

ĐS9-CHUYÊN ĐỀ 9.HỆ THỨC VI-ÉT

PHẦN I. TRỌNG TÂM CẦN ĐẠT

A. Kiến thức cần nhớ

1. Hệ thức Vi-ét

- Nếu $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

- Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có $a + b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = 1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$
- Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có $a - b + c = 0$ thì phương trình có một nghiệm là $x_1 = -1$, còn nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$

2. Tìm hai số biết tổng và tích của chúng

- Nếu hai số đó có tổng bằng S và tích bằng P thì hai số đó là hai nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$

Điều kiện để có hai số đó là: $S^2 - 4P \geq 0 (\Delta \geq 0)$

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho phương trình $mx^2 + 2(m-2)x + m-3 = 0$ (x là ẩn số).

- Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, TP Hồ Chí Minh năm học 2011 - 2012)

Giải

Tìm cách giải. Những bài toán liên quan đến dấu của nghiệm phương trình bậc hai bao giờ cũng liên quan đến công thức nghiệm và hệ thức Vi-ét. Cụ thể là:

- Phương trình có hai nghiệm trái dấu gồm: Phương trình có nghiệm ($\Delta \geq 0$)

và $x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a} < 0$ thì điều kiện nghiệm chung là: $ac < 0$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

- Phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương gồm: Phương trình có hai nghiệm trái dấu ($ac < 0$) và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương ($x_1 + x_2 < 0$)

Trình bày lời giải

a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow m(m - 3) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 3$$

b) Phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ac < 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 3 \\ -\frac{2(m - 2)}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < 3.$$

Vậy với $2 < m < 3$ thì phương trình có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn nghiệm dương.

Ví dụ 2: Cho phương trình: $2x^2 + (m - 1)x - m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm là số đo 2 cạnh của một tam giác vuông có độ dài đường cao kẻ từ đỉnh góc vuông là $\frac{4}{5}$ (đơn vị độ dài).

Giải

Tìm cách giải. Bản chất của bài toán gồm 2 bước:

• **Bước 1.** Phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases}$

• **Bước 2.** Hai nghiệm $x_1; x_2$ là số đo 2 cạnh của một tam giác vuông có độ dài đường cao kẻ từ đỉnh góc vuông là $\frac{4}{5}$ (đơn vị độ dài) thì thỏa mãn:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{h^2}$$

Trình bày lời giải

$$\text{Xét } \Delta = (m - 1)^2 + 4.2.(m + 1) = m^2 - 2m + 1 + 8m + 8 = (m + 3)^2 \geq 0$$

Phương trình luôn có hai nghiệm

Để hai nghiệm là số đo hai cạnh của tam giác $\Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{(m-1)}{2} > 0 \\ -\frac{m-1}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1.$$

Hai nghiệm là số đo 2 cạnh của một tam giác vuông có độ dài đường cao kẻ từ đỉnh góc vuông là $\frac{4}{5}$ (đơn vị độ dài)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{25}{16} \Leftrightarrow \frac{(m-1)^2 + 4m + 4}{(m+1)^2} = \frac{25}{16}$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 + 18m - 55 = 0. \text{ Giải ra, ta được: } m_1 = -\frac{11}{3}; m_2 = \frac{5}{3}.$$

Kết hợp điều kiện, ta được $m_1 = -\frac{11}{3}$ thỏa mãn

Ví dụ 3: Cho phương trình $x^2 - 3mx - m = 0$ (m là tham số khác 0) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$A = \frac{m^2}{x_2^2 + 3mx_1 + 3m} + \frac{x_1^2 + 3mx_2 + 3m}{m^2}$$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, tỉnh Hưng Yên, năm học 2011 -2012)

Giải

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $9m^2 + 4m > 0$ hay $m(9m + 4) > 0$

$$\Leftrightarrow m > 0 \text{ hoặc } m < -\frac{4}{9} (*)$$

$$\text{Theo Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 3m \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}$$

Ta có:

$$\frac{m^2}{x_2^2 + 3mx_1 + 3m} = \frac{m^2}{x_2^2 + (x_1 + x_2)x_1 - 3x_1 x_2} = \frac{m^2}{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2} = \frac{m^2}{(x_1 - x_2)^2} > 0$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương: } A = \frac{m^2}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{(x_1 - x_2)^2}{m^2} \geq 2$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = 2 \Leftrightarrow \frac{m^2}{(x_1 - x_2)^2} = \frac{(x_1 - x_2)^2}{m^2} \Leftrightarrow m^4 = (x_1 - x_2)^4$$

$$\Leftrightarrow m^2 = (x_1 - x_2)^2 \Leftrightarrow x_1^2 x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 \Leftrightarrow x_1^2 x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 x_2 + 4) = 9m^2 \Leftrightarrow -m(-m + 4) = 9m^2$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\Leftrightarrow 8m^2 + 4m = 0 \Leftrightarrow 4m(2m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 (L) \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy với $m = -\frac{1}{2}$ thì $A = 2$

Ví dụ 4: Cho phương trình $x^2 - 6x - m = 0$ (với m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn: $x_1^2 - x_2^2 = 12$
(Thi học sinh giỏi Toán 9, Tỉnh Phú Thọ năm học 2012 - 2013)

Giải

$$\Delta = 36 + 4m > 0 \Leftrightarrow 4m > -36 \Leftrightarrow m > -9$$

* Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}$

$$* \text{Ta có: } x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 12 \Rightarrow x_1 - x_2 = 2$$

$$\text{Suy ra: } x_1 = 4; x_2 = 2$$

Từ đó suy ra: $m = -4 \cdot 2 = -8$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy với $m = -8$ thì phương trình có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1^2 - x_2^2 = 12$

Ví dụ 5: Tìm tất cả các giá trị của m sao cho phương trình $x^4 - 4x^3 + 8x + m = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.
(Thi học sinh giỏi Toán 9, Tỉnh Thanh Hóa năm học 2012 - 2013)

Giải

Cách 1. Ta có $x^4 - 4x^3 + 8x + m = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow (x - 1)^4 - 6(x - 1)^2 + m + 5 = 0$$

Đặt $y = (x - 1)^2, y \geq 0$ phương trình có dạng: $y^2 - 6y + m + 5 = 0$ (2)

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - (m + 5) > 0 \\ 6 > 0 \\ m + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ m > -5 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < m < 4$$

Cách 2. Ta có $x^4 - 4x^3 + 8x + m = 0$ (1)

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x) + m = 0$$

Đặt $y = x^2 - 2x$ phương trình có dạng: $y^2 - 4y + m = 0$ (3)

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn -1

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 > 0 \\ x_1 + x_2 > -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m < 4 \\ 4 + m + 1 > 0 \\ 4 > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m > -5 \end{cases} \Leftrightarrow -5 < m < 4$$

Ví dụ 6: Chứng minh rằng nếu a và b là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 + px + 1 = 0 \quad (1), \text{ còn } c \text{ và } d \text{ là hai nghiệm của phương trình } x^2 + qx + 1 = 0 \quad (2)$$

thì ta có hệ thức: $(a - c)(b - c)(a + d)(b + d) = q^2 - p^2$.

Giải

Theo hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} a + b = -p \\ ab = 1 \end{cases}; \begin{cases} c + d = -q \\ cd = 1 \end{cases}$

$$\text{Xét } (a - c)(b - c)(a + d)(b + d) = (ab - ac - bc + c^2)(ab + ad + bd + d^2)$$

$$= (1 + pc + c^2)(1 - pd + d^2)$$

$$= 1 - pd + d^2 + pc - p^2cd + pcd^2 + c^2 - pc^2d + c^2d^2$$

$$= 1 - pd + d^2 + pc - p^2 + pd + c^2 - pc + 1$$

$$= c^2 + 2 + d^2 - p^2 = (c + d)^2 - p^2 = q^2 - p^2.$$

Suy ra $(a - c)(b - c)(a + d)(b + d) = q^2 - p^2$ Điều phải chứng minh.

Nhận xét. Nếu chọn p và q là hai số nguyên sao cho $q^2 - p^2$ là số chính phương thì ta có kết quả: $(a - c)(b - c)(a + d)(b + d)$ là số chính phương. Chẳng hạn: cho số nguyên m , chứng minh rằng nếu a và b là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 15mx + 1 = 0$ (1), còn c và d là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 17mx + 1 = 0$ thì ta có $(a - c)(b - c)(a + d)(b + d)$ là số chính phương.

Ví dụ 7: Cho phương trình $x^2 + px + q = 0$ (1). Hãy tìm các giá trị nguyên của p và q sao cho phương trình (1) có nghiệm nguyên phân biệt và nghiệm này gấp 4 lần nghiệm kia

(Thi học sinh giỏi Toàn 9, tỉnh Yên Bái, năm học 2003 - 2004)

Giải

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Giả sử phương trình có hai nghiệm phân biệt và $x_2 = 4x_1$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} p^2 - 4q > 0 \\ x_1 + x_2 = 5x_1 = -p \\ x_1x_2 = 4x_1^2 = q \\ p, q \in \mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{p}{5} \\ \frac{4p^2}{25} = q \end{cases}$$

Suy ra $p^2 \in 25\mathbb{Q} \Rightarrow p^2 = 25k^2 (k \in \mathbb{Q}) \Leftrightarrow p = \pm 5k$

$$\text{Do đó } q = \frac{4 \cdot 25k^2}{25} = 4k^2$$

Vậy $(p; q) \in \{(5k; 4k^2); (-5k; 4k^2)\}$ với $k \in \mathbb{Q}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm nguyên phân biệt và một nghiệm gấp 4 lần nghiệm kia

Ví dụ 8: Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$.

Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$ với n nguyên dương

a) Chứng minh rằng: $aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0$

b) Không khai triển, không dùng máy tính, hãy tính giá trị biểu thức:

$$A = \frac{1}{(1+\sqrt{3})^5} + \frac{1}{(1-\sqrt{3})^5}.$$

Giải

a) x_1 là nghiệm của phương trình nên $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$; x_2 là nghiệm của phương trình nên $ax_2^2 + bx_2 + c = 0$;

Suy ra: $ax_1^{n+2} + bx_1^{n+1} + cx_1^n = 0$ (1), $ax_2^{n+2} + bx_2^{n+1} + cx_2^n = 0$ (2).

Từ (1) và (2) cộng vế với vế, ta được:

$$a(x_1^{n+2} + x_2^{n+2}) + b(x_1^{n+1} + x_2^{n+1}) + c(x_1^n + x_2^n) = 0$$

Từ đó suy ra: $aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0$.

b) Đặt: $x_1 = 1 + \sqrt{3}; x_2 = 1 - \sqrt{3}; S_n = x_1^n + x_2^n$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = -2 \end{cases}$$

Vậy $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 2x - 2 = 0$. Áp dụng câu a, ta có:

$$S_{n+2} - 2S_{n+1} - 2S_n = 0 \Leftrightarrow S_{n+2} = 2S_{n+1} + 2S_n (*)$$

Ta có: $S_1 = 2, S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4 + 4 = 8$.

Áp dụng công thức (*), ta có:

$$S_3 = 2S_2 + 2S_1 = 2.8 + 2.2 = 20; S_4 = 2S_3 + 2S_2 = 2.20 + 2.8 = 56$$

$$S_5 = 2S_4 + 2S_3 = 2.56 + 2.20 = 152$$

Ta có:
$$A = \frac{1}{(1+\sqrt{3})^5} + \frac{1}{(1-\sqrt{3})^5} = \frac{(1+\sqrt{3})^5 + (1-\sqrt{3})^5}{(1+\sqrt{3})^5 (1-\sqrt{3})^5} = \frac{152}{-32} = -\frac{19}{4}.$$

C. Bài tập vận dụng

1. Cho phương trình $x^2 - 2mx + m - 4 = 0$

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn

$$x_1^3 + x_2^3 = 26m$$

b) Tìm m nguyên để phương trình có hai nghiệm nguyên.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Tỉnh Quảng Bình năm học 2012 - 2013)

Hướng dẫn giải - đáp số

a) Xét $\Delta' = m^2 - m + 4 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + 3\frac{3}{4} > 0$, phương trình luôn có hai nghiệm phân

biệt với mọi m

Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình

Theo hệ thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = m - 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4m^2 - 2m + 8$$

$$\text{Ta có: } x_1^3 + x_2^3 = 26m \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) = 26m$$

$$\Leftrightarrow 2m(4m^2 - 3m + 12) = 26m$$

$$\Leftrightarrow 2m(4m^2 - 3m - 1) = 0 \Leftrightarrow m_1 = 0; m_2 = 1; m_3 = -\frac{1}{4}$$

b) Vì $x_{1,2} = m \pm \sqrt{\Delta'}$ nên điều kiện để phương trình có hai nghiệm nguyên:

$$\Delta' = m^2 - m + 4$$

$$\text{Đặt } \Delta' = m^2 - m + 4 = k^2 (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 16 = 4k^2$$

$$\Leftrightarrow (2m - 1)^2 + 15 = (2k)^2 \Leftrightarrow (2k - 2m + 1)(2k + 2m - 1) = 15$$

Từ đó ta có bảng sau:

$2k - 2m + 1$	1	3	5	15	-1	-3	-5	-15
$2k + 2m - 1$	15	5	3	1	-15	-5	-3	-1

Suy ra:

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

k	4	2	2	4	-4	-4	-2	-4
m	4	1	0	-3	-3	0	1	4

Vậy với $m \in \{4; 1; 0; -3\}$ thì phương trình có nghiệm nguyên

2. Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2x - m - 2 = 0$. Tìm m để phương trình:

a) Có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 8$

b) Có đúng một nghiệm dương.

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Tỉnh Vĩnh Long năm học 2012 - 2013)

Hướng dẫn giải - đáp số

a) Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\Delta' = 1 + m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -3$

Theo hệ thức Vi-et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -m - 2 \end{cases}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4 + 2m + 4 = 8 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (thỏa mãn } m \geq -3)$$

Vậy $m = 0$ thì phương trình có 2 nghiệm $x_1^2 + x_2^2 = 8$

b) Với $m \geq -3$ thì phương trình luôn có nghiệm

Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = 2$ nên nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -3$ thì phương trình có nghiệm kép là số dương

Nếu phương trình có hai nghiệm trái dấu thì phương trình cũng có một nghiệm dương

$$\Leftrightarrow -m - 2 < 0 \Leftrightarrow m > -2$$

Vậy với $m = -3$ hoặc $m > -2$ thì phương trình có đúng một nghiệm dương

3. Cho phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 3$

Hướng dẫn giải - đáp số

$$mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$$

$$\Delta = 4(m-1)^2 - 4m(m-3) = 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 + 12m = 4m + 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow m > -1 \text{ và } m \neq 0$$

Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình: $mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$

$$* \text{ Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{m-3}{m} \end{cases}$$

Ta có: $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = 3 + \frac{2(m-3)}{m}$

$$\Leftrightarrow \frac{4(m-1)^2}{m^2} = 3 + \frac{2(m-3)}{m} \Leftrightarrow \frac{4m^2 - 8m + 4}{m^2} = 3 + \frac{2m-6}{m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4m^2 - 8m + 4}{m^2} = \frac{5m-6}{m}$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 = 5m^2 - 6m \Leftrightarrow m^2 + 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 5 \Leftrightarrow m_1 = \sqrt{5} - 1 \text{ (thỏa mãn),}$$

$$m_2 = -\sqrt{5} - 1 \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy với $m = \sqrt{5} - 1$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn:
 $x_1^2 + x_2^2 = 3$

4. Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 10 = 0$ với m là tham số thực

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$

b) Tìm m để biểu thức $P = 6x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Tỉnh Vĩnh Long, năm học 2011 - 2012)

Hướng dẫn giải - đáp số

a) $\Delta = 4(m+1)^2 - 8m - 40 = 4m^2 + 8m + 4 - 8m - 40 = 4m^2 - 36 \geq 0$

$$\Leftrightarrow m^2 \geq 9 \Leftrightarrow |m| \geq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \leq -3 \end{cases}$$

b) Gọi $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - 2(m+1)x + 2m + 10 = 0$

Áp dụng hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1x_2 = 2m + 10 \end{cases}$

Ta có: $P = 6x_1x_2 + x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2 = 4(m+1)^2 + 4(2m+10)$

$$= 4m^2 + 8m + 4 + 8m + 40 = 4m^2 + 16m + 44 = 4m^2 + 16m + 16 + 28$$

$$= 4(m+2)^2 + 28 \geq 4(-3+2)^2 + 28 = 32$$

Vậy $P_{\max} = 32$ khi và chỉ khi $m = -3$

5. Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2m(m+2)x + m^2 + 7 = 0$ (1). (m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 1$

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn:

$$x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 4$$

Hướng dẫn giải - đáp số

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

a) Với $m=1$, phương trình có dạng: $x^2 - 6x + 8 = 0$. Giải ra ta được: $x_1 = 2; x_2 = 4$

b) Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\Delta' = m^2(m+2)^2 - (m^2 + 7) \geq 0$ (*)

Theo hệ thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m(m+2) \\ x_1 x_2 = m^2 + 7 \end{cases}$$

Theo đề bài: $x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 4 \Leftrightarrow m^2 + 7 - 2.2.m(m+2) = 4$

$$\Leftrightarrow 3m^2 + 8m - 3 = 0 \Leftrightarrow m_1 = \frac{1}{3}; m_2 = -3$$

Thử lại với điều kiện (*) thì $m_1 = \frac{1}{3}; m_2 = -3$ không thỏa mãn

Vậy không tồn tại m thỏa mãn điều kiện đề bài

6. Cho phương trình $x^2 - 2mx + 1 = 0$ (ẩn x)

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương

b) Gọi $x_1; x_2$ ($x_1 \leq x_2$) là hai nghiệm dương của phương trình

Tính $P = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$ theo m và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = x_1 + x_2 + \frac{2}{x_1 + x_2}$$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, Tỉnh Quảng Bình, năm học 2011 - 2012)

Hướng dẫn giải - đáp số

a) Phương trình có hai nghiệm dương
$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 \geq 0 \\ 2m > 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1$$

Vậy $m \geq 1$ thì phương trình có hai nghiệm dương

b) Với $m \geq 1$ thì phương trình có hai nghiệm dương

Theo hệ thức Vi-ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$$

Xét: $P^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} = 2m - 2$. Vì $P \leq 0$ nên $P = -\sqrt{2m - 2}$

Ta có: $Q = x_1 + x_2 + \frac{2}{x_1 + x_2} = 2m + \frac{2}{2m} = m + m + \frac{1}{m} \geq 1 + 2\sqrt{m \cdot \frac{1}{m}} = 3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q là 3 khi $m = 1$

7. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$ (1)

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương.

b) Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm dương của phương trình (1). Tìm m nguyên dương để $A = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2$ có giá trị nguyên.

Hướng dẫn giải - đáp số

a) Phương trình có hai nghiệm dương

$$\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - (2m-5) \geq 0 \\ 2(m-1) > 0 \\ 2m-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 6 > 0 \\ m > 1 \\ m > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{5}{2}$$

b) Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = 2m-5 \end{cases}$

$$\text{Ta có: } A = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right)^2 - 2 = \left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2}\right)^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow A = \left[\frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 x_2} - 2\right]^2 - 2 = \left[\frac{4(m-1)^2}{2m-5} - 2\right]^2 - 2$$

$$A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4(m-1)^2}{2m-5} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2m+1 + \frac{9}{2m-5} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2m-5 \in U(9)$$

Vì m nguyên dương nên $2m-5 \geq -5$, suy ra:

$2m-5$	-3	-1	1	3	9
m	1	2	3	4	7

Vậy với $m \in \{1; 2; 3; 4; 7\}$ thì A nhận giá trị nguyên

8. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) và $cx^2 + bx + a = 0$ (2) (với $a > c > 0$)

a) Chứng minh rằng phương trình (1) và (2) cùng có nghiệm hoặc cùng vô nghiệm

b) Với giả thiết phương trình (1) có nghiệm $x_1; x_2$ và phương trình (2) có nghiệm là: $x'_1; x'_2$ và $x_1 + x_2 > x'_1 + x'_2$. Chứng minh rằng $b > 0$

c) Trong trường hợp phương trình (1) và (2) đều vô nghiệm, chứng minh rằng $b < a + c$

Hướng dẫn giải - đáp số

a) Cả hai phương trình đều có: $\Delta = b^2 - 4ac$, nên cả hai phương trình (1) và (2) cùng có nghiệm hoặc cùng vô nghiệm

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

b) Trong trường hợp hai phương trình trên có nghiệm. Theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}; x_1' + x_2' = \frac{-b}{c}$$

$$\text{Xét: } x_1 + x_2 - x_1' - x_2' = \frac{-b}{a} + \frac{b}{c} = \frac{b(a-c)}{ac} > 0 \text{ nên } b > 0$$

c) Trong trường hợp phương trình vô nghiệm, ta có: $\Delta = b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow b^2 < 4ac$

Mặt khác ta có: $4ac \leq (a+c)^2$, nên:

$$b^2 < (a+c)^2 \Leftrightarrow b < a+c \text{ (vì } a > c > 0, b > 0 \text{)}$$

9. Cho p là số tự nhiên khác 0. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 5px - 1 = 0$; x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 4px - 1 = 0$. Chứng minh rằng tích $(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4)$ là một số chính phương.

