA'} = 90^\circ, \widehat{BAA'} = 120^\circ$. $\Rightarrow A'B = a, A'D = a\sqrt{2}, BD = a\sqrt{3} \Rightarrow \Delta A'BD$ vuông tại A. Đặt $S_1 = S_{\Delta RQ} = S_{\Delta JMS} = S_{\Delta NPK}, S_2 = S_{\Delta IJK}, S = S_{\Delta A'BD} = a^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,25
Đặt $\frac{BM}{BC} = m, (0 < m < 1)$. Có $\frac{S_1}{S} = \left(\frac{JM}{BD}\right)^2 = \left(\frac{BM}{AD}\right)^2 = \left(\frac{BM}{BC}\right)^2 = m^2 \Rightarrow S_1 = m^2 \cdot S$	0,25
$\frac{S_2}{S} = \left(\frac{JK}{BD}\right)^2 = \left(\frac{JM + MK}{BD}\right)^2 = \left(\frac{JM}{BD} + \frac{MK}{BD}\right)^2 = (m+1)^2 \Rightarrow S_2 = (m+1)^2 \cdot S$	0,25
$\Rightarrow$ Diện tích thiết diện $S = S_2 - 3S_1 = (-2m^2 + 2m + 1) \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} = \frac{3a^2 \sqrt{2}}{4}$.	0,25
$\Rightarrow m = \frac{1}{2}$. Vậy M là trung điểm của BC .	0,25



Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của $A'C', BD$

$\Rightarrow G$ là trung điểm của OO'

$\Rightarrow G$ là trọng tâm của tứ diện $C'A'BD$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{C'G} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{C'A'} + \overrightarrow{C'B} + \overrightarrow{C'D}) \quad (1)$$

0,25

Vì A_1 nằm trong đoạn $C'A'$ và $C'A' = x.C'A_1 \Rightarrow \overrightarrow{C'A'} = x.\overrightarrow{C'A_1}$

Tương tự ta có $\overrightarrow{C'B} = y.\overrightarrow{C'B_1}; \overrightarrow{C'D} = z.\overrightarrow{C'D_1}$

0,25

2.

(1,5đ)

$$\text{Nên } (1) \Leftrightarrow \overrightarrow{C'G} = \frac{1}{4}(x.\overrightarrow{C'A_1} + y.\overrightarrow{C'B_1} + z.\overrightarrow{C'D_1})$$

Lại có A_1, B_1, D_1, G đồng phẳng nên $\frac{1}{4}(x + y + z) = 1 \Leftrightarrow x + y + z = 4$.

0,25

Mặt khác $16 = (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$

0,25

Suy ra $P = xy + yz + zx \leq \frac{16}{3}$

0,25

$$\Rightarrow \max P = \frac{16}{3} \text{ khi } x = y = z = \frac{4}{3}$$

Khi đó $\Delta A_1 B_1 D_1$ có

$$A_1 B_1 = \frac{3}{4} A'B = \frac{3}{4} a, B_1 D_1 = \frac{3}{4} BD = \frac{3\sqrt{3}}{4} a, A_1 D_1 = \frac{3}{4} A'D = \frac{3\sqrt{2}}{4} a$$

0,25

Vậy chu vi của tam giác $\Delta A_1 B_1 D_1$ bằng $\frac{3}{4}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})a$.

6.

(2,0đ)

Đặt $x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C, \left(0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\text{Có } x = \frac{y - z}{1 + yz} \Leftrightarrow \tan A = \frac{\tan B - \tan C}{1 + \tan B \tan C} = \tan(B - C) \Leftrightarrow A = B - C + k\pi.$$

0,25

$$\text{Do } -\frac{\pi}{2} < A - B + C < \pi \Rightarrow k = 0 \Rightarrow A = B - C \Leftrightarrow A - B = -C.$$

	$P = 2 \left(\frac{1}{1 + \tan^2 A} - \frac{1}{1 + \tan^2 B} \right) - \frac{4 \tan C}{\sqrt{1 + \tan^2 C}} + \frac{3 \tan C}{(1 + \tan^2 C) \sqrt{1 + \tan^2 C}}$ $= 2(\cos^2 A - \cos^2 B) - 4 \sin C + 3 \sin C \cos^2 C$	0,25
	$= \cos 2A - \cos 2B - 4 \sin C + 3 \sin C \cos^2 C$ $= -2 \sin(A + B) \sin(A - B) - 4 \sin C + 3 \sin C \cos^2 C$ $= 2 \sin C \sin(A + B) - 4 \sin C + 3 \sin C \cos^2 C$	0,25
	$\leq 2 \sin C - 4 \sin C + 3 \sin C \cos^2 C$ $\leq \sin C(3 \cos^2 C - 2) = \sin C(1 - 3 \sin^2 C)$	0,25
	* Nếu $\sin C > \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow P < 0$	0,25
	* Nếu $\sin C \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $P \leq \frac{\sqrt{\sin^2 C (1 - 3 \sin^2 C)^2} = \sqrt{6 \sin^2 C (1 - 3 \sin^2 C)(1 - 3 \sin^2 C)}}{\sqrt{6}}$ $\leq \frac{\sqrt{\left(\frac{6 \sin^2 C + 1 - 3 \sin^2 C + 1 - 3 \sin^2 C}{3} \right)^3}}{\sqrt{6}} = \frac{2}{9}$	0,25
	Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sin C = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \tan C = \frac{\sqrt{2}}{4}, \tan A = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan B = \sqrt{2}$ $\Leftrightarrow x = \sqrt{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}, z = \frac{\sqrt{2}}{4}$	0,25
	Vậy giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{2}{9}$ khi $x = \sqrt{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}, z = \frac{\sqrt{2}}{4}$.	0,25

---HẾT---