(Thi học sinh giỏi Toán, TP Hà Nội, năm học 2006 - 2007)

Hướng dẫn giải - đáp số

Ta có: $x^2 + 5px - 1 = 0$ (1); $x^2 + 4px - 1 = 0$ (2)

Từ (1); (2) theo hệ thức vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = -5p$; $x_1 x_2 = -1$

$$x_3 + x_4 = -4p; x_3 x_4 = -1$$

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_4) \\ &= (x_1 - x_3)(x_2 + x_4)(x_2 - x_3)(x_1 + x_4) \\ &= (x_1 x_2 + x_1 x_4 - x_3 x_2 - x_3 x_4)(x_1 x_2 + x_2 x_4 - x_1 x_3 - x_3 x_4) \\ &= (x_1 x_4 - x_2 x_3)(x_2 x_4 - x_1 x_3) \\ &= x_1 x_2 x_4^2 - x_1^2 x_3 x_4 - x_3 x_4 x_2^2 + x_1 x_2 x_3^2 \\ &= -x_4^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \text{ (vì } x_1 x_2 = -1; x_3 x_4 = -1) \\ &= (-x_4^2 + 2 - x_3^2) + (x_1^2 - 2 + x_2^2) \end{aligned}$$

$$\text{Mà } 2 = (-1)(-2) = -2x_1 x_2; 2 = (-1)(-2) = -2x_3 x_4$$

$$\text{Suy ra (*)} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - (x_3 + x_4)^2$$

$$= 25p^2 - 16p^2$$

$$= (3p)^2 \Rightarrow \text{Điều phải chứng minh}$$

10. Tìm m để phương trình $(m+1)x^2 - 3mx + 4m = 0$ có nghiệm dương

(Thi học sinh giỏi lớp 9, Thừa Thiên Huế, vòng 1, năm học 2003 - 2004)

Hướng dẫn giải - đáp số

Khi $m = -1$, phương trình trở thành: $3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3} > 0$

Khi $m \neq -1$ thì PT: $(m+1)x^2 - 3mx + 4m = 0$ (1) là phương trình bậc hai

Gọi $S = \frac{3m}{m+1}$; $P = \frac{4m}{m+1}$ là tổng và tích các nghiệm $x_1; x_2$ của phương trình (1)

Phương trình (1) có nghiệm dương trong các trường hợp sau:

• $0 = x_1 < x_2$, khi đó $\Delta > 0, P = 0, S > 0$. Suy ra hệ vô nghiệm

• $x_1 < 0 < x_2$, khi đó $P < 0 \Leftrightarrow \frac{4m}{m+1} < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0$

• $0 < x_1 \leq x_2$, khi đó $\Delta \geq 0, S > 0, P > 0$. Suy ra $\frac{-16}{7} \leq m < -1$

Đáp số: $\frac{-16}{7} \leq m < -1$

11. Cho phương trình: $2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0$

a) Xác định m để phương trình có hai nghiệm

b) Gọi hai nghiệm của phương trình trên là $x_1; x_2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = |2x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4|$

(Thi học sinh giỏi Toán 9, TP Hồ Chí Minh, năm học 2003 - 2004)

Hướng dẫn giải - đáp số

a) $2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0$

Xét $\Delta = 4m^2 - 4.2(m^2 - 2) = 4m^2 - 8m^2 + 16 = -4m^2 + 16$

Phương trình có 2 nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Rightarrow -4m^2 \geq -16 \Leftrightarrow m^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$

b) $A = |x_1 + x_2 + 2x_1x_2 - 4|$

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = -m; 2x_1x_2 = m^2 - 2$

$A = |-m + m^2 - 2 - 4| = |(m+2)(3-m)|$

Vì $m \in [-2; 2]$ nên $m+2 \geq 0$ và $m-3 < 0$

Do đó $A = (m+2)(3-m) = -m^2 + m + 6 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \leq \frac{25}{4}$

Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{25}{4}$, đạt được khi và chỉ khi $m = \frac{1}{2}$

12. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[0; 2]$.

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{8a^2 - 6ab + b^2}{4a^2 - 2ab + ac}$

Hướng dẫn giải - đáp số

Gọi x_1, x_2 ($x_1 \leq x_2$) là hai nghiệm của phương trình đã cho

Theo định lí Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{8a^2 - 6ab + b^2}{4a^2 - 2ab + ac} = \frac{8 - 6\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2}{4 - 2\frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{8 + 6(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2}{4 + 2(x_1 + x_2) + x_1 x_2}$$

$$\text{Do } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2 \Rightarrow x_1^2 \leq x_1 x_2, x_2^2 \leq 4 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 \leq x_1 x_2 + 4$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 \leq 3x_1 x_2 + 4$$

$$\text{Vậy } P \leq \frac{8 + 6(x_1 + x_2) + 3x_1 x_2 + 4}{4 + 2(x_1 + x_2) + x_1 x_2} = 3$$

Đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = 2$ hoặc $x_1 = 0, x_2 = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} = 4 \\ \frac{c}{a} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow c = -b = 4a \text{ hoặc } \begin{cases} -\frac{b}{a} = 2 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy, } P_{\max} = 3 \Leftrightarrow c = -b = 4a \text{ hoặc } \begin{cases} b = -2a \\ c = 0 \end{cases}$$

13. Cho phương trình $(x - 2)(x^2 - x) + (4m + 1)x - 8m - 2 = 0$ (x là ẩn số).

Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$$

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên Quốc Học, tỉnh Thừa Thiên Huế, năm học 2015 - 2016)

Hướng dẫn giải - đáp số

$$\text{Ta có: } (x - 2)(x^2 - x) + (4m + 1)x - 8m - 2 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - x) + (4m + 1)x - 2(4m + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - x + 4m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - x + 4m + 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4(4m + 1) > 0 \\ 2^2 - 2 + 4m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{3}{16} \\ m \neq -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (2), theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = 4m + 1 \end{cases}$$

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + x_3^2 = 11$

Suy ra: $1 - 2(4m + 1) + 4 = 11 \Leftrightarrow m = -1$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy với $m = -1$ thì phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$

14. Cho phương trình: $x^2 - 2(m - 1)x + 2m^2 - 3m + 1 = 0$, với m là tham số (1).

a) Chứng minh rằng phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $0 \leq m \leq 1$.

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

i. Chứng minh $|x_1 + x_2 + x_1 x_2| \leq \frac{9}{8}$.

ii. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trái dấu thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 1$.

(Tuyển sinh lớp 10, THPT chuyên, tỉnh Bến Tre, năm học 2014 - 2015)

Hướng dẫn giải - đáp số

a) $x^2 - 2(m - 1)x + 2m^2 - 3m + 1 = 0$, với m là tham số (1)

Có $\Delta' = (m - 1)^2 - (2m^2 - 3m + 1) = -m^2 + m$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = -m^2 + m \geq 0 \Leftrightarrow m(m - 1) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \text{ (VN)}$$

b) Với $0 \leq m \leq 1$ thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2

Theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m - 1) \\ x_1 x_2 = 2m^2 - 3m + 1 \end{cases}$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

i. Ta có: $|x_1 + x_2 + x_1 x_2| = |2(m-1) + 2m^2 - 3m + 1|$
 $= |2m^2 - m - 1| = |(2m+1)(m-1)|$

Vì $0 \leq m \leq 1$ nên $\begin{cases} m-1 \leq 0 \\ 2m+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m-1)(2m+1) \leq 0$

Suy ra $|x_1 + x_2 + x_1 x_2| = -(2m^2 - m - 1) = 2\left(m - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} \leq \frac{9}{8}$

Dấu bằng xảy ra khi $m = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn điều kiện). Vậy $|x_1 + x_2 + x_1 x_2| \leq \frac{9}{8}$

ii. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trái dấu

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m + 1 < 0 \Leftrightarrow (m-1)(2m-1) < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 1$$

Ta có $|x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 1$

$$\Leftrightarrow 4(m-1)^2 - 4(2m^2 - 3m + 1) = 1 \Leftrightarrow (2m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy không tồn tại m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt trái dấu thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 1$

15. Cho phương trình $(m^2 + 5)x^2 - 2mx - 6m = 0$ (1) với m là tham số

a) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng khi đó tổng của hai nghiệm không thể là số nguyên.

b) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện

$$(x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2})^4 = 16.$$

(Tuyển sinh lớp 10, trường Phổ thông năng khiếu, Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, năm học 2014 - 2015)

Hướng dẫn giải - đáp số

a) $m^2 + 5 \neq 0$ với mọi m nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$m^2 + 6m(m^2 + 5) > 0 \Leftrightarrow 6m \left[\left(m + \frac{1}{12}\right)^2 + \frac{719}{144} \right] > 0 \Leftrightarrow m > 0$$

Khi đó theo hệ thức Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{2m}{m^2 + 5}$

Vì $m^2 + 5 - 2m = (m-1)^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow m^2 + 5 > 2m \Rightarrow 0 < \frac{2m}{m^2 + 5} < 1$ (do $m > 0$)

b) $m^2 + 5 \neq 0$ với mọi m nên phương trình (1) có hai nghiệm khi và chỉ khi

$$m^2 + 6m(m^2 + 5) \geq 0 \Leftrightarrow 6m \left[\left(m + \frac{1}{12} \right)^2 + \frac{719}{144} \right] \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$$

Khi đó theo hệ thức Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m^2 + 5} \\ x_1 x_2 = \frac{-6m}{m^2 + 5} \end{cases}$$

$$(x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2})^4 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = 2 \\ x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = -2 \end{cases}$$

Trường hợp 1. Xét $x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = 2 \Leftrightarrow \frac{-6m}{m^2 + 5} - \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}} = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}} = \frac{-6m}{m^2 + 5} - 2 \text{ (vô nghiệm vì } m \geq 0 \text{)}$$

Trường hợp 2. Xét $x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = -2 \Leftrightarrow \frac{-6m}{m^2 + 5} - \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}} = -2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}} = 2 - \frac{6m}{m^2 + 5}. \text{ Đặt } t = \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}} \geq 0$$

Ta có: $t = 2 - 3t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(ktm) \\ t = \frac{2}{3}(tm) \end{cases}$

$$t = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2m^2 - 9m + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn } m \geq 0 \text{)}$$

Vậy với $m \in \left\{ 2; \frac{5}{2} \right\}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều

kiện $(x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2})^4 = 16$

PHẦN II. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ THI CHUYÊN VÀ HSG

Bài 1. Cho phương trình: $4x^2 + 2(3 - 2m)x + m^2 - 3m + 2 = 0$ (1); với m là tham số thực.

- Giải phương trình với $m = 7$.
- Tìm m để (1) có một nghiệm bằng 2, tìm nghiệm còn lại.
- Chứng minh phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .
- Gọi hai nghiệm của phương trình là x_1, x_2 . Tìm tất cả các giá trị của m sao cho:

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

a) $x_1 + x_2 + 5x_1x_2 = 10$.

b) $x_1 - 5x_2 = 5$.

c) $x_1 - 2|x_1 - 2x_2 + 1| + 3x_2 = 5m$.

d) $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 2(x_1 - x_2) = 3$.

e) $-2 < x_1 < x_2 < 6$.

f) Tỷ số giữa hai nghiệm bằng 4.

g) Biểu thức $A = x_1^2 + 3x_2^3$ đạt giá trị nhỏ nhất.

5. Tìm m để phương trình đã cho có tích hai nghiệm đạt giá trị nhỏ nhất.

6. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm đều là số nguyên.

Lời giải

1) Khi $m = 7$, phương trình (1) trở thành: $4x^2 - 22x + 30 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 15 = 0$

Ta có: $\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 15 = 1 > 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt là
$$\begin{cases} x_1 = \frac{11 - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{5}{2} \\ x_2 = \frac{11 + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = 3 \end{cases}.$$

2) (1) có một nghiệm là 2, ta có phương trình:

$$4 \cdot 2^2 + 2(3 - 2m) \cdot 2 + m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 11m + 30 = 0$$

Ta có: $\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 30 = 1 > 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt
$$\begin{cases} m = \frac{11 - \sqrt{1}}{2} = 5 \\ m = \frac{11 + \sqrt{1}}{2} = 6 \end{cases}.$$

+) Khi $m = 5$, phương trình (1) trở thành: $2x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (2).$

+) Khi $m = 6$, phương trình (2) trở thành: $2x^2 - 9x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \quad (3).$

Từ (2) và (3) suy ra (1) có một nghiệm bằng 2 thì nghiệm còn lại là $\frac{3}{2}$ hoặc $\frac{5}{2}$.

3) Phương trình (1) có

$$\Delta' = (3 - 2m)^2 - 4(m^2 - 3m + 2) = 9 - 12m + 4m^2 - 4m^2 + 12m - 8 = 1 > 0$$

Suy ra phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị m .

4) Từ phương trình (1), ta có hệ thức Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2(3 - 2m)}{4} = \frac{2m - 3}{2} & (4) \\ x_1 x_2 = \frac{m^2 - 3m + 2}{4} & (5) \end{cases}$$

Từ ý 3) suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt:
$$\begin{cases} x = \frac{2m - 3 - \sqrt{1}}{4} = \frac{m - 2}{2} \\ x = \frac{2m - 3 + \sqrt{1}}{4} = \frac{m - 1}{2} \end{cases}.$$

a) $x_1 + x_2 + 5x_1 x_2 = 10 \Leftrightarrow \frac{2m - 3}{2} + 5 \cdot \frac{m^2 - 3m + 2}{4} = 10$

$$\Leftrightarrow 4m - 6 + 5m^2 - 15m + 10 = 40 \Leftrightarrow 5m^2 - 11m - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

b) TH1: $x_1 = \frac{m - 2}{2}, x_2 = \frac{m - 1}{2}$. Thay vào $x_1 - 5x_2 = 5$ ta được:

$$\frac{m - 2}{2} - 5 \cdot \frac{m - 1}{2} = 5 \Leftrightarrow -4m + 3 = 10 \Leftrightarrow m = -\frac{7}{4}.$$

TH2: $x_1 = \frac{m - 1}{2}, x_2 = \frac{m - 2}{2}$. Thay vào $x_1 - 5x_2 = 5$ ta được:

$$\frac{m - 1}{2} - 5 \cdot \frac{m - 2}{2} = 5 \Leftrightarrow -4m + 9 = 10 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}.$$

Vậy (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 - 5x_2 = 5$ khi và chỉ khi $m = -\frac{7}{4}$ hoặc $m = -\frac{1}{4}$.

c) TH1: $x_1 = \frac{m - 2}{2}, x_2 = \frac{m - 1}{2}$. Thay vào $x_1 - 2|x_1 - 2x_2 + 1| + 3x_2 = 5m$ được:

$$\frac{m - 2}{2} - 2 \left| \frac{m - 2}{2} - 2 \cdot \frac{m - 1}{2} + 1 \right| + 3 \cdot \frac{m - 1}{2} = 5m \Leftrightarrow -2 \left| \frac{-m + 2}{2} \right| = \frac{6m + 5}{2}$$

$$\Leftrightarrow |-m + 2| = -\frac{6m + 5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{6m + 5}{2} > 0 \\ -m + 2 = -\frac{6m + 5}{2} \\ -m + 2 = \frac{6m + 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{5}{6} \\ m = -\frac{9}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{9}{4} \\ m = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

TH2: $x_1 = \frac{m - 1}{2}, x_2 = \frac{m - 2}{2}$. Thay vào $x_1 - 2|x_1 - 2x_2 + 1| + 3x_2 = 5m$ được:

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\frac{m-1}{2} - 2 \left| \frac{m-1}{2} - 2 \cdot \frac{m-2}{2} + 1 \right| + 3 \cdot \frac{m-2}{2} = 5m \Leftrightarrow -2 \left| \frac{-m+5}{2} \right| = \frac{6m+7}{2}$$

$$\Leftrightarrow |-m+5| = -\frac{6m+7}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{6m+7}{2} > 0 \\ -m+5 = -\frac{6m+7}{2} \\ -m+5 = \frac{6m+7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{7}{6} \\ m = -\frac{17}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{17}{4} \\ m = \frac{3}{8} \end{cases}$$

Vậy các giá trị m thỏa đề là $m = -\frac{9}{4}, m = -\frac{17}{4}$.

d) Ta có: $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 2(x_1 - x_2) = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 + 2(x_1 - x_2) = 3$ (6)

TH1: $x_1 = \frac{m-2}{2}, x_2 = \frac{m-1}{2}$. Phương trình (6) tương đương:

$$\left(\frac{2m-3}{2} \right)^2 - \frac{m^2-3m+2}{4} + 2 \left(\frac{m-2}{2} - \frac{m-1}{2} \right) = 3 \Leftrightarrow \frac{3m^2-9m+7}{4} - 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 9m + 7 = 16 \Leftrightarrow m = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

TH2: $x_1 = \frac{m-1}{2}, x_2 = \frac{m-2}{2}$. Phương trình (6) tương đương:

$$\left(\frac{2m-3}{2} \right)^2 - \frac{m^2-3m+2}{4} + 2 \left(\frac{m-1}{2} - \frac{m-2}{2} \right) = 3 \Leftrightarrow \frac{3m^2-9m+7}{4} + 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 9m + 7 = 8 \Leftrightarrow m = \frac{9 \pm \sqrt{93}}{6}.$$

Vậy các giá trị m thỏa đề là $m = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}, m = \frac{9 \pm \sqrt{93}}{6}$.

e) Vì $-2 < x_1 < x_2 < 6$ nên suy ra $x_1 = \frac{m-2}{2}, x_2 = \frac{m-1}{2}$

Ta có: $-2 < x_1 < x_2 < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < \frac{m-2}{2} \\ \frac{m-1}{2} < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m < 13 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 13.$

Vậy $-2 < m < 13$ là các giá trị m cần tìm.

f) Tỷ số giữa hai nghiệm bằng 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1, m \neq 2 \\ \frac{\frac{m-2}{2}}{\frac{m-1}{2}} = 4 \\ \frac{\frac{m-1}{2}}{\frac{m-2}{2}} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1, m \neq 2 \\ \frac{m-2}{m-1} = 4 \\ \frac{m-1}{m-2} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1, m \neq 2 \\ m-2 = 4m-4 \\ m-1 = 4m-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1, m \neq 2 \\ m = \frac{2}{3} \\ m = \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ m = \frac{7}{3} \end{cases}.$$

Vậy các giá trị m cần tìm là $m = \frac{2}{3}, m = \frac{7}{3}$.

g) Tìm m để $A = x_1^2 + 3x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

+) Khi $x_1 = \frac{m-2}{2}, x_2 = \frac{m-1}{2}$. Ta có:

$$A = \left(\frac{m-2}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{m-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(4m^2 - 10m + 7) = \frac{1}{4}\left(2m - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{16} \geq \frac{3}{16}$$

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{16}$ khi $m = \frac{5}{4}$.

+) Khi $x_1 = \frac{m-1}{2}, x_2 = \frac{m-2}{2}$. Ta có:

$$A = \left(\frac{m-1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{m-2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(-2m^2 - 14m + 13)$$

Biểu thức này không có giá trị nhỏ nhất vì $\frac{1}{4} \cdot (-2) < 0$

Hay không có m nào để $A = x_1^2 + 3x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Từ hai trường hợp trên suy ra $m = \frac{5}{4}$ thì $A = x_1^2 + 3x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{16}$.

$$5) \text{ Ta có: } x_1 x_2 = \frac{m^2 - 3m + 2}{4} = \frac{1}{4}\left(m^2 - 2m \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{16} \geq -\frac{1}{16}$$

Suy ra tích hai nghiệm có giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{16}$ khi $m = \frac{3}{2}$.

6) Phương trình có hai nghiệm đều là hai số nguyên khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \frac{m-1}{2} \in \mathbb{Z} \\ \frac{m-2}{2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 = 2k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{m}{2} - 1 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 = 2k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{m}{2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \\ m = 2h, h \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Vậy không tồn tại giá trị m nào để phương trình có hai nghiệm đều là số nguyên.

Cách khác:

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Từ ý 3) ta có $\Delta = 1 > 0 \Rightarrow$ pt có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{2m-3-\sqrt{1}}{4} = \frac{m-2}{2}; \quad x_2 = \frac{2m-3+\sqrt{1}}{4} = \frac{m-1}{2}$$

$$\text{Để } x_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{m-1}{2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m-1 \vdots 2 \Rightarrow m = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$\Rightarrow m$ là số lẻ. Khi đó $m-2$ là số lẻ $\Rightarrow m-2$ không chia hết cho 2

$$\Rightarrow x_2 = \frac{m-2}{2} \notin \mathbb{Z}$$

Vậy không tồn tại giá trị m nào để phương trình có hai nghiệm đều là số nguyên.

Bài 2.

Cho phương trình $x^2 - 2mx - 4m^2 - 5 = 0$ (1); m là tham số thực.

1. Giải phương trình (1) với $m = 1$.
2. Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .
3. Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình.
 - a) Tìm m để $x_1 + x_2 + 4x_1x_2 \leq 7$.
 - b) Tìm m để $3(x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2 = 1$.
 - c) Tìm m để $x_1 < -3 < x_2$.
 - d) Tìm m sao cho $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{2}{9}$.
 - e) Tìm m để hai nghiệm đều nhỏ hơn -2 .
 - f) Tìm m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

1. Với $m = 1$ thì phương trình (1) trở thành:

$$x^2 - 2x - 9 = 0$$

$$\Delta' = (-1)^2 + 9 = 10 > 0 \Rightarrow \text{phương trình có hai nghiệm phân biệt:}$$

$$x_1 = 1 - \sqrt{10}; \quad x_2 = 1 + \sqrt{10}.$$

2. Xét phương trình $x^2 - 2mx - 4m^2 - 5 = 0$ ta có:

$$\Delta' = (-m)^2 + 4m^2 + 5 = 5m^2 + 5 > 0, \quad \forall m$$

$\Rightarrow$ phương trình (1) luôn luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m .

3. Theo phần 2 phương trình (1) luôn luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m nên theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2m \\ P = x_1 x_2 = -4m^2 - 5 \end{cases} \quad (2)$$

a) Ta có :

$$x_1 + x_2 + 4x_1 x_2 \leq 7 \text{ kết hợp với (2)}$$

$$\Rightarrow 2m + 4(-4m^2 - 5) \leq 7$$

$$\Leftrightarrow 2m - 16m^2 - 20 - 7 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -16m^2 + 2m - 27 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -(16m^2 - 2m + 27) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow - \left[\left(4m - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} + 27 \right] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow - \left[\left(4m - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{431}{16} \right] \leq 0, \forall m.$$

Vậy với mọi giá trị của m thì phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + 4x_1 x_2 \leq 7$$

b) Ta có:

$$3(x_1^2 + x_2^2) - x_1 x_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 3[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] - x_1 x_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 3(x_1 + x_2)^2 - 7x_1 x_2 = 1 \text{ kết hợp với (2)}$$

$$\Rightarrow 3(2m)^2 - 7(-4m^2 - 5) = 1$$

$$\Leftrightarrow 12m^2 + 28m^2 + 35 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 40m^2 + 34 = 0$$

$$\Leftrightarrow 40m^2 = -34 \quad (*)$$

Ta thấy $40m^2 \geq 0$ mà $-34 < 0$ nên phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy không có giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$3(x_1^2 + x_2^2) - x_1 x_2 = 1.$$

c) Để $x_1 < -3 < x_2$ thì

$$(x_1 + 3)(x_2 + 3) < 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9 < 0 \text{ kết hợp với (2)}$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\Rightarrow (-4m^2 - 5) + 3.2m + 9 < 0$$

$$\Leftrightarrow -4m^2 - 5 + 6m + 9 < 0$$

$$\Leftrightarrow -4m^2 + 6m + 4 < 0$$

$$\Leftrightarrow -(4m^2 - 6m - 4) < 0$$

$$\Leftrightarrow -\left(2m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2m - \frac{3}{2}\right)^2 > \frac{25}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m - \frac{3}{2} > \frac{5}{2} \\ 2m - \frac{3}{2} < -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m > 4 \\ 2m < -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy với $m > 2$ hoặc $m < -\frac{1}{2}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1 < -3 < x_2.$$

d) Ta có:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{2}{9}$$

$$\Leftrightarrow 9(x_1 + x_2) = -2x_1x_2 \text{ kết hợp với (2)}$$

$$\Rightarrow 9.2m = -2(-4m^2 - 5)$$

$$\Leftrightarrow 18m - 8m^2 - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4m^2 + 9m - 5 = 0$$

$$\text{Vi } -4 + 9 - 5 = 0 \Rightarrow m_1 = 1; m_2 = \frac{5}{4}.$$

Bổ sung: Điều kiện: $\begin{cases} x_1 \neq 0 \\ x_2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1.x_2 \neq 0 \Leftrightarrow -4m^2 - 5 \neq 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 5 \neq 0$ (luôn đúng với mọi x)

Vậy với $m_1 = 1; m_2 = \frac{5}{4}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{2}{9}.$$

e) Để hai nghiệm của phương trình (1) đều nhỏ hơn -2 thì

$$\begin{cases} (x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0 \\ x_1 + x_2 < -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \\ x_1 + x_2 < -4 \end{cases} \quad \text{kết hợp với (2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-4m^2 - 5) + 2.2m + 4 > 0 \\ 2m < -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4m^2 - 5 + 4m + 4 > 0 \\ m < -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4m^2 + 4m - 1 > 0 \\ m < -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(4m^2 - 4m + 1) > 0 \\ m < -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(2m - 1)^2 > 0 \\ m < -2 \end{cases} \quad \text{Vô lí vì } -(2m - 1)^2 \leq 0, \forall m.$$

Vậy không có giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 đều nhỏ hơn -2

f) Ta có:

$$A = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 \quad \text{kết hợp với (2) suy ra}$$

$$A = (2m)^2 - 3(-4m^2 - 5)$$

$$A = 4m^2 + 12m^2 + 15$$

$$A = 16m^2 + 15 \geq 15, \forall m$$

Vậy GTNN của $A = 15 \Leftrightarrow 16m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$.

Bài 3. Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2m + 3 = 0$ (1) (với m là tham số)

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

- 1) Giải phương trình với $m = -\frac{4}{3}$
- 2) Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có nghiệm?
- 3) Tìm giá trị của m để (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dương.
- 4) Xác định giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho
 - a) $x_1^3 + x_2^3 = 40$
 - b) $\frac{1}{x_1^2} - \frac{4x_2}{x_1} + 3x_2^2 = 0$.
 - c) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 6$.
 - d) Biểu thức $P = (2x_1 + x_2)(2x_2 + x_1)$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- 5) Khi phương trình có nghiệm, tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m .

Lời giải

- 1) Với $m = -\frac{4}{3}$ thay vào phương trình (1) ta được:

$$x^2 - 2\left(-\frac{4}{3} + 1\right)x + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{4}{3}\right) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{67}{9} = 0$$

$$\text{Ta có } \Delta = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{67}{9} = -\frac{88}{3} < 0$$

Vậy phương trình vô nghiệm

$$2) \text{ Ta có: } \Delta' = (m+1)^2 - 1 \cdot (m^2 - 2m + 3) = m^2 + 2m + 1 - m^2 + 2m - 3 = 4m - 2$$

Phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2m + 3 = 0$ có nghiệm khi $\Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow 4m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2} \quad (*)$$

Vậy để phương trình có nghiệm thì $m \geq \frac{1}{2}$

$$3) \text{ Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dương thì: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Áp dụng định lí Vi-et ta có:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2(m+1) \\ P = x_1 x_2 = m^2 - 2m + 3 \end{cases}$$

Thế vào (2) ta có:
$$\begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ 2(m+1) > 0 \\ m^2 - 2m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m > -1 \\ (m-1)^2 + 2 > 0 \text{ (ld)} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$$

Vậy để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt thì $m > \frac{1}{2}$

4)

a. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^3 + x_2^3 = 40$.

Ta có $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)$

$$\begin{aligned} &= (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 \right] = (2m+2) \left[4(m+1)^2 - 3(m^2 - 2m + 3) \right] \\ &= (2m+2) \left[(4m^2 + 8m + 4) - 3m^2 + 6m - 9 \right] \\ &= (2m+2)(m^2 + 14m - 5) \\ &= 2m^3 + 30m^2 + 18m - 10 \end{aligned}$$

Mà $x_1^3 + x_2^3 = 40$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2m^3 + 30m^2 + 18m - 10 &= 40 \\ \Leftrightarrow 2m^3 + 30m^2 + 18m - 50 &= 0 \\ \Leftrightarrow (m-1)(2m^2 + 32m + 50) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m^2 + 16m + 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m = -8 \pm \sqrt{39} \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp ĐK (*) suy ra $m=1$ (thỏa mãn).

Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

b. Viết lại biểu thức $\frac{1}{x_1^2} - \frac{4x_2}{x_1} + 3x_2^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 4x_1 x_2}{x_1^2} + 3x_2^2 = 0 \Leftrightarrow 3x_1^2 x_2^2 - 4x_1 x_2 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 3(x_1 x_2)^2 - 4x_1 x_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x_1 x_2 - 1)(3x_1 x_2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 - 1 = 0 \\ 3x_1 x_2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Với $x_1 x_2 = 1$ ta có $m^2 - 2m + 3 = 1 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 2 = 0$ (vô nghiệm)

Với $x_1 x_2 = \frac{1}{3}$ ta có $m^2 - 2m + 3 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3m^2 - 6m + 8 = 0$ (vô nghiệm)

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Vậy không có giá trị m thỏa mãn đề bài.

c.

Bổ sung: Điều kiện: $\begin{cases} x_1 \neq 0 \\ x_2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + 2 \neq 0$ (luôn đúng với mọi m)

$$\text{Ta có: } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 6 \Leftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = 6 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2m+2)^2 - 2(m^2 - 2m + 3)}{m^2 - 2m + 3} = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{4m^2 + 8m + 4 - 2m^2 + 4m - 6}{m^2 - 2m + 3} = 6 \Leftrightarrow \frac{2m^2 + 12m - 2}{m^2 - 2m + 3} = 6$$

$$\Rightarrow 2m^2 + 12m - 2 = 6m^2 - 12m + 18 \Leftrightarrow 4m^2 - 24m + 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \end{cases}$$

Kết hợp ĐK (*) được $\begin{cases} m = 1 \\ m = 5 \end{cases}$.

Vậy $m \in \{1; 5\}$ là giá trị cần tìm.

d. Ta có:

$$P = (2x_1 + x_2)(2x_2 + x_1)$$

$$= 4x_1 x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 x_2 = 2(x_1^2 + x_2^2) + 5x_1 x_2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 + 5x_1 x_2 = 2(x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2$$

$$= 2(2m+2)^2 + m^2 - 2m + 3 = 8(m^2 + 2m + 1) + m^2 - 2m + 3$$

$$= 8m^2 + 16m + 8 + m^2 - 2m + 3 = 9m^2 + 14m + 11$$

$$P = (3m)^2 + 2 \cdot 3m \cdot \frac{7}{3} + \frac{49}{9} + \frac{50}{9} = \left(3m + \frac{7}{3}\right)^2 + \frac{50}{9}$$

$$\text{Mà } m \geq \frac{1}{2} \text{ nên } 3m + \frac{7}{3} \geq 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{3} = \frac{23}{6} \text{ nên } P \geq \left(\frac{23}{6}\right)^2 + \frac{50}{9} = \frac{81}{4}$$

$$\text{KL: min } P = \frac{81}{4} \text{ đạt khi } m = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2m + 3 = 0$$

5.

Với $m \geq \frac{1}{2}$ phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1; x_2$ nên theo định lý Viet ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 2m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) + 4 & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = (m-1)^2 + 2 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow m-1 = \frac{x_1 + x_2 - 4}{2}$ thay vào (2) ta được:

$$x_1 x_2 = \left(\frac{x_1 + x_2 - 4}{2} \right)^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 4x_1 x_2 = (x_1 + x_2 - 4)^2 + 8$$

$$\Leftrightarrow 4x_1 x_2 = x_1^2 + x_2^2 + 16 + 2x_1 x_2 - 8x_2 - 8x_1 + 8$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 - 8x_2 - 8x_1 + 24 = 0$$

Vậy hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m là:

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 - 8x_2 - 8x_1 + 24 = 0$$

Bài 4. Cho phương trình $x^2 - 2(2m+1)x + 4m^2 + 4m = 3$ (1); với m là tham số.

1) Giải phương trình (1) với $m = -4$.

2) Tìm m để (1) có một nghiệm bằng 0,5. Tìm nghiệm còn lại.

3) Chứng tỏ phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

4) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

a) $x_1 + x_2 = 10x_1 x_2 - 3$.

b) $2 < x_1 < x_2 < 5$.

c) $|x_1| = 2|x_2|$.

d) $x_1 - 3x_2 < 6$.

e) $x_1 - x_2 + 5x_1 x_2 = 6$

f) $\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{2}{x_2 - 1} = \frac{1}{2}$.

g) Biểu thức $P = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4(x_1 + x_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Bài 5. Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2 - 2(2m+1)x + 4m^2 + 4m - 3 = 0$; với m là tham số.

1) Giải phương trình (1) với $m = -4$.

Với $m = -4$ phương trình (1) trở thành $x^2 + 14x + 45 = 0$

$\Delta' = 7^2 - 45 = 4 > 0$, phương trình $x^2 + 14x + 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

CHUYÊN ĐỀ 9.HỆ THỨC VI-ÉT

$$x_1 = -7 + \sqrt{4} = -5$$

$$x_2 = -7 - \sqrt{4} = -9$$

Vậy với $m = -4$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -5$, $x_2 = -9$

2) Tìm m để (1) có một nghiệm bằng 0,5. Tìm nghiệm còn lại.

Phương trình (1) có một nghiệm bằng 0,5 nên thay $x = x_1 = 0,5$ vào (1) ta được

$$0,5^2 - 2(2m+1) \cdot 0,5 + 4m^2 + 4m = 3$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 2m - \frac{15}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 16m^2 + 8m - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4m - 3)(4m + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{4} \\ m = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Vì phương trình (1) có nghiệm nên áp dụng hệ thức Vi-ét ta có $x_1 x_2 = 4m^2 + 4m - 3$

Mà $x_1 = 0,5$ suy ra $x_2 = 8m^2 + 8m - 6$

$$+) \text{ Với } m = \frac{3}{4} \text{ thì } x_2 = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 8 \cdot \frac{3}{4} - 6 = 18.$$

$$+) \text{ Với } m = -\frac{5}{4} \text{ thì } x_2 = 8 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right)^2 + 8 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) - 6 = -\frac{7}{2}.$$

3) Chứng tỏ phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2 - 2(2m+1)x + 4m^2 + 4m - 3 = 0$; với m là tham số.

$$\text{Có } \Delta' = (2m+1)^2 - (4m^2 + 4m - 3) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4m + 3 = 4 > 0$$

Suy ra phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .

4) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$a) x_1 + x_2 = 10x_1 x_2 - 3.$$

$$b) 2 < x_1 < x_2 < 5.$$

c) $|x_1| = 2|x_2|$.

d) $x_1 - 3x_2 < 6$.

e) $x_1 - x_2 + 5x_1x_2 = 6$

f) $\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{2}{x_2 - 1} = \frac{1}{2}$.

g) Biểu thức $P = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4(x_1 + x_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

* Phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2 - 2(2m+1)x + 4m^2 + 4m - 3 = 0$ có $\Delta' = 4 > 0$

$\Rightarrow$ phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .

Một nghiệm là $2m+1 - \sqrt{4} = 2m-1$

Nghiệm còn lại là $2m+1 + \sqrt{4} = 2m+3$

a) Ta có $x_1 + x_2 = 10x_1x_2 - 3$ nên x_1, x_2 có vai trò bình đẳng do đó

$$x_1 + x_2 = 10x_1x_2 - 3$$

$$\Leftrightarrow 2m-1 + 2m+3 = 10(2m-1)(2m+3) - 3$$

$$\Leftrightarrow 4m+2 = 10(4m^2 + 4m - 3) - 3$$

$$\Leftrightarrow 40m^2 + 36m - 35 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-9 + \sqrt{431}}{20} \text{ (thỏa mãn)} \\ m = \frac{-9 - \sqrt{431}}{20} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy $m = \frac{-9 + \sqrt{431}}{20}$ hoặc $m = \frac{-9 - \sqrt{431}}{20}$ là giá trị cần tìm.

b) Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m là $2m-1$ và $2m+3$.

Vì $2m-1 < 2m+3$ mà $x_1 < x_2$ nên $x_1 = 2m-1, x_2 = 2m+3$

Do đó $2 < x_1 < x_2 < 5 \Leftrightarrow 2 < 2m-1 < 2m+3 < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 > 2 \\ 2m+3 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{3}{2} \\ m < 1 \end{cases}$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn đề bài.

c) $|x_1| = 2|x_2|$.

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m là $2m-1$ và $2m+3$

Xét 2 trường hợp

+) Trường hợp 1: $x_1 = 2m-1, x_2 = 2m+3$

Khi đó $|x_1| = 2|x_2| \Leftrightarrow |2m-1| = 2|2m+3| \Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 = 4(4m^2 + 12m + 9)$

$$\Leftrightarrow 12m^2 + 52m + 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{7}{2} \text{ (thoả mãn)} \\ m = -\frac{5}{6} \text{ (thoả mãn)} \end{cases}$$

+) Trường hợp 2: $x_1 = 2m+3, x_2 = 2m-1$

Khi đó $|x_1| = 2|x_2| \Leftrightarrow |2m+3| = 2|2m-1| \Leftrightarrow 4m^2 + 12m + 9 = 4(4m^2 - 4m + 1)$

$$\Leftrightarrow 12m^2 - 28m - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{6} \text{ (thoả mãn)} \\ m = \frac{5}{2} \text{ (thoả mãn)} \end{cases}$$

Vậy $m = -\frac{7}{2}; m = -\frac{5}{6}; m = -\frac{1}{6}; m = \frac{5}{2}$ là các giá trị cần tìm.

d) Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m là $2m-1$ và $2m+3$

Xét 2 trường hợp

+) Trường hợp 1: $x_1 = 2m-1, x_2 = 2m+3$

Khi đó $x_1 - 3x_2 < 6 \Leftrightarrow 2m-1 - 3(2m+3) < 6 \Leftrightarrow -4m < 16 \Leftrightarrow m > -4$ (thoả mãn)

+) Trường hợp 2: $x_1 = 2m+3, x_2 = 2m-1$

Khi đó $x_1 - 3x_2 < 6 \Leftrightarrow 2m+3 - 3(2m-1) < 6 \Leftrightarrow -4m < 0 \Leftrightarrow m > 0$ (thoả mãn)

Vậy $m > -4$ là giá trị cần tìm.

e) Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m là $2m-1$ và $2m+3$

Xét 2 trường hợp

+) Trường hợp 1: $x_1 = 2m-1, x_2 = 2m+3$

Khi đó $x_1 - x_2 + 5x_1x_2 = 6$

$$\Leftrightarrow (2m-1) - (2m+3) + 5(2m-1)(2m+3) = 6$$

$$\Leftrightarrow -4 + 5(4m^2 + 4m - 3) = 6$$

$$\Leftrightarrow 20m^2 + 20m - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-1 + \sqrt{6}}{2} \text{ (thỏa mãn)} \\ m = \frac{-1 - \sqrt{6}}{2} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

+) Trường hợp 2: $x_1 = 2m + 3$, $x_2 = 2m - 1$

Khi đó $x_1 - x_2 + 5x_1x_2 = 6$

$$\Leftrightarrow (2m + 3) - (2m - 1) + 5(2m + 3)(2m - 1) = 6$$

$$\Leftrightarrow 4 + 5(4m^2 + 4m - 3) = 6$$

$$\Leftrightarrow 20m^2 + 20m - 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-5 + \sqrt{110}}{10} \text{ (thỏa mãn)} \\ m = \frac{-5 - \sqrt{110}}{10} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy $m \in \left\{ \frac{-1 + \sqrt{6}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{6}}{2}; \frac{-5 + \sqrt{110}}{10}; \frac{-5 - \sqrt{110}}{10} \right\}$ là giá trị cần tìm.

f) Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m là $2m - 1$ và $2m + 3$

Xét 2 trường hợp

+) Trường hợp 1: $x_1 = 2m - 1$, $x_2 = 2m + 3$

$$\text{Khi đó } \frac{1}{x_1 - 2} + \frac{2}{x_2 - 1} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2m - 3} + \frac{2}{2m + 2} = \frac{1}{2} \quad \left(\text{Điều kiện: } m \neq \frac{3}{2}, m \neq -1 \right)$$

$$\Leftrightarrow 2(2m + 2) + 4(2m - 3) = (2m - 3)(2m + 2)$$

$$\Leftrightarrow 4m + 4 + 8m - 12 = 4m^2 - 2m - 6$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 14m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{7 + \sqrt{41}}{4} \text{ (thỏa mãn)} \\ m = \frac{7 - \sqrt{41}}{4} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

+) Trường hợp 2: $x_1 = 2m + 3$, $x_2 = 2m - 1$

Khi đó $\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{2}{x_2 - 1} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2m+1} + \frac{2}{2m-2} = \frac{1}{2} \quad (\text{Điều kiện: } m \neq \frac{-1}{2}, m \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow 2(2m-2) + 4(2m+1) = (2m+1)(2m-2)$$

$$\Leftrightarrow 4m - 4 + 8m + 4 = 4m^2 - 2m - 2$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 14m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{7+3\sqrt{5}}{4} (\text{thỏa mãn}) \\ m = \frac{7-3\sqrt{5}}{4} (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

Vậy $m \in \left\{ \frac{7+\sqrt{41}}{4}; \frac{7-\sqrt{41}}{4}; \frac{7+3\sqrt{5}}{4}; \frac{7-3\sqrt{5}}{4} \right\}$ là giá trị cần tìm.

g) Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m là $2m - 1$ và $2m + 3$

Xét 2 trường hợp

+) Trường hợp 1: $x_1 = 2m - 1$, $x_2 = 2m + 3$

Khi đó $P = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4(x_1 + x_2)$

$$= 2(2m-1)^2 + 3(2m+3)^2 - 4(2m-1+2m+3)$$

$$= 2(4m^2 - 4m + 1) + 3(4m^2 + 12m + 9) - 4(4m + 2)$$

$$= 20m^2 + 12m + 21$$

$$= 20 \left(m^2 + \frac{3}{5}m + \frac{21}{20} \right)$$

$$= 20 \left(m^2 + 2 \cdot \frac{3}{10}m + \frac{9}{100} + \frac{24}{25} \right)$$

$$= 20 \left(m + \frac{3}{10} \right)^2 + \frac{96}{5} \geq \frac{96}{5}, \forall m$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m + \frac{3}{10} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{10}$

+) Trường hợp 2: $x_1 = 2m + 3$, $x_2 = 2m - 1$

$$\begin{aligned}
\text{Khi đó } P &= 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4(x_1 + x_2) \\
&= 2(2m+3)^2 + 3(2m-1)^2 - 4(2m+3+2m-1) \\
&= 2(4m^2 + 12m + 9) + 3(4m^2 - 4m + 1) - 4(4m + 2) \\
&= 20m^2 - 4m + 13 \\
&= 20\left(m^2 - \frac{1}{5}m + \frac{13}{20}\right) \\
&= 20\left(m^2 - 2 \cdot \frac{1}{10}m + \frac{1}{100} + \frac{16}{25}\right) \\
&= 20\left(m - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{64}{5} \geq \frac{64}{5}, \forall m
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m - \frac{1}{10} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{10}$

Vậy biểu thức $P = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4(x_1 + x_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{64}{5}$ tại $m = \frac{1}{10}$.

Bài 6. Cho phương trình $x : x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0$ (1) ; với m là tham số thực.

- Giải phương trình (1) với $m = 2$.
- Tìm m để phương trình (1) có một nghiệm bằng 5, tìm nghiệm còn lại.
- Chứng minh rằng (1) luôn luôn có hai nghiệm khi m thay đổi.
- Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện:

- $x_1 + x_2 = 7x_1x_2 + 8m$.
- Biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2 - 3(x_1 + x_2) + 2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- $2x_1 - x_2 = 4$.
- $1 < x_1 < x_2 < 6$.
- Có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 3)$.
- Biểu thức $Q = (x_1 - 2)(3 - x_2)$ đạt giá trị lớn nhất.
- $\frac{1}{2x_1 + 3} + \frac{4}{5x_2 + 6} = 7$.

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Lời giải.

1. Giải phương trình (1) với $m=2$.

Thay $m=2$ vào (1), ta được: $x^2 - x - 2 = 0$

$$(a=1; b=-1; c=-2)$$

Vì $a-b+c=1-(-1)+(-2)=0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = -1; x_2 = \frac{-c}{a} = \frac{2}{1} = 2$$

2. Tìm m để phương trình (1) có một nghiệm bằng 5, tìm nghiệm còn lại.

Vì (1) có một nghiệm bằng 5 nên thay $x=5$ vào (1) ta được:

$$5^2 - (2m-3)5 + m^2 - 3m = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 13m + 40 = 0$$

Giải phương trình ta tìm được nghiệm $m=5; m=8$

+) Thay $m=5$ vào phương trình (1), ta có

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow S = \{2; 5\}$$

+) Thay $m=8$ vào phương trình (1), ta có

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 13x + 40 = 0 \Rightarrow S = \{5; 8\}$$

Vậy

với $m=5$ thì phương trình đã cho có một nghiệm bằng 5, khi đó nghiệm còn lại lần lượt là 2.

với $m=8$ thì phương trình đã cho có một nghiệm bằng 5, khi đó nghiệm còn lại lần lượt là 8.

Chứng minh rằng (1) luôn luôn có hai nghiệm khi m thay đổi.

$$x^2 - (2m-3)x + m^2 - 3m = 0$$

$$(a=1; b=-(2m-3); c=m^2-3m)$$

$$\Delta_m = (2m-3)^2 - 4(m^2-3m)$$

$$= 4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 + 12m$$

$$= 9$$

Vì $\Delta_m = 9 > 0$ với mọi số thực m , nên phương trình (1) luôn luôn có hai nghiệm khi m thay đổi.

4. Phương trình (1) có $\Delta_m > 0$ nên luôn luôn có hai nghiệm phân biệt với m thay đổi.

$$\text{Khi đó: } S = \left\{ \frac{2m-3+\sqrt{9}}{2}; \frac{2m-3-\sqrt{9}}{2} \right\} = \{m; m-3\} \quad (*)$$

Theo Vi-et:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 3 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3m \end{cases}$$

a) Ta có: $x_1 + x_2 = 7x_1x_2 + 8m$

$$\Leftrightarrow 2m - 3 = 7(m^2 - 3m) + 8m$$

$$\Leftrightarrow 2m - 3 = 7m^2 - 13m$$

$$\Leftrightarrow 7m^2 - 15m + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{15 - \sqrt{141}}{14}; m = \frac{15 + \sqrt{141}}{14}$$

b) $P = x_1^2 + x_2^2 - 3(x_1 + x_2) + 2$

$$P = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 2$$

$$P = (2m - 3)^2 - 2(m^2 - 3m) - 3(2m - 3) + 2$$

$$P = 4m^2 - 12m + 9 - 2m^2 + 6m - 6m + 9 + 2$$

$$P = 2(m^2 - 6m + 9) + 2$$

$$P = 2(m - 3)^2 + 2 \geq 2, \forall m$$

Dấu "=" xảy ra khi $m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$

c) Ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 3 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = 2m + 1 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2m + 1}{3} \\ \frac{4m + 2}{3} - x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2m + 1}{3} \\ x_2 = \frac{4m + 2}{3} - 4 = \frac{4m - 10}{3} \end{cases}$$

Mà $x_1 \cdot x_2 = m^2 - 3m$

$$\Leftrightarrow \frac{2m + 1}{3} \cdot \frac{4m - 10}{3} = m^2 - 3m$$

$$\Leftrightarrow (2m + 1)(4m - 10) = 9(m^2 - 3m)$$

$$\Leftrightarrow 8m^2 - 20m + 4m - 10 = 9m^2 - 27m$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 11m + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 1; m = 10$$

Cách giải khác:

+) Xét:
$$\begin{cases} x_1 = m \\ x_2 = m - 3 \end{cases}$$

Khi đó: $2x_1 - x_2 = 4 \Leftrightarrow 2m - m + 3 = 4 \Leftrightarrow m = 1$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

+) Xét: $\begin{cases} x_1 = m - 3 \\ x_2 = m \end{cases}$

Khi đó: $2x_1 - x_2 = 4 \Leftrightarrow 2(m - 3) - m = 4 \Leftrightarrow m = 10$

d) Ta có: $1 < x_1 < x_2 < 6$ mà $x \in \{m; m - 3\}$

Nên $x_1 = m - 3$; $x_2 = m$

Khi đó:

$$1 < x_1 < x_2 < 6$$

$$\Rightarrow 1 < m - 3 < m < 6$$

$$\Rightarrow 4 < m < 6$$

e) Để phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1; 3)$ thì: $\begin{cases} 1 < m < 3 \\ 1 < m - 3 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 3 \\ 4 < m < 6 \end{cases}$

f) Xét biểu thức :

$$Q = (x_1 - 2)(3 - x_2) = -(x_1 x_2 - 3x_1 - 2x_2 + 6)$$

+) Với $\begin{cases} x_1 = m \\ x_2 = m - 3 \end{cases}$, ta được:

$$Q = -(m^2 - 3m - 3m - 2m + 6 + 6) = -(m^2 - 8m + 12)$$

$$Q = -(m^2 - 8m + 16) + 4 = -(m - 4)^2 + 4 \leq 4 \quad \text{với mọi } m$$

Dấu “=” xảy ra khi $m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

+) Với $\begin{cases} x_1 = m - 3 \\ x_2 = m \end{cases}$, ta được:

$$Q = -(m^2 - 3m - 3m + 9 - 2m + 6) = -(m^2 - 8m + 15)$$

$$Q = -(m^2 - 8m + 16) + 1 = -(m - 4)^2 + 1 \leq 1 \quad \text{với mọi } m$$

Dấu “=” xảy ra khi $m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

g) $\frac{1}{2x_1 + 3} + \frac{4}{5x_2 + 6} = 7$

$$\Leftrightarrow \frac{5x_2 + 6 + 8x_1 + 12}{(2x_1 + 3)(5x_2 + 6)} = 7 \quad (\text{đặt điều kiện})$$

$$\Leftrightarrow 5x_2 + 6 + 8x_1 + 12 = 7(2x_1 + 3)(5x_2 + 6)$$

$$\Leftrightarrow 70x_1 x_2 + 76x_1 + 100x_2 + 108 = 0$$

$$\Leftrightarrow 70x_1 x_2 + 76(x_1 + x_2) + 24x_2 + 108 = 0$$

$$\Leftrightarrow 35x_1 x_2 + 38(x_1 + x_2) + 12x_2 + 59 = 0 \quad (2)$$

+) Với $\begin{cases} x_1 = m \\ x_2 = m - 3 \end{cases}$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 35(m^2 - 3m) + 38(2m - 3) + 12(m - 3) + 59 = 0$$

$$\Leftrightarrow 35m^2 - 17m - 91 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{17 \pm \sqrt{13029}}{70}$$

+) Với $\begin{cases} x_1 = m - 3 \\ x_2 = m \end{cases}$, ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 35(m^2 - 3m) + 38(2m - 3) + 12m + 59 = 0$$

$$\Leftrightarrow 35m^2 - 17m - 55 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{17 \pm \sqrt{7989}}{70}$$

Bài 7. Cho phương trình $x^2 - 2mx - 1 = 0$ (1); với m là tham số thực.

a) Giải phương trình (1) với $m = 2$.

b) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (1)

c) Tính theo m giá trị của biểu thức $M = x_1 - x_2$.

d) Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$.

e) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x_1^2 + x_2^2 - 6(x_1 + x_2) + 10$.

f) Tìm m để $x_2^2 + 2mx_1 - 1 = 16m^3$.

g) Chứng minh rằng ít nhất một trong hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $|x| \geq 1$.

Lời giải

a) Giải phương trình (1) với $m = 2$.

Với $m = 2$ ta có phương trình $x^2 - 4x - 1 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(-1) = 20.$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) - \sqrt{20}}{2.1} = 2 - \sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) + \sqrt{20}}{2.1} = 2 + \sqrt{5}$$

b) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4(1)(-1) = 4m^2 + 4 \geq 4 > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (1)

c) Tính theo m giá trị của biểu thức $M = x_1 - x_2$.

Áp dụng hệ thức Viét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2m \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -1 \end{cases}$$

$$\text{Ta xét } M^2 = (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = (2m)^2 - 4(-1) = 4m^2 + 4.$$

$$\Leftrightarrow M = \pm \sqrt{4m^2 + 4} = \pm 2\sqrt{m^2 + 1} \text{ (vì } 4m^2 + 4 > 0 \text{)}$$

d) Tìm m để $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 7$.

$$\text{Ta có } x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 7 \Leftrightarrow (2m)^2 - 3(-1) = 7 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

e) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x_1^2 + x_2^2 - 6(x_1 + x_2) + 10$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= x_1^2 + x_2^2 - 6(x_1 + x_2) + 10 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 6(x_1 + x_2) + 10 \\ &= (2m)^2 - 2(-1) - 6(2m) + 10 = 4m^2 - 12m + 12 = (2m - 3)^2 + 3 \geq 3, \forall m \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } S \text{ là } 3 \text{ khi } m = \frac{3}{2}.$$

f) Tìm m để $x_2^2 + 2mx_1 - 1 = 16m^3$.

$$\text{Vì } x_2 \text{ là nghiệm của phương trình (1) nên } x_2^2 - 2mx_2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_2^2 - 1 = 2mx_2.$$

$$\text{Ta có } x_2^2 + 2mx_1 - 1 = 16m^3 \Leftrightarrow 2m(x_1 + x_2) = 16m^3 \Leftrightarrow 2m(2m) = 16m^3 \Leftrightarrow 16m^3 - 4m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2(4m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{1}{4} \end{cases}$$

g) Chứng minh rằng ít nhất một trong hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $|x| \geq 1$.

$$\text{Ta có } x_1 x_2 = -1 \Rightarrow |x_1 x_2| = 1 \Rightarrow |x_1| \cdot |x_2| = 1.$$

Giả sử $|x_1|$ và $|x_2|$ đều bé hơn 1, suy ra $|x_1| \cdot |x_2| < 1$ (mâu thuẫn $|x_1| \cdot |x_2| = 1$)

Vậy ít nhất một trong hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $|x| \geq 1$.

Bài 8. Cho phương trình bậc hai ẩn x : $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ (1), m là tham số.

1. Giải phương trình (1) với $m = -4$.
2. Tìm các giá trị của m để (1) có nghiệm bằng 4, tìm nghiệm còn lại.
3. Tìm tất cả các giá trị của m để (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dương.
4. Tìm các giá trị của m để (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện:
 - a) $x_1 = x_2$.
 - b) $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 1$.
 - c) $x_1^2 + x_2^2 - 7x_1 x_2 + 5(x_1 + x_2) = 0$.
 - d) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$.
 - e) $\sqrt{x_1^2 + 2(m+1)x_2 + m^2 - 1} = m - 3$
5. Tìm các giá trị nguyên của m để (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $P = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

1. Với $m = -4$, phương trình (1) trở thành $x^2 + 6x + 15 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + 6 = 0.$$

Vì $(x+3)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $(x+3)^2 + 6 \geq 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy phương trình (1) vô nghiệm khi $m = -4$.

Cách khác: Phương trình $x^2 + 6x + 15 = 0$ vô nghiệm vì có $\Delta = 6^2 - 4.15 < 0$.

2. Tìm các giá trị của m để (1) có nghiệm bằng 4, tìm nghiệm còn lại.

Thay $x = 4$ vào phương trình (1) $\Rightarrow 16 - 2(m+1).4 + m^2 - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 8m + 7 = 0$$

Ta có $a + b + c = 1 - 8 + 7 = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm $m_1 = 1; m_2 = 7$.

TH1. $m = 1$, khi đó phương trình (1) trở thành $x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$.

TH2. $m = 7$, khi đó phương trình (1) trở thành $x^2 - 16x + 48 = 0$.

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\Delta' = 64 - 48 = 16$$

Phương trình có 2 nghiệm: $x_1 = \frac{8+4}{1} = 12$; $x_2 = 8 - 4 = 4$.

Vậy có 2 giá trị m cần tìm là $m = 1$, $m = 7$.

3. Tìm tất cả các giá trị của m để (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dương.

$$x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$$

$$\Delta' = (m+1)^2 - m^2 + 1 = 2m + 2$$

*) Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

*) Áp dụng hệ thức Viet, ta có $x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{1}$; $x_1 x_2 = m^2 - 1$.

*) Phương trình (1) có 2 nghiệm cùng dương khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(m+1) > 0 \\ m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ (m+1)(m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1 \end{aligned}$$

Kết hợp điều kiện ta được $m > 1$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dương.

4. Tìm các giá trị của m để (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện:

*) Phương trình (1) có 2 nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 2m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$.

*) Áp dụng hệ thức Viet, ta có $x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{1}$; $x_1 x_2 = m^2 - 1$.

a) $x_1 = x_2$.

Thay $x_1 = x_2$ vào hệ thức Viet ta có

$$\begin{cases} 2x_1 = 2(m+1) \\ x_1^2 = m^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow (m+1)^2 = m^2 - 1 \Leftrightarrow 2m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Thử lại ta được $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Cách khác: Yêu cầu bài toán tương đương với $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = -1$.

b) $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow 2(m+1) + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ (thỏa mãn).

c) $x_1^2 + x_2^2 - 7x_1 x_2 + 5(x_1 + x_2) = 0$.

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 9x_1 x_2 + 5(x_1 + x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2m+2)^2 - 9(m^2 - 1) + 5(2m+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 8m + 4 - 9m^2 + 9 + 10m + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow -5m^2 + 18m + 23 = 0$$

Vì $a - b + c = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm $m_1 = -1; m_2 = \frac{23}{5}$ (thỏa mãn)

$$d) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 2 \Leftrightarrow \frac{2m + 2}{m^2 - 1} = 2$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 2 = 2m + 2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + 1)(m - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 (\text{loại}) \\ m = 2 (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

$$e) \sqrt{x_1^2 + 2(m + 1)x_2 + m^2 - 1} = m - 3 (*)$$

*) Áp dụng hệ thức Viet, ta có $x_1 + x_2 = \frac{2(m + 1)}{1}; x_1 x_2 = m^2 - 1$.

Thay vào (*) ta có $\sqrt{x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 + x_1 x_2} = m - 3$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x_1 + x_2)^2} = m - 3$$

$$\Leftrightarrow |x_1 + x_2| = m - 3$$

$$\Leftrightarrow |2m + 2| = m - 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -5 \\ m = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Thử lại ta thấy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

5. Tìm các giá trị nguyên của m để (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều

kiện $P = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ nhận giá trị nguyên.

*) Phương trình (1) có 2 nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 2m + 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$.

*) Áp dụng hệ thức Viet, ta có $x_1 + x_2 = \frac{2(m + 1)}{1}; x_1 x_2 = m^2 - 1$.

$$P = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{2m + 2}{m^2 - 1} = \frac{2(m + 1)}{(m + 1)(m - 1)} = \frac{2}{m - 1}$$

$$P \in \mathbb{Z} \Rightarrow m - 1 \in U(2) = \{-2; -1; 1; 2\}$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 0 \\ m = 2 \\ m = 3 \end{cases}.$$

Thử lại ta được $m = 0, m = 2, m = 3$ là các giá trị cần tìm.

Bài 9. Cho phương trình ẩn x : $x^2 - (a^2 + 3)x + a^2 + 2 = 0$ (1) với a là tham số thực.

1. Giải phương trình (1) với $a = 1$.
2. Tìm a để phương trình (1) có một nghiệm bằng 1. Tìm nghiệm còn lại.
3. Chứng minh rằng phương trình đã cho luôn luôn có hai nghiệm phân biệt cùng dương.
4. Tìm giá trị a để hai nghiệm x_1, x_2 của (1) thỏa mãn:
 - a) $x_1 + x_2 = 4x_1 \cdot x_2 - 1$.
 - b) $x_1 > 2; x_2 > 2$.
 - c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2}$.
 - d) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2 + a$.

Lời giải

1. Với $a = 1$, phương trình (1) trở thành $x^2 - 4x + 3 = 0$.

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0$$

Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{4+2}{2} = 3 \\ x_2 &= \frac{4-2}{2} = 1 \end{aligned}.$$

Vậy với $a = 1$ phương trình đã cho có nghiệm $x_1 = 3, x_2 = 1$.

2. Phương trình (1) có một nghiệm bằng 1 khi và chỉ khi $1^2 - (a^2 + 3) \cdot 1 + a^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 1 - a^2 - 3 + a^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot a = 0$

Do đó phương trình (1) luôn có một nghiệm $x_1 = 1$ với mọi $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó theo Viet, ta có } x_1 \cdot x_2 = \frac{a^2 + 2}{1} \Rightarrow 1 \cdot x_2 = \frac{a^2 + 2}{1} \Rightarrow x_2 = a^2 + 2.$$

3. Ta có $\Delta = \left[- (a^2 + 3) \right]^2 - 4(a^2 + 2).1 = a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2$.

Có $a^2 \geq 0$, với mọi $a \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow a^2 + 1 > 0, \text{ với mọi } a \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (a^2 + 1)^2 > 0, \text{ với mọi } a \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta > 0, \text{ với mọi } a \in \mathbb{R}.$$

Suy ra phương trình đã cho luôn luôn có nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Áp dụng định lí Vi – ét, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a^2 + 3 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = a^2 + 2 > 0 \end{cases} \text{ với mọi } a \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ phương trình đã cho luôn luôn có hai nghiệm phân biệt cùng dương.

4. Vì phương trình đã cho luôn luôn hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 với mọi a .

Áp dụng định lí Vi – ét, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a^2 + 3 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = a^2 + 2 > 0 \end{cases}.$$

a) Theo bài ra ta có

$$x_1 + x_2 = 4x_1 \cdot x_2 - 1 \Leftrightarrow a^2 + 3 = 4(a^2 + 2) - 1 \Leftrightarrow a^2 + 3 - 4a^2 - 8 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 = -\frac{4}{3} \text{ (VN)}.$$

Vậy không có giá trị của a thỏa mãn điều kiện đề bài.

b) Theo bài ra ta có

$$\begin{cases} x_1 > 2 \\ x_2 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \\ x_1 + x_2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \\ x_1 + x_2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2 - 2a^2 - 6 + 4 > 0 \\ a^2 + 3 > 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a^2 > 0 \text{ (VL)} \\ a^2 > 1 \end{cases}$$

Vậy không có giá trị nào của a thỏa mãn đề bài.

c) Theo bài ra ta có

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) = 3x_1 x_2 \Leftrightarrow 2a^2 + 6 = 3a^2 + 6 \Leftrightarrow a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Vậy $a = 0$ là giá trị cần tìm.

d) Theo câu b) phương trình đã luôn có nghiệm bằng $x = 1$ và một nghiệm

$$x = a^2 + 2.$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Không mất tính tổng quát giả sử $x_1 = 1; x_2 = a^2 + 2$.

Theo bài ra ta có

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2 + a$$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{a^2 + 2} = 2 + a \Rightarrow \sqrt{a^2 + 2} = a + 1$$

$$\Rightarrow a^2 + 2 = a^2 + 2a + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Thử lại ta được $a = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài 10. Cho phương trình bậc hai ẩn x : $x^2 + bx + c = 0$ (1) (với b và c là tham số thực)

1. Giải phương trình khi $b = -3; c = 2$.

2. Giả dụ $b + c = -1$. Hãy tìm b và c để (1) có nghiệm thỏa mãn:

a) Tích hai nghiệm bằng 1.

b) Hiệu hai nghiệm bằng 3.

c) Nghiệm này bằng 4 lần nghiệm kia.

d) Tổng lũy thừa bậc 5 của hai nghiệm bằng 2.

3. Khi $c = 1$, tìm b để phương trình có hai nghiệm sao cho $R = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 4)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

1) Khi $b = -3; c = 2$, phương trình (1) trở thành $x^2 - 3x + 2 = 0$. Phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có $a + b + c = 1 - 3 + 2 = 0$ nên phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = 1; x_2 = 2$.

2) Xét phương trình (1) có $\Delta = b^2 - 4c$.

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow b^2 - 4c \geq 0 \Leftrightarrow b^2 \geq 4c$ (*)

Khi đó gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1). Theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 x_2 = c & (3) \end{cases}$$

a) Vì tích 2 nghiệm bằng 1 tức là $x_1 x_2 = 1 \Rightarrow c = 1$ mà $b + c = -1 \Rightarrow b = -2$.

Giá trị $b = -2; c = 1$ thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy $b = -2; c = 1$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Không mất tính tổng quát giả sử $x_1 - x_2 = 3$ (4), kết hợp với (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3-b}{2} \\ x_2 = \frac{-3-b}{2} \end{cases}$$

thay vào (3) ta được: $\left(\frac{3-b}{2}\right)\left(\frac{-3-b}{2}\right) = c \Leftrightarrow b^2 - 9 = 4c$ mà $b + c = -1 \Rightarrow c = -1 - b$

$$\Leftrightarrow b^2 - 9 = 4(-b - 1) \Leftrightarrow b^2 - 9 = -4b - 4$$

$$\Leftrightarrow b^2 + 4b - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = -5 \end{cases}$$

Với $b_1 = 1$ thì $c_1 = -2$ thỏa mãn điều kiện (*).

Với $b_2 = -5$ thì $c_2 = 4$ thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy có 2 cặp $(b; c)$ cần tìm là $(1; -2), (-5; 4)$.

c) Do vai trò của $x_1; x_2$ là như nhau. Không mất tính tổng quát giả sử $x_1 = 4x_2$ (5), kết hợp với (2) ta được:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 = 4x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-4b}{5} \\ x_2 = \frac{-b}{5} \end{cases}$$

Thay vào (3) ta được $\left(\frac{-4b}{5}\right)\left(\frac{-b}{5}\right) = c \Leftrightarrow 4b^2 = 25c$

Mà $c = -1 - b$

$$\text{nên } 4b^2 = 25(-1 - b) \Leftrightarrow 4b^2 + 25b + 25 = 0.$$

Giải phương trình ta được $b_1 = -5; b_2 = -\frac{5}{4}$.

Với $b_1 = -5$ thì $c_1 = 4$ thỏa mãn điều kiện (*).

Với $b_2 = -\frac{5}{4}$ thì $c_2 = \frac{1}{4}$ thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy có 2 cặp $(b; c)$ cần tìm là $(-5; 4), \left(-\frac{5}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

d) Vì Tổng lũy thừa bậc 5 của hai nghiệm bằng 2, tức là $(x_1 + x_2)^5 = 2$ mà $x_1 + x_2 = -b$ (theo (2))

$$\Rightarrow (-b)^5 = 2 \Rightarrow b = -\sqrt[5]{2} \text{ khi đó } c = -1 + \sqrt[5]{2}.$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Giá trị $b = -\sqrt[5]{2}$; $c = -1 + \sqrt[5]{2}$ thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy $b = -\sqrt[5]{2}$; $c = -1 + \sqrt[5]{2}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

3) Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow b^2 - 4c \geq 0 \Leftrightarrow b^2 \geq 4c$ (*)

Khi đó gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1). Theo hệ thức Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b & (2) \\ x_1 x_2 = c & (3) \end{cases}$$

Ta có $R = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 4)$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacop-xki, ta có

$R = (x_1^2 + 1^2)(x_2^2 + 2^2) \geq (x_1 x_2 + 1 \cdot 2)^2 = (1 + 2)^2 = 9$ (Vì $x_1 x_2 = c = 1$). Dấu "=" xảy ra khi

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{3} = \frac{-b}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b}{3} \\ x_2 = \frac{-2b}{3} \end{cases}.$$

Mà $x_1 x_2 = c = 1$ (giả thiết) nên $\left(\frac{-b}{3}\right)\left(\frac{-2b}{3}\right) = 1 \Rightarrow 2b^2 = 9 \Rightarrow b^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$ thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy GTNN của $R = 9$ khi $b = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Bài 11. Cho phương trình $mx^2 - 2(m+2)x + m = 0$ (1); với m là tham số thực.

- Giải phương trình (1) khi $m = 3$.
- Tìm m để phương trình (1) có một nghiệm bằng 2, tìm nghiệm còn lại.
- Tìm giá trị của m để phương trình (1) đã cho có nghiệm.
- Tìm giá trị của m để phương trình (1) có 2 nghiệm cùng âm
- Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho:
 - $x_1 = 4x_2 - 3$
 - $x_1 + x_2 - 4x_1 x_2 = 5$
 - $x_1 + x_2 - x_1 x_2 > \frac{3}{m^2}$
 - $mx_1^2 - 2(m+2)x_2 + m = 8$
 - $x_1^3 + 3x_1 x_2^2 - 4x_2^3$
- Xác định giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt đều nguyên dương.

Lời giải

1. Khi $m=3$ ta có phương trình (1) có dạng:

$$3x^2 - 12x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\text{Xét } \Delta' = 4 - 1.1 = 3$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$x_1 = 2 - \sqrt{3} ; x_2 = 2 + \sqrt{3}$$

$$S = \left\{ 2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3} \right\}$$

2. Xét phương trình $mx^2 - 2(m+2)x + m = 0$ (1)

Để phương trình có 2 nghiệm $\Rightarrow m \neq 0$

Để phương trình (1) có nghiệm bằng 2 $\Rightarrow x=2$ thỏa mãn phương trình (1)

Thay $x=2$ vào (1) ta có: $4m - 4(m+2) + m = 0$

$$\Leftrightarrow 4m - 4m - 8 + m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 8 \text{ (tmđk)}$$

Thay $m=8$ vào phương trình (1) ta có:

$$8x^2 - 2(8+2)x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 20x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\text{Xét } \Delta = (-5)^2 - 4.2.2 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-(-5)+3}{2.2} = 2 \\ x_2 = \frac{-(-5)-3}{2.2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy khi phương trình (1) có nghiệm bằng 2 thì nghiệm còn lại sẽ bằng $\frac{1}{2}$

3. Xét phương trình $mx^2 - 2(m+2)x + m = 0$ (1)

- TH1: Với $m=0$, (1) có dạng: $-4x=0 \Leftrightarrow x=0$

Vậy khi $m=0$, phương trình có một nghiệm $x=0$

- TH2: Với $m \neq 0$, (1) có dạng phương trình bậc hai một ẩn:

$$mx^2 - 2(m+2)x + m = 0$$

$$\text{Có } \Delta' = \left[-(m+2) \right]^2 - m.m = 4m + 4$$

Để phương trình (1) có nghiệm $\Rightarrow 4m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Vậy phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq -1$

4. Xét phương trình $mx^2 - 2(m+2)x + m = 0$

Để phương trình đã cho có 2 nghiệm $\Leftrightarrow m \neq 0$

$$\text{Có } \Delta' = [- (m+2)]^2 - m.m = 4m + 4$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 4m + 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$ (1)

$$\text{Theo hệ thức viét có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m+4}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{m} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Để phương trình có 2 nghiệm cùng âm} \Rightarrow \begin{cases} x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2m+4}{m} < 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2m+4}{m} < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 0 \quad (2)$$

Vậy từ (1) và (2) $\Rightarrow -1 \leq m < 0$ thì phương trình có 2 nghiệm cùng âm.

5. Với $m \neq 0$, (1) có dạng phương trình bậc hai một ẩn:

$$mx^2 - 2(m+2)x + m = 0$$

$$\text{Có } \Delta' = [- (m+2)]^2 - m.m = 4m + 4$$

Để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow 4m + 4 > 0 \Leftrightarrow m > -1$

$$\text{Theo hệ thức viét có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m+4}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{m} = 1 \end{cases}$$

a) Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1 = 4x_2 - 3$

Xét hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 1 \\ x_1 = 4x_2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4x_2 - 3)x_2 = 1 \\ x_1 = 4x_2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_2^2 - 3x_2 - 1 = 0 \\ x_1 = 4x_2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_2 = \frac{-1}{4} \\ x_1 = 4x_2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{-1}{4} \\ x_1 = -4 \end{cases}$$

- Trường hợp 1: $\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = 1 \end{cases}$

$$\text{Có } x_1 + x_2 = \frac{2m+4}{m} \Rightarrow 1+1 = \frac{2m+4}{m} \Leftrightarrow m \in \emptyset$$

• Trường hợp 2: $\begin{cases} x_2 = -\frac{1}{4} \\ x_1 = -4 \end{cases}$

Có $x_1 + x_2 = \frac{2m+4}{m} \Rightarrow -4 + \frac{-1}{4} = \frac{2m+4}{2} \Leftrightarrow m = \frac{-25}{4}$ (ko tmdk)

Vậy không tồn tại m để có phương trình có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn: $x_1 = 4x_2 - 3$

b) Với $m \neq 0$ và $m > -1$ phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2

Theo viet có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m+4}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{m} = 1 \end{cases}$

Để $x_1 + x_2 - 4x_1 x_2 = 5 \Rightarrow \frac{2m+4}{m} - 4 = 5 \Leftrightarrow \frac{2m+4}{m} - \frac{4m}{m} = 5 \Leftrightarrow \frac{4-2m}{m} = 5$

$\Rightarrow 4 - 2m = 5m \Leftrightarrow 4 = 7m \Leftrightarrow m = \frac{4}{7}$ (tmdk)

c) Với $m \neq 0$ và $m > -1$ phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2

Theo viet có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m+4}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{m} = 1 \end{cases}$

Để $x_1 + x_2 - x_1 x_2 > \frac{3}{m^2} \Rightarrow \frac{2m+4}{m} - 1 > \frac{3}{m^2} \Leftrightarrow \frac{2m+4}{m} - \frac{m}{m} > \frac{3}{m^2} \Leftrightarrow \frac{m+4}{m} - \frac{3}{m^2} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{(m+4)m}{m^2} - \frac{3}{m^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{m^2 + 4m - 3}{m^2} > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 3 > 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 - 7 > 0$

$\Leftrightarrow (m+2)^2 > 7 \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 > \sqrt{7} \\ m+2 < -\sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \sqrt{7} - 2 \\ m < -\sqrt{7} - 2 \end{cases}$

Kết hợp Điều kiện $\Rightarrow m > \sqrt{7} - 2$

d) Với $m \neq 0$ và $m > -1$ phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2

Theo Viet có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m+4}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{m} = 1 \end{cases}$

$mx_1^2 - 2(m+2)x_2 + m = 8$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên $mx_1^2 - 2(m+2)x_1 + m = 0$.

Khi đó $mx_1^2 - 2(m+2)x_2 + m = 8 \Leftrightarrow -2(x+2)x_1 - 2(m+2)x_2 = 8$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\hat{U} - 2(m+2)(x_1 + x_2) = 8 \hat{U} - 2(m+2) \cdot \frac{2m+4}{m} = 8$$

$$\hat{U} - 4m^2 - 16m - 16 = 8m \hat{U} \begin{cases} m = 3 + \sqrt{5} \\ m = 3 - \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow m = 3 + \sqrt{5} \text{ (do } m > -1).$$

e) Với $m \neq 0$ và $m > -1$ phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2

$$\text{Theo Viet có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m+4}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{m} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Để } x_1^3 + 3x_1 x_2^2 - 4x_2^3 = 0 \Leftrightarrow x_1^3 - x_1 x_2^2 + 4x_1 x_2^2 - 4x_2^3 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + 4x_2^2) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + 1 + 4x_2^2) = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$\text{Theo viet } x_1 x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1$$

$$\text{Thay vào } x_1 + x_2 = \frac{2m+4}{m} \Rightarrow 2 = \frac{2m+4}{m} \Leftrightarrow 2m = 2m+4 \Leftrightarrow m \notin \mathbb{O}$$

6. Với $m \neq 0$ và $m > -1$ phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2

$$\text{Theo viet có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m+4}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{m} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Có } x_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2} \text{ mà } x_1 \in \mathbb{Z} \quad \frac{1}{x_2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ TH1: } x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1, \text{ mà } x_1 + x_2 = \frac{2m+4}{m} \Rightarrow 2 = \frac{2m+4}{m} \Leftrightarrow 2m = 2m+4 \Leftrightarrow m \notin \mathbb{O}$$

$$\bullet \text{ TH2: } x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = -1, \text{ mà } x_1 + x_2 = \frac{2m+4}{m} \Rightarrow -2 = \frac{2m+4}{m} \Leftrightarrow -2m = 2m+4 \Leftrightarrow m = -1$$

loại

Vậy không tồn tại m để thỏa mãn điều kiện đề bài cho.

Bài 12. Cho phương trình: $mx^2 - (2m-1)x + m-2 = 0$ (1); với m là tham số thực.

1) Giải phương trình với $m=10$.

2) Tìm m để (1) có một nghiệm bằng 3, tìm nghiệm còn lại.

3) Xác định m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất, tìm nghiệm duy nhất đó.

4) Tìm giá trị nguyên của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn

a) $(x_1 - 3x_2)(x_2 - 3x_1) = 0$.

b) $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 \geq 4$.

c) $|x_1 - 2x_2| = 1$.

d) $mx_1^2 + (2m - 1)x_2 + m - 2 = 4$.

e) $2(x_1^3 - 6x_2^3) + 17x_1x_2^2 = 9x_2x_1^2$.

5) Xác định m để phương trình đã cho có một nghiệm bằng $m - 2$.

6) Chứng minh rằng nếu m là tích của hai số tự nhiên liên tiếp thì phương trình (1) có nghiệm hữu tỉ.

Lời giải

1) Với $m = 10$, phương trình (1) trở thành: $10x^2 - 19x + 8 = 0$.

Ta có $\Delta = (-19)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 8 = 41$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{19 + \sqrt{41}}{20}$; $x_2 = \frac{19 - \sqrt{41}}{20}$

Vậy với $m = 3$, tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ \frac{19 + \sqrt{41}}{20}; x_1 = \frac{19 - \sqrt{41}}{20} \right\}$.

2) Để phương trình (1) có một nghiệm bằng $x = 3$

$$\Leftrightarrow 9m - (2m - 1) \cdot 3 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}.$$

Thay $m = -\frac{1}{4}$ vào phương trình (1) ta có:

$$-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Vậy khi $m = -\frac{1}{4}$, phương trình có một nghiệm $x = 3$, nghiệm còn lại là $x = 3$.

3) Xét phương trình: $mx^2 - (2m - 1)x + m - 2 = 0$ (1); với m là tham số thực.

$$\text{Để phương trình có nghiệm duy nhất} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ -(2m - 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy để phương trình (1) có nghiệm duy nhất thì $m = 0$.

4) Phương trình $mx^2 - (2m - 1)x + m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [-(2m - 1)]^2 - 4m(m - 2) > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m + 1 > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Vậy khi $m > \frac{-1}{4}; m \neq 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Theo hệ thức Vi-et ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m-1}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{m-2}{m} \end{cases}$$

a) Ta có: $(x_1 - 3x_2)(x_2 - 3x_1) = 0 \Leftrightarrow 10x_1x_2 - 3x_1^2 - 3x_2^2 = 0$

$$\Leftrightarrow 16x_1x_2 - 3(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) = 0 \Leftrightarrow 16x_1x_2 - 3(x_1 + x_2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{16(m-2)}{m} - 3\left(\frac{2m-1}{m}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{16m(m-2) - 3(4m^2 - 4m + 1)}{m^2} = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 20m - 3 = 0$$

Có: $\Delta' = (-10)^2 - 4 \cdot (-3) = 112 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 4\sqrt{7}$.

Phương trình $4m^2 - 20m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt:

$$m_1 = \frac{5+2\sqrt{7}}{2} (tm); m_2 = \frac{5-2\sqrt{7}}{2} (tm)$$

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn yêu cầu đề bài: $m_1 = \frac{5+2\sqrt{7}}{2}$ hoặc $m_2 = \frac{5-2\sqrt{7}}{2}$.

b) Ta có: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 \geq 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 \geq 4$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2m-1}{m}\right)^2 - 3\frac{m-2}{m} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{(2m-1)^2 - 3m(m-2)}{m^2} \geq \frac{4m^2}{m^2}$$

$$\Rightarrow -3m^2 + 2m + 1 \geq 0 \text{ (Vì } m \neq 0 \Rightarrow m^2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 2m - 1 \leq 0 \Leftrightarrow (m-1)(3m+1) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{3} \leq m \leq 1$$

Kết hợp với (2) ta có: Với $\frac{-1}{4} < m \leq 1$ và $m \neq 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

c) Ta có: $|x_1 - 2x_2| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = -1 \end{cases}$

➤ TH1: $x_1 - 2x_2 = 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 3x_2 = 1$. Thay $x_1 + x_2 = \frac{2m-1}{m}$ vào biểu thức trên ta được:

$$\frac{2m-1}{m} - 3x_2 = 1 \Leftrightarrow 3x_2 = \frac{m-1}{m} \Leftrightarrow x_2 = \frac{m-1}{3m}$$

Vì phương trình (1) có nghiệm $x_2 = \frac{m-1}{3m}$

$$\Leftrightarrow m \left(\frac{m-1}{3m} \right)^2 - (2m-1) \frac{m-1}{3m} + m-2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m-1)^2}{9m} - \frac{(2m-1)(m-1)}{3m} + m-2=0$$

$$\Rightarrow (m-1)^2 - 3(2m-1)(m-1) + 9m(m-2)=0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 11m - 2 = 0.$$

$$\text{Có } \Delta = (-11)^2 - 4.4.(-2) = 153 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3\sqrt{17}.$$

Phương trình $4m^2 - 11m - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt:

$$m_1 = \frac{11+3\sqrt{17}}{8} \text{ (thỏa mãn); } m_2 = \frac{11-3\sqrt{17}}{8} \text{ (thỏa mãn).}$$

➤ TH2: $x_1 - 2x_2 = -1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 3x_2 = -1$. Thay $x_1 + x_2 = \frac{2m-1}{m}$ vào biểu thức trên ta được:

$$\frac{2m-1}{m} - 3x_2 = -1 \Leftrightarrow 3x_2 = \frac{3m-1}{m} \Leftrightarrow x_2 = \frac{3m-1}{3m}$$

Vì phương trình (1) có nghiệm $x_2 = \frac{3m-1}{3m}$

$$\Leftrightarrow m \left(\frac{3m-1}{3m} \right)^2 - (2m-1) \frac{3m-1}{3m} + m-2=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(3m-1)^2}{9m} - \frac{(2m-1)(3m-1)}{3m} + m-2=0$$

$$\Rightarrow (3m-1)^2 - 3(2m-1)(3m-1) + 9m(m-2)=0$$

$$\Leftrightarrow -9m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{9} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy tập các giá trị của m thỏa mãn là: $S = \left\{ \frac{11+3\sqrt{17}}{8}; \frac{11-3\sqrt{17}}{8}; -\frac{2}{9} \right\}.$

d) Vì x_1 là một nghiệm của phương trình (1) nên:

$$mx_1^2 - (2m-1)x_1 + m-2=0.$$

$$\Leftrightarrow mx_1^2 = (2m-1)x_1 - m + 2 \text{ thay vào } mx_1^2 + (2m-1)x_2 + m-2=4 \text{ ta có:}$$

$$(2m-1)x_1 - m + 2 + (2m-1)x_2 + m-2=4$$

$$\Leftrightarrow (2m-1)(x_1 + x_2) = 4$$

$$\Leftrightarrow (2m-1) \frac{2m-1}{m} = 4$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\Rightarrow (2m - 1)^2 = 4m$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 1 = 0$$

$$\text{Có: } \Delta' = (-4)^2 - 4 = 12 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 2\sqrt{3}.$$

Phương trình $4m^2 - 8m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt:

$$m_1 = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \text{ (thỏa mãn); } m_2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Vậy tập các giá trị của } m \text{ thỏa mãn là: } S = \left\{ \frac{2 + \sqrt{3}}{2}; \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \right\}.$$

$$\text{e) Ta có: } 2(x_1^3 - 6x_2^3) + 17x_1x_2^2 = 9x_2x_1^2 \Leftrightarrow 2x_1^3 + 17x_1x_2^2 - 9x_2x_1^2 - 12x_2^3 = 0 \quad (3)$$

Vì phương trình có hai nghiệm phân biệt nên $x_2 = 0$ không thỏa mãn điều kiện (3)

$$\text{Chia cả 2 vế của phương trình (3) cho } x_2^3 \text{ ta được: } 2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 - 9\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 17\left(\frac{x_1}{x_2}\right) - 12 = 0$$

$$\text{Đặt } \frac{x_1}{x_2} = t \text{ ta được: } 2t^3 - 9t^2 + 17t - 12 = 0 \Leftrightarrow (2t^3 - 3t^2) - (6t^2 - 9t) + (8t - 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2t - 3)(t^2 - 3t + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t - 3 = 0 \\ t^2 - 3t + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \text{ (Vì Pt } t^2 - 3t + 4 = 0 \text{ vô nghiệm)}$$

$$\text{Với } t = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}x_2. \text{ Thay } x_1 = \frac{3}{2}x_2 \text{ vào tổng hai nghiệm ta được:}$$

$$\frac{3}{2}x_2 + x_2 = \frac{2m - 1}{m} \Leftrightarrow \frac{5}{2}x_2 = \frac{2m - 1}{m} \Leftrightarrow x_2 = \frac{2(2m - 1)}{5m}.$$

$$\text{Vì phương trình (1) có một nghiệm } x_2 = \frac{2(2m - 1)}{5m}$$

$$\Leftrightarrow m\left(\frac{4m - 2}{5m}\right)^2 - (2m - 1)\frac{4m - 2}{5m} + m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(4m - 2)^2}{25m} - \frac{(2m - 1)(4m - 2)}{5m} + m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (4m - 2)^2 - 5(2m - 1)(4m - 2) + 25m(m - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 26m - 6 = 0$$

$$\text{Có } \Delta' = (-13)^2 + 6 = 175 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 5\sqrt{7}$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt } m_1 = 13 + 5\sqrt{7} \text{ (thỏa mãn); } m_2 = 13 - 5\sqrt{7} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy tập các giá trị của m thỏa mãn là: $S = \{13 + 5\sqrt{7}; 13 - 5\sqrt{7}\}$.

5) Phương trình (1) có một nghiệm bằng $x = m - 2$

$$\Leftrightarrow m(m - 2)^2 - (2m - 1)(m - 2) + (m - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)[m(m - 2) - (2m - 1) + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)(m^2 - 4m + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 = 0 \\ m^2 - 4m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m^2 - 4m + 2 = 0 \end{cases}$$

Xét phương trình: $m^2 - 4m + 2 = 0$ có $\Delta' = (-2)^2 - 2 = 2 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = \sqrt{2}$.

Phương trình $m^2 - 4m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt:

$$m_1 = 2 + \sqrt{2} \text{ (thỏa mãn); } m_2 = 2 - \sqrt{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy tập các giá trị m cần tìm là: $S = \{2; 2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}\}$.

6) Vì m là tích của hai số tự nhiên liên tiếp

Giả sử $m = k(k + 1)$ ($k \in \mathbb{N}$), phương trình (1) trở thành:

$$k(k + 1)x^2 - [2k(k + 1) - 1]x + k(k + 1) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (k^2 + k)x^2 - (2k^2 + 2k - 1)x + (k^2 + k - 2) = 0 \quad (4)$$

- $k = 0$, phương trình (4) trở thành: $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \in \mathbb{Q}$. Vậy $k = 0$ thỏa mãn (5)
- $k \neq 0$, ta có:

$$\begin{aligned} \Delta &= [- (2k^2 + 2k - 1)]^2 - 4(k^2 + k)(k^2 + k - 2) \\ &= (4k^4 + 8k^3 - 4k + 1) - (4k^4 + 8k^3 - 4k^2 - 8k) = 4k^2 + 4k + 1 = (2k + 1)^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{\Delta} = |2k + 1| = 2k + 1 > 0 \quad (\text{Vì } k \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{(2k^2 + 2k - 1) - (2k + 1)}{2k(k + 1)} = \frac{k - 1}{k} \in \mathbb{Q}; \quad x_1 = \frac{(2k^2 + 2k - 1) + (2k + 1)}{2k(k + 1)} = \frac{k + 2}{k + 1} \in \mathbb{Q} \quad (7)$$

Từ (5) và (6), (7) suy ra nếu m là tích của hai số tự nhiên liên tiếp thì phương trình (1) có nghiệm hữu tỉ.

Bài 13. Cho phương trình ẩn x : $x^2 + (2m + 1)x - n + 3 = 0$ (1); với m và n là tham số thực.

- 1) Giải phương trình (1) trong trường hợp $m = n = 1$.
- 2) Tìm m và n để phương trình có hai nghiệm là $-3; -2$.
- 3) Trong trường hợp $m = 2$:

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

- a) Tìm n để (1) có một nghiệm bằng 2.
- b) Tìm n để (1) có hai nghiệm mà hiệu hai nghiệm bằng 3.
- c) Tìm n để (1) có hai nghiệm mà tổng bình phương hai nghiệm bằng 10.
- d) Tìm số nguyên dương n bé nhất để phương trình đã cho có nghiệm dương.
- e) Tìm n để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1^2 - 5x_2 - n = 7$.

Lời giải

1) Giải phương trình (1) trong trường hợp $m = n = 1$.

Với $m = n = 1$, phương trình (1) trở thành:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy khi $m = n = 1$ phương trình (1) có tập nghiệm: $S = \{-1; -2\}$.

2) Tìm m và n để phương trình có hai nghiệm là $-3; -2$.

Phương trình (1) có hai nghiệm là $-3; -2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3(2m - 1) - n + 3 = 0 \\ 4 - 2(2m - 1) - n + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m + n = -9 \\ 4m + n = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = 3 \end{cases}$$

Vậy $m = -2; n = 3$ thì phương trình có hai nghiệm là $-3; -2$.

3) Trong trường hợp $m = 2$, ta có phương trình: $x^2 + 5x - n + 3 = 0$ (2) và $\Delta = 4n + 13$

a) Tìm n để (1) có một nghiệm bằng 2.

Phương trình có một nghiệm bằng 2 $\Leftrightarrow 4 + 10 - n + 3 = 0 \Leftrightarrow n = -17$

Vậy $n = -17$ là giá trị cần tìm.

b) Tìm n để (1) có hai nghiệm mà hiệu hai nghiệm bằng 3.

Phương trình (1) có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4n + 13 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \frac{-13}{4}$.

Theo định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 \cdot x_2 = -n + 3 \end{cases}$

Phương trình có hiệu hai nghiệm bằng 3 $\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 3$ kết hợp với $x_1 + x_2 = -5$ ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

Thay vào $x_1 \cdot x_2 = -n + 3$ ta có: $4 = -n + 3 \Leftrightarrow n = -1$ (Thỏa mãn).

Vậy $n = -1$ là giá trị cần tìm.

c) Tìm n để (1) có hai nghiệm mà tổng bình phương hai nghiệm bằng 10.

Phương trình (1) có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4n+13 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \frac{-13}{4}$.

Theo định lí Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 \cdot x_2 = -n+3 \end{cases}$$

Phương trình có hai nghiệm mà tổng bình phương hai nghiệm bằng 10

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$$

$$\Leftrightarrow 25 - 2(-n+3) = 10 \Leftrightarrow 2n+9 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-9}{2}$$

Vậy $n = \frac{-9}{2}$ là giá trị cần tìm.

d) Tìm số nguyên dương n bé nhất để phương trình đã cho có nghiệm dương.

Phương trình (1) có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4n+13 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \frac{-13}{4}$.

Theo định lí Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 \cdot x_2 = -n+3 \end{cases}$$

Vì phương trình có hai nghiệm $x_1 + x_2 = -5$, vậy phương trình đã cho có nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm trái dấu khi đó: $-n+3 < 0 \Leftrightarrow n > 3$

Mà n là số nguyên dương bé nhất nên $n = 4$.

e) Tìm n để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1^2 - 5x_2 - n = 7$.

Phương trình (1) có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4n+13 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \frac{-13}{4}$.

Theo định lí Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 \cdot x_2 = -n+3 \end{cases}$$

$$\text{Có } x_1^2 - 5x_2 - n = 7$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 - n = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 - n - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-5)^2 - (-n+3) - n - 7 = 0 \Leftrightarrow -15 = 0 \text{ (Vô lí).}$$

Vậy không có n thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 14. Cho phương trình $(2m-1)x^2 - 2mx + 1 = 0$ (1); với m là tham số thực.

1) Giải phương trình với $m = 5$.

2) Tìm m để (1) có một nghiệm bằng 0,5. Tìm nghiệm thứ hai.

3) Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm.

4) Xác định m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

a) $|x_1^2 - x_2^2| = \frac{1}{2}$.

b) $x_1 \leq \frac{1}{3} < x_2$.

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$.

d) $x_1 = 5x_2$.

5) Tìm m để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

6) Xác định tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ trong đó biểu thức $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2$ nhận giá trị nguyên.

7) Trong trường hợp phương trình có hai nghiệm phân biệt, hãy thiết lập biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào tham số m .

Lời giải

1) Khi $m = 5$ phương trình thành $9x^2 - 10x + 1 = 0$.

Do $a + b + c = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = \frac{1}{9}$.

2) Phương trình (1) có một nghiệm bằng $x = 0,5$

$$\Leftrightarrow (2m - 1) \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 2m \frac{1}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{2} - \frac{1}{4} - m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$$

Thay $m = \frac{3}{2}$ lại (1) ta được phương trình $2x^2 - 3x + 1 = 0$

Do $a + b + c = 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = \frac{1}{2}$

Vậy nghiệm còn lại là 1.

3) Khi $m = \frac{1}{2}$ phương trình thành $-x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $m = \frac{1}{2}$ phương trình đã cho có nghiệm

Khi $m \neq \frac{1}{2}$. Ta thấy phương trình $(2m - 1)x^2 - 2mx + 1 = 0$ (1); với m là tham số thực.

Có $a = 2m - 1; b = -2m; c = 1$ và $a + b + c = 0$.

Nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm là $x = 1; x = \frac{1}{2m - 1}$.

Vậy với mọi m phương trình đã cho có nghiệm.

4) Theo câu 3 ta có: Khi $m \neq \frac{1}{2}$ phương trình (1) có hai nghiệm $x=1$; $x=\frac{1}{2m-1}$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi $\frac{1}{2m-1} \neq 1 \Rightarrow m \neq 1$.

Vậy khi $m \neq 1$; $m \neq 0,5$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

$$a) |x_1^2 - x_2^2| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{(2m-1)^2} - 1 \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{4m-4m^2}{(2m-1)^2} \right| = \frac{1}{2}.$$

$$TH1: \frac{4m-4m^2}{(2m-1)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 8m-8m^2=4m^2-4m+1 \Leftrightarrow 12m^2-12m+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{3-\sqrt{6}}{6} (TM) \\ m=\frac{3+\sqrt{6}}{6} (TM) \end{cases}.$$

$$TH2: \frac{4m-4m^2}{(2m-1)^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 8m-8m^2=-4m^2+4m-1 \Leftrightarrow 4m^2-4m-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{1-\sqrt{2}}{2} (TM) \\ m=\frac{1+\sqrt{2}}{2} (TM) \end{cases}.$$

Vậy tất cả các giá trị cần tìm của m là: $m \in \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{6}}{6}; \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} \right\}$.

$$b) x_1 \leq \frac{1}{3} < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2m-1} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{4-2m}{2m-1} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy khi $m \geq 2$ hoặc $m < \frac{1}{2}$ là các giá trị cần tìm.

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2 \Leftrightarrow 1+2m-1=2 \Leftrightarrow m=1$. Không thỏa mãn điều kiện phương trình có hai nghiệm

phân biệt. Vậy không có giá trị nào của m để $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$.

d) $x_1 = 5x_2$.

$$TH1: 1 = \frac{5}{2m-1} \Rightarrow 2m-1=5 \Leftrightarrow m=3 (TM).$$

$$TH2: 5 = \frac{1}{2m-1} \Rightarrow 10m-5=1 \Leftrightarrow m=\frac{3}{5} (TM).$$

Vậy $m=3$; $m=\frac{3}{5}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

5) Khi $m=\frac{1}{2}$ phương trình thành $-x+1=0 \Leftrightarrow x=1 \notin (-1;0)$.

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Vậy $m = \frac{1}{2}$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Khi $m \neq \frac{1}{2}$ phương trình (1) có hai nghiệm $x = 1$; $x = \frac{1}{2m-1}$.

Để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$ thì $-1 < \frac{1}{2m-1} < 0$.

$$\frac{1}{2m-1} < 0 \Leftrightarrow 2m-1 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2} \quad (*)$$

$$\frac{1}{2m-1} > -1 \Leftrightarrow \frac{2m}{2m-1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (**)$$

Từ $(*)$; $(**)$ suy ra $m < 0$. Vậy $m < 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

6) Khi $m \neq 1$; $m \neq 0,5$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x = 1$; $x = \frac{1}{2m-1}$.

$$\text{Khi đó } x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = 1 + \frac{1}{2m-1} + \frac{1}{2m-1} = 1 + \frac{2}{2m-1}.$$

Để $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2$ nguyên thì $(2m-1)$ là ước của 2

$$\text{TH1: } 2m-1=1 \Leftrightarrow m=1(L).$$

$$\text{TH2: } 2m-1=-1 \Leftrightarrow m=0(TM).$$

$$\text{TH3: } 2m-1=2 \Leftrightarrow m=\frac{3}{2}(L).$$

$$\text{TH4: } 2m-1=-2 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}(L).$$

Vậy để $x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2$ nguyên thì $m=0$.

7) Khi $m \neq 1$; $m \neq 0,5$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x = 1$; $x = \frac{1}{2m-1}$.

$$\text{Dễ thấy } x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2 = 1 + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m-1} = 1.$$

Vậy biểu thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào tham số m là $x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2 = 1$.

Bài 15. Cho phương trình: $mx^2 - (2m+1)x + 2 = 0$ (1) (với m là tham số thực)

1) Giải phương trình (1) khi $m=3$.

2) Giải và biện luận phương trình đã cho theo m .

3) Tìm giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên trái dấu

4) Khi nào phương trình có đúng một nghiệm lớn hơn 1.

5) Tìm giá của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

a) $x_1 + x_2 = 6x_1x_2 + 5$.

b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$.

c) $x_1^5 + x_2^5 = 33$.

d) $x_1 - 3x_2 > 4$.

e) $|x_1 - x_2 - 3x_1^2x_2| \geq 11$.

f) $x_1 \in [1; 3]; x_2 \in [4; 5]$.

Lời giải

1). Giải phương trình (1) khi $m = 3$.

Với $m = 3$ phương trình đã cho trở thành:

$$3x^2 - (2.3+1)x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$\text{Ta có } \Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4.3.2 = 49 - 24 = 25 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 5.$$

$$\text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt: } x_1 = \frac{7-5}{2.3} = \frac{-1}{3}; x_2 = \frac{7+5}{2.3} = 2$$

$$\text{Vậy khi } m = 3 \text{ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là } x_1 = \frac{-1}{3}; x_2 = 2.$$

2). Giải và biện luận phương trình đã cho theo m .

$$mx^2 - (2m+1)x + 2 = 0 \quad (1)$$

Nếu $m = 0$ phương trình (1) trở thành: $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Nếu $m \neq 0$ phương trình (1) là phương trình bậc hai có:

$$\Delta = (2m+1)^2 - 4.m.2 = 4m^2 + 4m + 1 - 8m = 4m^2 - 4m + 1 = (2m-1)^2 \geq 0$$

Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ thì phương trình (1) có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = \frac{2m+1}{2m} = \frac{2.\frac{1}{2}+1}{2.\frac{1}{2}} = 2.$$

Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$x = \frac{(2m+1) - (2m-1)}{2.m} = \frac{1}{m}; \quad x = \frac{(2m+1) + (2m-1)}{2.m} = 2$$

Kết luận: Nếu $m=0$ thì phương trình (1) có một nghiệm duy nhất $x=2$.

Nếu $m = \frac{1}{2}$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 2$.

Nếu $m \neq 0, m \neq \frac{1}{2}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x = \frac{1}{m}; x = 2$.

3) Tìm giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên trái dấu.

Theo câu 2 ta có khi $m \neq 0, m \neq \frac{1}{2}$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $x = \frac{1}{m}, x = 2$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm nguyên trái dấu $\Leftrightarrow x = \frac{1}{m}$ nguyên âm $\Leftrightarrow m = -1$ (Thỏa mãn).

Vậy để phương trình (1) có hai nghiệm nguyên trái dấu thì $m = -1$.

4) Khi nào phương trình có đúng một nghiệm lớn hơn 1.

TH1: Nếu $m=0$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=2$ (thỏa mãn có đúng một nghiệm lớn hơn 1).

TH2: Nếu $m = \frac{1}{2}$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 2$. (thỏa mãn có đúng một nghiệm lớn hơn 1).

TH3: Nếu $m \neq 0, m \neq \frac{1}{2}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x = \frac{1}{m}, x = 2$.

Vì $x_2 = 2 > 1$ nên để phương trình có đúng một nghiệm lớn hơn 1

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{m} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{m-1}{m} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases} \quad (\text{Thỏa mãn điều kiện } m \neq 0, m \neq \frac{1}{2})$$

Kết luận: $m = \frac{1}{2}; m > 1; m \leq 0$ thì phương trình có đúng một nghiệm lớn hơn 1.

5). Tìm giá của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

Với $m \neq 0$ và $m \neq \frac{1}{2}$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x = \frac{1}{m}, x = 2$.

Theo Viét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{2m-1}{m}$ và $x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{m}$ (Dùng cho cách 2)

a). $x_1 + x_2 = 6x_1x_2 + 5$

Cách 1:

$$x_1 + x_2 = 6x_1x_2 + 5 \Leftrightarrow \frac{1}{m} + 2 = 6 \cdot \frac{1}{m} \cdot 2 + 5 \Leftrightarrow \frac{1}{m} + 2 = \frac{12}{m} + 5 \Leftrightarrow -\frac{11}{m} = 3 \Rightarrow m = -\frac{11}{3} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Cách 2:

$$x_1 + x_2 = 6x_1x_2 + 5 \Leftrightarrow \frac{2m+1}{m} = \frac{6 \cdot 2}{m} + 5 \Rightarrow 2m+1 = 12 + 5m \Leftrightarrow m = \frac{-11}{3} \text{ (Thỏa mãn)}$$

Vậy với $m = \frac{-11}{3}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 + x_2 = 6x_1x_2 + 5$.

b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$.

Cách 1:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{m}} + \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow m + \frac{1}{2} = 3 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2} \text{ (thỏa mãn } m \neq 0, m \neq \frac{1}{2} \text{)}.$$

Cách 2:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3x_1x_2 \Leftrightarrow \frac{2m+1}{m} = 3 \cdot \frac{2}{m} \Rightarrow 2m+1 = 6 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2} \text{ (Thỏa mãn)}$$

Vậy với $m = \frac{5}{2}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$.

c) $x_1^5 + x_2^5 = 33$

$$\text{Để } x_1^5 + x_2^5 = 33 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{m}\right)^5 + 2^5 = 33 \Leftrightarrow \frac{1}{m^5} = 1 \Rightarrow m = 1 \text{ (thỏa mãn } m \neq 0, m \neq \frac{1}{2} \text{)}.$$

Vậy với $m = 1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^5 + x_2^5 = 33$.

d) $x_1 - 3x_2 > 4$

$$x_1 - 3x_2 > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} - 3 \cdot 2 > 4 \\ 2 - 3 \cdot \frac{1}{m} > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} - 10 > 0 \\ 2 + \frac{3}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-10m}{m} > 0 \\ \frac{2m+3}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < \frac{1}{10} \\ -\frac{3}{2} < m < 0 \end{cases} \text{ (Thỏa mãn)}.$$

Vậy với $-\frac{3}{2} < m < \frac{1}{10}$ và $m \neq 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$x_1 - 3x_2 > 4.$$

e) $|x_1 - x_2 - 3x_1^2x_2| \geq 11$.

$$\text{Ta có } |x_1 - x_2 - 3x_1^2x_2| \geq 11 \Leftrightarrow \left|2 - \frac{1}{m} - 3 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{m}\right| \geq 11 \text{ hoặc } \left|\frac{1}{m} - 2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^2 \cdot 2\right| \geq 11$$

$$\text{TH1: } \left|2 - \frac{1}{m} - 3 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{m}\right| \geq 11 \Leftrightarrow \left|2 - \frac{1}{m} - \frac{12}{m}\right| \geq 11 \Leftrightarrow \left|2 - \frac{13}{m}\right| \geq 11$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \frac{13}{m} \geq 11 \\ 2 - \frac{13}{m} \leq -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13}{m} + 9 \leq 0 \\ \frac{13}{m} - 13 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{13+9m}{m} \leq 0 \\ \frac{13-13m}{m} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-13}{9} \leq m \leq 0 \\ 0 \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-13}{9} \leq m \leq 1 \quad (*)$$

$$\text{TH2: } \left| \frac{1}{m} - 2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{m} \right)^2 \cdot 2 \right| \geq 11 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{m} - 2 - \frac{6}{m^2} \right| \geq 11$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{m - 2m^2 - 6}{m^2} \right| \geq 11 \Leftrightarrow \left| \frac{2m^2 - m + 6}{m^2} \right| \geq 11 \Leftrightarrow \frac{2m^2 - m + 6}{m^2} \geq 11 \quad (\text{Vì } \frac{2m^2 - m + 6}{m^2} > 0).$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - m + 6 - 11m^2 \geq 0 \Leftrightarrow 9m^2 + m - 6 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1 - \sqrt{217}}{18} \leq m \leq \frac{-1 + \sqrt{217}}{18}. \quad (**)$$

Kết hợp (*) và (**) cùng với điều kiện $m \neq 0$, $m \neq \frac{1}{2}$ ta có:

Với $\frac{-13}{9} \leq m \leq 1$; $m \neq 0$; $m \neq \frac{1}{2}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$|x_1 - x_2 - 3x_1^2 x_2| \geq 11$$

$$\text{f) } x_1 \in [1; 3]; x_2 \in [4; 5].$$

Với $m \neq 0$, $m \neq \frac{1}{2}$ phương trình luôn hai nghiệm pb $x = \frac{1}{m}$, $x = 2$.

Theo bài ta có $x_1 \in [1; 3]$; $x_2 \in [4; 5]$ nên $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{m}$.

$$\text{Có } x_2 \in [4; 5] \Leftrightarrow 4 \leq \frac{1}{m} \leq 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} \geq 4 \\ \frac{1}{m} \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} - 4 \geq 0 \\ \frac{1}{m} - 5 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-4m}{m} \geq 0 \\ \frac{1-5m}{m} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq \frac{1}{4} \\ m \geq \frac{1}{5} \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5} \leq m \leq \frac{1}{4} \\ m = 0 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $m \neq 0$, $m \neq \frac{1}{2}$ ta được $\frac{1}{5} \leq m \leq \frac{1}{4}$

Vậy với $\frac{1}{5} \leq m \leq \frac{1}{4}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 \in [1; 3]$; $x_2 \in [4; 5]$.

Bài 16. Cho phương trình: $mx^2 - 4(m+1)x + 3m + 13 = 0$ (1); với m là tham số thực.

1) Giải phương trình (1) khi $m = 2$.

- 2) Tìm m để (1) có một nghiệm bằng 3, tìm nghiệm còn lại.
- 3) Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm.
- 4) Tìm giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm nguyên.
- 5) Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn
 - a) $x_1 = 2x_2$.
 - b) $(x_1 - 4x_2)(x_2 - 4x_1) = 0$.
 - c) $x_1^2 + x_2^2 = 10$
 - d) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{5}$.
 - e) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{6}{x_1 x_2} = \frac{27}{14}$.
- 6) Tìm m để (1) có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(0; 3)$.
- 7) Thiết lập hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm độc lập với tham số m .

Lời giải

1) Với $m = 2$ thì phương trình (1) trở thành: $2x^2 - 12x + 19 = 0$.

$$\Delta' = (-6)^2 - 2 \cdot 19 = -2 < 0.$$

Do đó, phương trình vô nghiệm.

Với $m = 2$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

2) Phương trình (1) có một nghiệm $x = 3$.

$$\Leftrightarrow m \cdot 3^2 - 4(m+1) \cdot 3 + 3m + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \cdot m + 1 = 0 \text{ (Vô lý).}$$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3) Với $m = 0$, phương trình (1) có dạng $-4x + 13 = 0$ có nghiệm $x = \frac{13}{4}$. (*)

Với $m \neq 0$, ta có:

$$\Delta' = [-2(m+1)]^2 - m(3m+13)$$

$$\Delta' = 4(m^2 + 2m + 1) - (3m^2 + 13m)$$

$$\Delta' = m^2 - 5m + 4$$

$$\Delta' = (m-4)(m-1).$$

$$\text{Phương trình (1) có nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq 1 \end{cases}. \quad (**)$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Từ (*) và (**) ta có: với $m \geq 4$; $m \leq 1$ thì phương trình (1) có nghiệm.

4) Với $m = 0$, phương trình (1) có nghiệm $x = \frac{13}{4} \notin \mathbf{Z}$.

Với $m \neq 0$ ta có:

$$\Delta = 16(m+1)^2 - 4m(3m+13) = 4m^2 - 20m + 16 = (2m-5)^2 - 9$$

Phương trình (1) có nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương.

Khi đó, $(2m-5)^2 - 9 = k^2$ ($k \in \mathbf{N}$).

$$\Leftrightarrow (2m-5-k)(2m-5+k) = 9$$

Vì $m \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N}$ nên $2m-5+k$; $2m-5-k$ nguyên và $2m-5+k \geq 2m-5-k$. Do đó ta xét các trường hợp sau.

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2m-5-k=1 \\ 2m-5+k=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=5 \\ k=4 \end{cases}.$$

Thử lại, với $m=5$, $\Delta = (2 \cdot 5 - 5)^2 - 9 = 16 = 4^2$, pt (1) có nghiệm $x_1 = \frac{14}{5}$, $x_2 = 2 \in \mathbf{Z}$.

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2m-5-k=-9 \\ 2m-5+k=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ k=4 \end{cases} \text{ (đã xét ở trên)}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} 2m-5-k=3 \\ 2m-5+k=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=4 \\ k=0 \end{cases}.$$

Thử lại, pt (1) có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{5}{2} \notin \mathbf{Z}$ (loại).

$$\text{TH4: } \begin{cases} 2m-5-k=-3 \\ 2m-5+k=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ k=0 \end{cases}.$$

Thử lại, pt (1) có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = 4 \in \mathbf{Z}$.

Vậy các giá trị của $m \in \{1; 5\}$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

5) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < 1 \end{cases}$. Khi đó, phương

trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{4(m+1)}{m} & (1a) \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3m+13}{m} & (1b) \end{cases}.$$

a) Thay $x_1 = 2x_2$ vào (1a) ta được:

$$3x_2 = \frac{4(m+1)}{m} \Leftrightarrow x_2 = \frac{4(m+1)}{3m}. \text{ Suy ra } x_1 = \frac{8(m+1)}{3m}. \text{ Thay } x_1, x_2 \text{ vào (1b) ta được:}$$

$$\frac{8(m+1)}{3m} \cdot \frac{4(m+1)}{3m} = \frac{3m+13}{m}$$

$$\Rightarrow 32(m+1)^2 = 9m(3m+13)$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 53m + 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{53+3\sqrt{241}}{10} (tm) \\ m = \frac{53-3\sqrt{241}}{10} (ktm \ x > 4; x < 1) \end{cases}$$

Vậy $m = \frac{53+3\sqrt{241}}{10}$ là giá trị cần tìm.

$$b) (x_1 - 4x_2)(x_2 - 4x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 - 4x_2^2 - 4x_1^2 + 16x_1x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25x_1x_2 - 4x_1^2 - 8x_1x_2 - 4x_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25x_1x_2 - 4(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 25x_1x_2 - 4(x_1 + x_2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 25 \cdot \frac{3m+13}{m} - 4 \left(\frac{4(m+1)}{m} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{75m+325}{m} - 4 \cdot \frac{16m^2+32m+16}{m^2} = 0$$

$$\Rightarrow 75m^2 + 325m - 64m^2 - 128m - 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow 11m^2 + 197m - 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-197+15\sqrt{185}}{22} (ktm \ x > 4; x < 1) \\ m = \frac{-197-15\sqrt{185}}{22} (tm) \end{cases}$$

Vậy các giá trị của m thoả mãn là $m = \frac{-197-15\sqrt{185}}{22}$.

c)

$$x_1^2 + x_2^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4(m+1)}{m} \right)^2 - 2 \cdot \frac{3m+13}{m} = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{16m^2 + 32m + 16}{m^2} - \frac{6m + 26}{m} = 10$$

$$\Rightarrow 16m^2 + 32m + 16 - m(6m + 26) = 10m^2$$

$$\Leftrightarrow 6m + 16 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{8}{3} \text{ (Thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy khi $m = -\frac{8}{3}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 10$

d) Vì x_1 là một nghiệm của của phương trình (1)

$$mx_1^2 + 4(m+1)x_2 + 3m + 13 = 16m$$

Vì x_1 là một nghiệm của của phương trình (1)

$$\Leftrightarrow mx_1^2 - 4(m+1)x_1 + 3m + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow mx_1^2 = 4(m+1)x_1 - 3m - 13 \text{ thay vào } mx_1^2 + 4(m+1)x_2 + 3m + 13 = 16m \text{ ta được:}$$

$$4(m+1)x_1 - 3m - 13 + 4(m+1)x_2 + 3m + 13 = 16m$$

$$\Leftrightarrow 4(m+1)(x_1 + x_2) = 16m$$

$$\Leftrightarrow 4(m+1) \cdot \frac{4(m+1)}{m} = 16m$$

$$\Rightarrow 16m^2 + 32m + 16 = 16m^2$$

$$\Leftrightarrow 32m + 16 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \text{ (Thỏa mãn).}$$

Vậy tất cả các giá trị cần tìm của m là: $m = -\frac{1}{2}$.

$$\text{e) } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 5(x_1 + x_2) = 3x_1x_2$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot \frac{4(m+1)}{m} = 3 \cdot \frac{3m+13}{m}$$

$$\Rightarrow 20m + 20 = 9m + 39$$

$$\Leftrightarrow 11m = 19$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{19}{11} \text{ (không thỏa mãn điều kiện } m > 4; m < 1).$$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$f) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{6}{x_1 x_2} = \frac{27}{14}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2 + x_1 + 6}{x_1 x_2} = \frac{27}{14}$$

$$\Rightarrow 14(x_1 + x_2) + 84 = 27x_1 x_2$$

$$\Leftrightarrow 14 \cdot \frac{4(m+1)}{m} + 84 = 27 \cdot \frac{3m+13}{m}$$

$$\Rightarrow 56(m+1) + 84m = 81m + 351$$

$$\Leftrightarrow 59m = 295$$

$$\Leftrightarrow m = 5 \text{ (thỏa mãn điều kiện } m > 4; m < 1).$$

Vậy $m = 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$6) f(x) = mx^2 - 4(m+1)x + 3m + 13 = 0.$$

* Với $m = 0$, phương trình (1) có nghiệm $x = \frac{13}{4} \in (0; 3)$.

* Với $m \neq 0$ ta có:

- Ta xét trường hợp $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 4$ hoặc $m = 1$.

+ Với $m = 4$, phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{5}{2} \in (0; 3)$.

+ Với $m = 1$, phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 4 \notin (0; 3)$.

- Ta xét trường hợp $\Delta' > 0$. Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Phương trình (1) có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(0; 3)$.

$$\Leftrightarrow f(0) \cdot f(3) < 0 \Leftrightarrow (3m+13) \cdot 1 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{13}{3} \text{ (Thỏa mãn)}$$

Vậy $m = 0$; $m = 4$ hoặc $m < -\frac{13}{3}$ thì phương trình (1) có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(0; 3)$.

.

7) Phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 (theo câu 5). Theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{4(m+1)}{m} = 4 + \frac{4}{m} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{3m+13}{m} = 3 + \frac{13}{m} & (3) \end{cases}$$

Từ (3) suy ra $\frac{x_1 x_2 - 3}{13} = \frac{1}{m}$, thay $\frac{1}{m} = \frac{x_1 x_2 - 3}{13}$ vào (2). Ta được:

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$x_1 + x_2 - 4 = 4 \cdot \frac{x_1 x_2 - 3}{13} \text{ hay } 13x_1 + 13x_2 - 4x_1 x_2 = 40.$$

Vậy hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm x_1, x_2 không phụ thuộc m là $13x_1 + 13x_2 - 4x_1 x_2 = 40$.

Bài 17. Cho phương trình $(m - 1)x^2 - 2mx + m - 4 = 0$ (1) với m là tham số thực.

- 1) Giải phương trình đã cho với $m = 6$.
- 2) Tìm m để (1) nhận $x = 2$ làm một nghiệm, tìm nghiệm còn lại.
- 3) Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có nghiệm?
- 4) Tìm để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:
 - a) $3(x_1 + x_2) + 2x_1 x_2 = m + 2$.
 - b) $x_1 = 3x_2$.
 - c) $2x_1 + 3x_2 + 4x_1 x_2 = 8$.
 - d) $|3x_1 - 2x_2| = 8$.
- 5) Tìm tất cả các giá trị của m nguyên để phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên.

Lời giải

- 1) Giải phương trình đã cho với $m = 6$.

Với $m = 6$ phương trình đã cho trở thành $5x^2 - 12x + 2 = 0$ có $\Delta' = 6^2 - 5 \cdot 2 = 26$.

Phương trình có hai nghiệm $x_1 = \frac{6 - \sqrt{26}}{5}$ và $x_2 = \frac{6 + \sqrt{26}}{5}$.

- 2) Tìm m để (1) nhận $x = 2$ làm một nghiệm, tìm nghiệm còn lại.

Nếu $x = 2$ là một nghiệm thì $(m - 1) \cdot 2^2 - 2m \cdot 2 + m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 8$.

Với $m = 8$ phương trình (1): $7x^2 - 16x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{7} \end{cases}$.

Khi $m = 8$ nghiệm còn lại của phương trình là $x = \frac{2}{7}$.

- 3) Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có nghiệm?

TH1: $m = 1$ phương trình $-2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ suy ra $m = 1$ thỏa mãn.

TH2: $m \neq 1$ Phương trình (1) là phương trình bậc hai. Ta có $\Delta' = m^2 - (m - 1)(m - 4) = 5m - 4$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 5m - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{4}{5}$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $m \geq \frac{4}{5}$ là giá trị cần tìm

4) Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\text{Để } \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^2 - (m-1)(m-4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{4}{5} \end{cases} (1).$$

a) $3(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 = m + 2.$

Theo định lý Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} \\ x_1x_2 = \frac{m-4}{m-1} \end{cases} (*)$$

$$\text{Suy ra } 3(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 = m + 2 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{2m}{m-1} + 2 \cdot \frac{m-4}{m-1} = m + 2 \Leftrightarrow m^2 - 7m + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=6 \end{cases} \text{ so}$$

sánh với đk (1) suy ra $m=6$.

b) $x_1 = 3x_2.$

Kết hợp với (*) ta có
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{m}{2(m-1)} \\ x_1 = \frac{3m}{2(m-1)} \end{cases}$$

$$\text{Vì } x_1x_2 = \frac{m-4}{m-1} \text{ nên } \frac{3m}{2(m-1)} \cdot \frac{m}{2(m-1)} = \frac{m-4}{m-1} \Leftrightarrow 3m^2 = 4(m-1)(m-4)$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 20m + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 10 - 2\sqrt{21} \\ m = 10 + 2\sqrt{21} \end{cases}.$$

c) $2x_1 + 3x_2 + 4x_1x_2 = 8$

Từ (*) ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 + \frac{2}{m-1} \\ x_1x_2 = 1 - \frac{3}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_1 + x_2) = 6 + \frac{6}{m-1} \\ 2x_1x_2 = 2 - \frac{6}{m-1} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } 3(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 = 8 \text{ hay } 6(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = 16$$

$$\text{Suy ra } 8x_1 + 9x_2 = 24$$

Do đó, kết hợp với (*) ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} \\ 8x_1 + 9x_2 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x_1 + 8x_2 = \frac{16m}{m-1} \\ 8x_1 + 9x_2 = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{8m-24}{m-1} \\ x_1 = \frac{-6m+24}{m-1} \end{cases}$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\text{Vì } x_1 x_2 = \frac{m-4}{m-1} \text{ nên } \frac{8m-24}{m-1} \cdot \frac{-6m+24}{m-1} = \frac{m-4}{m-1}$$

$$\Leftrightarrow (8m-24) \cdot (-6m+24) = (m-4) \cdot (m-1) \Leftrightarrow -49m^2 + 341m - 580 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=4 \\ m=\frac{145}{49} \end{cases}$$

$$\text{So sánh với đk (1) suy ra } \begin{cases} m=4 \\ m=\frac{145}{49} \end{cases}$$

d) $|3x_1 - 2x_2| = 8$.

$$\text{Ta có } |3x_1 - 2x_2| = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 = -8 \end{cases}$$

- Nếu $3x_1 - 2x_2 = 8$

$$\text{Từ (*) ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = \frac{4m}{m-1} \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{12m-8}{5(m-1)} \\ x_2 = \frac{-2m+8}{5(m-1)} \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } x_1 x_2 = \frac{m-4}{m-1} \text{ nên}$$

$$\frac{12m-8}{5(m-1)} \cdot \frac{-2m+8}{5(m-1)} = \frac{m-4}{m-1} \Leftrightarrow (12m-8) \cdot (-2m+8) = 25(m-1) \cdot (m-4)$$

$$\Leftrightarrow -49m^2 + 237m - 164 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{41}{49} \\ m = 4 \end{cases}$$

$$\text{So sánh với đk (1) suy ra } \begin{cases} m = \frac{41}{49} \\ m = 4 \end{cases}$$

- Nếu $3x_1 - 2x_2 = -8$

$$\text{Từ (*) ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} \\ 3x_1 - 2x_2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = \frac{4m}{m-1} \\ 3x_1 - 2x_2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-4m+8}{5(m-1)} \\ x_2 = \frac{14m-8}{5(m-1)} \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } x_1 x_2 = \frac{m-4}{m-1} \text{ nên } \frac{-4m+8}{5(m-1)} \cdot \frac{14m-8}{5(m-1)} = \frac{m-4}{m-1} \Leftrightarrow 81m^2 - 269m + 164 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{269 - 5\sqrt{769}}{162} \\ m = \frac{269 + 5\sqrt{769}}{162} \end{cases}.$$

Kết luận, $m = 4$; $m = \frac{41}{49}$, $m = \frac{269 - 5\sqrt{769}}{162}$ và $m = \frac{269 + 5\sqrt{769}}{162}$ là các giá trị thỏa mãn.

5) Tìm tất cả các giá trị của m nguyên để phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên.

Từ định lý Vi-ét suy ra $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 + \frac{2}{m-1} \\ x_1 x_2 = 1 + \frac{3}{m-1} \end{cases}$ nên phương trình có hai nghiệm nguyên suy ra tổng

và tích cũng là các giá trị nguyên.

Do đó $m-1$ chia hết 2 và 3.

Suy ra $\begin{cases} m-1=1 \\ m-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=0 \end{cases}.$

- $m=0$ không thỏa mãn điều kiện để (1) có nghiệm.
- $m=2$ thì (1) trở thành $x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{6} \\ x = 2 + \sqrt{6} \end{cases}.$

Suy ra không tồn tại giá trị của m nguyên thỏa mãn.

Bài 18. Cho phương trình: $(m-10)x^2 - 2(m-10)x + 2 = 0$ (1); với m là tham số thực.

- Giải phương trình (1) khi $m=3$.
- Tìm m để (1) có một nghiệm bằng 2, tìm nghiệm còn lại.
- Tìm m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất.
- Với giá trị nguyên nào của m thì phương trình có đúng một nghiệm nguyên?
- Trong trường hợp (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

a) Tìm m để $(x_1 + x_2)^2 = 5x_1 x_2 - 9$

b) Tìm m sao cho $x_1 - x_2 = 4$.

c) Tìm m để $(m-10)x_1^2 + 2(m-10)x_2 + 2 = m^2$

d) Chứng minh rằng: $x_1^3 + x_2^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + 4 > 0$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

e) Xác định m để $x_1^3 + x_2 = 2$

Hướng dẫn giải

1. Với $m=3$ thay vào phương trình (1) ta có: $-7x^2 + 14x + 2 = 0$

Ta có: $\Delta' = 7^2 + 14 = 63 > 0$.

Khi đó phương trình có nghiệm phân biệt: $x_{1,2} = \frac{-7 \pm 3\sqrt{7}}{-7} = \frac{7 \mp 3\sqrt{7}}{7}$

2. Phương trình có 1 nghiệm bằng 2 nên khi đó ta thay $x=2$ vào phương trình (1) ta được $(m-10).4 - 2(m-10).2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 = 0$ (vô lí).

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn phương trình có nghiệm bằng 2.

3. Để phương trình có nghiệm duy nhất thì (1) là phương trình bậc nhất có nghiệm duy nhất.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-10=0 \\ m-10 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=10 \\ m \neq 10 \end{cases} \text{ (vô lí)}.$$

Vậy không có giá trị nào của m để phương trình có nghiệm duy nhất.

4. Để phương trình có đúng 1 nghiệm thì (1) là phương trình bậc nhất có 1 nghiệm

Hoặc (1) là phương trình bậc hai có nghiệm kép.

Trường hợp 1: (1) là phương trình bậc nhất có 1 nghiệm $\Rightarrow$ vô lí (chứng minh câu 3)

Trường hợp 2: (1) là phương trình bậc hai có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 10 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 10 \\ (m-10)^2 - 2(m-10) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 12$$

Với $m=12$ Phương trình có dạng $2x^2 - 4x + 2 = 0$ suy ra phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 1$ (thỏa mãn).

Vậy với $m=12$ thì phương trình có 1 nghiệm nguyên.

5. Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thì $\begin{cases} m-10 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} m \neq 10 \\ (m-10)^2 - 2(m-10) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 10 \\ m^2 - 22m + 120 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 10 \\ (m-11)^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 10 \\ m > 12 \\ m < 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 12 \\ m < 10 \end{cases}.$$

Theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (2) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{m-10} & (3) \end{cases}$

a) Ta có $(x_1 + x_2)^2 = 5x_1x_2 - 9 \Leftrightarrow 4 = 5 \cdot \frac{2}{m-10} - 9 \Leftrightarrow 13(m-10) = 10 \Leftrightarrow m = \frac{140}{13}$ (loại)

b) Ta có $x_1 - x_2 = 4 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 16 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 16 \Leftrightarrow 4 - 4 \cdot \frac{2}{m-10} = 16$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{m-10} = -3 \Leftrightarrow m = \frac{28}{3} \text{ (thỏa mãn).}$$

Thử lại:

Với $m = \frac{28}{3}$ thay vào phương trình ta được $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

Ta thấy $a - b + c = 0$ nên phương trình có nghiệm $x_1 = 3, x_2 = -1$ mà $x_1 - x_2 = 4$ (thỏa mãn)

Vậy $m = \frac{28}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Ta có $(m-10)x_1^2 + 2(m-10)x_2 + 2 = m^2$ mà do x_1 là nghiệm của phương trình nên ta có

$$(m-10)x_1^2 - 2(m-10)x_1 + 2 = 0 \text{ từ đó ta có: } 2(m-10)(x_1 + x_2) = m^2$$

$$\Leftrightarrow 4(m-10) = m^2 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 40 = 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 + 36 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

d) Ta có $x_1^3 + x_2^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + 4 = (x_1 + x_2)^3 - 2x_1x_2(x_1 + x_2) + 4 = 8 - \frac{8}{m-10} + 4 = 12 - \frac{8}{m-10}$

+) Với $m < 10 \Rightarrow 12 - \frac{8}{m-10} > 0$

+) Với $m > 12 \Rightarrow m-10 > 2 \Rightarrow \frac{8}{m-10} < 4 \Rightarrow 12 - \frac{8}{m-10} > 0$

Do đó $x_1^3 + x_2^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + 4 > 0$ với mọi giá trị $m \in (-\infty; 10) \cup (12; +\infty)$

e) Ta có $\begin{cases} x_1^3 + x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1^3 - x_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \\ x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \\ x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = 3 \end{cases}$

Với $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ thay vào (3) suy ra $0 = \frac{2}{m-10}$ (vô lý)

Với $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ thay vào (3) suy ra $1 = \frac{2}{m-10} \Rightarrow m = 12$ (loại)

Với $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$ thay vào (3) suy ra $-3 = \frac{2}{m-10} \Rightarrow m = \frac{28}{3}$ (thỏa mãn)

Vậy với $m = \frac{28}{3}$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Bài 19. Cho phương trình $ax^2 + x + a - 1 = 0$. (1) với a là tham số thực.

1. Giải phương trình trên với $a = 0$.
2. Tìm a để (1) có nghiệm bằng 3, tìm nghiệm còn lại.
3. Tìm tất cả các giá trị của a để phương trình có nghiệm.
4. Xác định giá trị nguyên của a để (1) có nghiệm nguyên.
5. Tìm giá trị của a để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho:

a) $x_1 + x_2 = 4x_1x_2 - 5$.

b) $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 2$.

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$.

d) $\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| > 1$.

e) $(x_1 + x_2)^3 + x_1x_2 = 3$

f) $x_1^2 + x_2^2 > 2$.

g) Thiết lập hệ thức giữa hai nghiệm độc lập với a .

Lời giải

1. Với $a = 0$ phương trình (1) trở thành: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1\}$.

2. Phương trình (1) có nghiệm bằng 3 khi đó $x = 3$ thỏa mãn phương trình (1) tức là:

$$a \cdot 3^2 + 3 + a - 1 = 0 \Rightarrow 10a + 2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{5}.$$

Với $a = -\frac{1}{5}$ thì phương trình (1) trở thành:

$$-\frac{1}{5}x^2 + x - \frac{1}{5} - 1 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow (3 - x)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 - x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Khi đó nghiệm còn lại là $x = 2$

Vậy $a = -\frac{1}{5}$ và nghiệm còn lại của phương trình là $x = 2$.

3.

Với $a = 0$ phương trình (1) trở thành:

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$. Khi đó phương trình có nghiệm. Suy ra $a = 0$ thỏa mãn.

Với $a \neq 0$ phương trình (1) là phương trình bậc hai 1 ẩn. Để phương trình có nghiệm thì:

$$\Delta = 1^2 - 4.a.(a - 1) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4a^2 + 4a \geq 0 \Leftrightarrow 2 - (4a^2 - 4a + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - (2a - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2a - 1)^2 \leq 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq 2a - 1 \leq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq 2a \leq 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Vậy để phương trình có nghiệm thì: $\frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

4.

+) Với $a = 0$ phương trình (1) trở thành: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$. Khi đó phương trình có nghiệm nguyên.

Suy ra $a = 0$ thỏa mãn

+) Với $a \neq 0$ phương trình (1) là phương trình bậc hai 1 ẩn. Để phương trình có nghiệm thì:

$$\Delta = 1^2 - 4.a.(a - 1) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4a^2 + 4a \geq 0 \Rightarrow \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2} \text{ (phần 3.)}$$

Ta có a là số nguyên thỏa mãn $\frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ và $a \neq 0$ suy ra $a = 1$.

Đảo lại: $a = 1$ phương trình (1) trở thành: $x^2 + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$, do đó $a = 1$ thỏa mãn.

Vậy $a = 0$ hoặc $a = 1$ thì phương trình có nghiệm nguyên.

5.

Để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thì $a \neq 0$ và $\Delta \geq 0$

$$\Delta = 1^2 - 4.a.(a - 1) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4a^2 + 4a \geq 0 \Rightarrow \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Khi đó áp dụng định lí Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{1}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{a - 1}{a} \end{cases} \quad (*)$$

a) Thay (*) vào biểu thức ta được:

$$x_1 + x_2 = 4x_1 x_2 - 5 \Leftrightarrow -\frac{1}{a} = \frac{4(a - 1)}{a} - 5 \Leftrightarrow -1 = 4a - 4 - 5a \Rightarrow a = -3 \text{ (Loại)}$$

Vậy không có giá trị a thỏa mãn.

b) $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 2.$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Thay (*) vào biểu thức trên ta được:

$$\frac{1}{a^2} - \frac{3(a-1)}{a} = 2 \Leftrightarrow 1 - 3a(a-1) = 2a^2 \Leftrightarrow -5a^2 + 3a + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3 - \sqrt{29}}{10} \text{ (loại)} \\ a = \frac{3 + \sqrt{29}}{10} \end{cases}.$$

Vậy $a = \frac{3 + \sqrt{29}}{10}$.

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = 2$.

Thay (*) vào biểu thức trên ta được:

$$\frac{-\frac{1}{a}}{\frac{a-1}{a}} = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{a-1} = 2 \Leftrightarrow -1 = 2(a-1) \Leftrightarrow -1 = 2a - 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ (tm)}$$

Vậy $a = \frac{1}{2}$.

d) $\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| > 1 \Rightarrow \left| \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} \right| > 1 \Rightarrow \frac{(x_1 - x_2)^2}{(x_1 x_2)^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} > 1$.

Thay (*) vào biểu thức trên ta được:

$$\begin{cases} \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{4(a-1)}{a}}{\frac{(a-1)^2}{a^2}} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{4a(a-1)}{a^2}}{\frac{(a-1)^2}{a^2}} > 1 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 - 4a(a-1)}{(a-1)^2} > 1 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 - 4a(a-1)}{(a-1)^2} - 1 > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 - 4a(a-1)}{(a-1)^2} - \frac{(a-1)^2}{(a-1)^2} > 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 - 4a(a-1) - (a-1)^2}{(a-1)^2} > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4a(a-1) - (a-1)^2 > 0 \Leftrightarrow -5a^2 + 6a > 0 \Leftrightarrow a(-5a + 6) > 0 \Rightarrow 0 < a < \frac{6}{5}$$

Kết hợp với $\frac{1 - \sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$; $a \neq 0$ ta được

Vậy $0 < a < \frac{6}{5}$ và $a \neq 1$

e) $(x_1 + x_2)^5 + x_1 x_2 = 3$

Thay (*) vào biểu thức trên ta được:

$$-\frac{1}{a^5} + \frac{a-1}{a} = 3 \Leftrightarrow -1 + a^4(a-1) = 3a^5 \Leftrightarrow 2a^5 + a^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow (a+1)(2a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ 2a^4 - a^3 + a^2 - a + 1 = 0 \text{ (VN)} \end{cases}$$

Vậy $a = -1$

f) $x_1^2 + x_2^2 > 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 > 2$

Thay (*) vào biểu thức trên ta được:

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} - \frac{2(a-1)}{a} > 2 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} - \frac{2a(a-1)}{a^2} - \frac{2a^2}{a^2} > 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4a^2 + 2a + 1}{a^2} > 0 \quad (2)$$

Ta có $a^2 > 0, \forall a \neq 0$ khi đó :

$$(2) \Leftrightarrow -4a^2 + 2a + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{4} - \left(2a - \frac{1}{2}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \left(2a - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} < 2a - \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{4} < a < \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Kết hợp với $\frac{1-\sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ ta được $\frac{1-\sqrt{2}}{2} \leq a < \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Vậy $\frac{1-\sqrt{2}}{2} \leq a < \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

g) với $\frac{1-\sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}; a \neq 0$. Ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{1}{a} \\ x_1x_2 = \frac{a-1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{1}{a} \quad (3) \\ x_1x_2 = 1 - \frac{1}{a} \quad (4) \end{cases}$$

Từ (3) $\Rightarrow -\frac{1}{a} = x_1 + x_2$ thay vào (4) ta được:

$$x_1x_2 = 1 + x_1 + x_2 \Leftrightarrow x_1x_2 - x_1 - x_2 = 1.$$

Vậy hệ thức cần tìm là: $x_1x_2 - x_1 - x_2 = 1$

Bài 20. Cho phương trình : $x^2 + 1 = \frac{x}{a}$ (1) với a là tham số thực .

CHUYÊN ĐỀ 9.HỆ THỨC VI-ÉT

1. Giải (1) khi a thỏa mãn $a^3 + a^2 = \frac{3}{8}$
2. Tìm a để phương trình (1) có một nghiệm bằng 1 .
3. Xác định a để phương trình trên có nghiệm
4. Khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$
 - a. Tìm a để nghiệm này gấp 4 lần nghiệm kia
 - b. Tìm a để $x_1 - x_2 = 2$
 - c. Tìm a để $x_1^2 + x_2^2 = 10$
 - d. Tìm a để $|x_1^2 - x_2^2| > \frac{1}{a}$
 - e. Tìm a để hai nghiệm tương ứng là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{2}$.
5. Tìm giá trị nguyên của a để (1) có hai nghiệm đều thuộc đoạn $[1; 2]$.

Bài 21. Cho phương trình : $x^2 + 1 = \frac{x}{a}$ (1) với a là tham số thực .

1. Giải (1) khi a thỏa mãn $a^3 + a^2 = \frac{3}{8}$
2. Tìm a để phương trình (1) có một nghiệm bằng 1 .
3. Xác định a để phương trình trên có nghiệm
4. Khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$
 - a. Tìm a để nghiệm này gấp 4 lần nghiệm kia
 - b. Tìm a để $x_1 - x_2 = 2$
 - c. Tìm a để $x_1^2 + x_2^2 = 10$
 - d. Tìm a để $|x_1^2 - x_2^2| > \frac{1}{a}$
 - e. Tìm a để hai nghiệm tương ứng là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng $\sqrt{2}$.
5. Tìm giá trị nguyên của a để (1) có hai nghiệm đều thuộc đoạn $[1; 2]$.

Lời giải

1. Ta có $a^3 + a^2 = \frac{3}{8} \Leftrightarrow 8a^3 + 8a^2 - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 8a^3 - 4a^2 + 12a^2 - 6a + 6a - 3 = 0 \Leftrightarrow 4a^2(2a - 1) + 6a(2a - 1) + 3(2a - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a-1)(4a^2+6a+3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-1=0 \\ 4a^2+6a+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ \left(2a+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=0(VN) \end{cases}$$

Thay $a=\frac{1}{2}$ vào (1) ta có: $x^2+1=2x \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$.

2. Vì phương trình (1) có một nghiệm bằng 1 nên ta thay $x=1$ vào phương trình (1) có :

$$1+1=\frac{1}{a} \Leftrightarrow 2=\frac{1}{a} \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

Với $a=\frac{1}{2}$ ta có pt : $x^2+1=2x \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy $a=\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$3. \quad x^2+1=\frac{x}{a} \quad \text{ĐK: } a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{a}x + 1 = 0$$

$$\Delta = \frac{1}{a^2} - 4$$

$$\text{Để phương trình đã cho có nghiệm thì } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-4a^2}{a^2} \geq 0$$

$$\text{Vì } a^2 > 0 \quad \forall a \neq 0 \Rightarrow 1-4a^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4a^2 \leq 1 \Leftrightarrow |2a| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2a \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$$

Kết hợp điều kiện ta có $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ và $a \neq 0$ thì phương trình đã cho có nghiệm.

$$4. \quad x^2+1=\frac{x}{a} \quad \text{ĐK: } a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{a}x + 1 = 0$$

$$\text{Có } \Delta = \frac{1}{a^2} - 4$$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$ và $a \neq 0$

$$\text{Khi đó theo định lý Vi-ét ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1}{a} & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = 1 & (2) \end{cases}$$

a. Vì nghiệm này gấp 4 lần nghiệm kia nên ta có:

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\begin{cases} x_1 = 4x_2 \\ x_2 = 4x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 4x_2 = 0 \\ x_2 - 4x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1 - 4x_2)(x_2 - 4x_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 - 4(x_1^2 + x_2^2) + 16x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow 17x_1x_2 - 4[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] = 0$$

$$\Leftrightarrow 17 - 4\left(\frac{1}{a^2} - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} - 2 = \frac{17}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{25}{4} \Leftrightarrow a = \pm \frac{2}{5} \text{ (tm)}$$

b. Theo đề bài $x_1 - x_2 = 2$ (3)

Từ (1) và (3) ta có hệ pt:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1}{a} \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+2a}{2a} \\ x_2 = \frac{1-2a}{2a} \end{cases}$$

Thay vào (2) ta được: $\frac{1+2a}{2a} \cdot \frac{1-2a}{2a} = 1 \Leftrightarrow 1 - 4a^2 = 4a^2 \Leftrightarrow 8a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ (t m)}$

c. $x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} - 2 = 10 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} = 12 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{12}$

$$\Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ (t m)}$$

d. $|x_1^2 - x_2^2| > \frac{1}{a} \Leftrightarrow |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| > \frac{1}{a} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{a} \cdot (x_1 - x_2)\right| > \frac{1}{a} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{a}\right| \cdot |x_1 - x_2| > \frac{1}{a}$

+) Th1: $-\frac{1}{2} < a < 0$ ta có:

$$|x_1 - x_2| > -1 \text{ (luôn đúng)}$$

+) Th2: $0 < a < \frac{1}{2}$ ta có:

$$|x_1 - x_2| > 1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 > 1 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 > 1$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} - 4 - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} - 5 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} > 5 \Leftrightarrow a^2 < \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow |a| < \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{5} < a < \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Kết hợp đk $0 < a < \frac{1}{2}$ ta có: $0 < a < \frac{\sqrt{5}}{5}$

Vậy $-\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{5}}{5}$ và $a \neq 0$ thì $|x_1^2 - x_2^2| > \frac{1}{a}$

e. Để hai nghiệm là độ dài hai cạnh góc vuông của tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng

$\sqrt{2}$ thì pt đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ cùng dương thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 2$

$$+) \text{ Để pt đã cho có hai nghiệm phân biệt cùng dương thì } \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}, a \neq 0 \\ \frac{1}{a} > 0 \\ 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{2}.$$

$$+) x_1^2 + x_2^2 = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} - 2 = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} = 4 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \pm \frac{1}{2} \text{ (ko tm)}$$

Vậy không có giá trị a thỏa mãn ycbt.

5. Phương trình (1) có hai nghiệm đều thuộc đoạn $[1; 2] \Leftrightarrow$ pt (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn

$$1 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x_1 \leq x_2 \text{ và } x_1 \leq x_2 \leq 2$$

Để pt (1) có hai nghiệm thì $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ và $a \neq 0$.

$$\text{Xét } 1 \leq x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow 0 \leq x_1 - 1 \leq x_2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 1) + (x_2 - 1) \geq 0 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2 \geq 0 \\ x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} - 2 \geq 0 \\ 1 - \frac{1}{a} + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} \geq 2 \\ \frac{1}{a} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ (tm)}$$

Thay $a = \frac{1}{2}$ vào phương trình ta được: $x^2 - 2x + 1 = 0$

Có $\Delta = 0 \Rightarrow$ Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 1 < 2$ thỏa mãn đk $x_1 \leq x_2 \leq 2$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 21. Cho phương trình: $mx^2 - (m+2)x + 1 = 0$ (1); với m là tham số thực.

1) Giải phương trình đã cho với $m = 5$.

2) Tìm m để (1) có nghiệm bằng 3. Tìm nghiệm còn lại.

3) Tìm giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

4) Chứng minh phương trình (1) luôn có nghiệm với m khác 0.

5) Tìm giá trị của m để (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

a) $x_1 + x_2 - 5x_1x_2 = 4$.

b) $x_1 - 2x_2 = 0$

c) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 = x_1 + x_2 + 7$.

d) $mx_1^2 + (m+2)x_2 + 1 = 9m^2$.

e) Biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

6) Giả sử (1) có hai nghiệm là a, b . Chứng minh rằng $(ma+1)^2 + (mb+1)^2 > \frac{1}{2}(m+2)^2$ và $|a-b| > 1$.

7) Xác định giá trị nguyên của m để phương trình (1) có nghiệm nguyên.

Lời giải

1) Với $m=5$, phương trình (1) trở thành $5x^2 - 7x + 1 = 0$ (2).

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 29 > 0$$

$\Rightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{7+\sqrt{29}}{10}$; $x_2 = \frac{7-\sqrt{29}}{10}$.

2) Phương trình (1) có nghiệm bằng 3 $\Leftrightarrow m \cdot 3^2 - (m+2) \cdot 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow 9m - 3m - 6 + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 6m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{6}.$$

Vậy với $m = \frac{5}{6}$ thì phương trình (1) có nghiệm bằng 3 và phương trình (1) là phương trình bậc hai có hai nghiệm (hoặc phân biệt, hoặc bằng nhau).

Khi đó, theo hệ thức Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+2}{m} = \frac{17}{5} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{m} = \frac{6}{5} \end{cases}.$$

Do phương trình (1) có một nghiệm là 3, không mất tính tổng quát giả sử $x_1 = 3$. Ta có

$$\begin{cases} 3 + x_2 = \frac{17}{5} \\ 3 \cdot x_2 = \frac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{2}{5} \\ x_2 = \frac{6}{15} \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = \frac{2}{5}.$$

Vậy với $m = \frac{5}{6}$ thì phương trình (1) có nghiệm bằng 3 và nghiệm còn lại là $\frac{2}{5}$.

3) Ta xét hai trường hợp sau:

TH1: $m = 0 \Rightarrow -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Với $m = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = \frac{1}{2} \Rightarrow m = 0$ thỏa mãn.

TH2: $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (m+2)^2 - 4.m.1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 4 \geq 0 \text{ (t/m } \forall m) \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$

Kết hợp hai trường hợp $\Rightarrow$ Phương trình (1) có nghiệm với mọi m .

4) Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 4 > 0 \text{ (t/m } \forall m) \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm với m khác 0.

5) Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 4 \geq 0 \text{ (t/m } \forall m) \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$

Theo định lí Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+2}{m} \quad (3) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{m} \quad (4) \end{cases}.$

a) $x_1 + x_2 - 5x_1 \cdot x_2 = 4 \quad (5).$

Thay (3), (4) vào, ta được: $\frac{m+2}{m} - \frac{5}{m} = 4 \Rightarrow m+2-5=4m$

$\Leftrightarrow 3m = -3 \Leftrightarrow m = -1$ (thỏa mãn).

Vậy $m = -1$.

b) $x_1 - 2x_2 = 0 \quad (6).$

Từ (3) và (6) $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+2}{m} \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_2 = \frac{m+2}{m} \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{m+2}{3m} \\ x_1 = \frac{2(m+2)}{3m} \end{cases} \quad (*).$

Thay (*) vào (4) ta được: $\frac{2(m+2)}{3m} \cdot \frac{m+2}{3m} = \frac{1}{m} \Leftrightarrow \frac{2(m+2)^2}{9m} = 1 \Rightarrow 2(m^2 + 4m + 4) = 9m$

$\Leftrightarrow 2m^2 - m + 8 = 0$ vô nghiệm.

Vậy không có m thỏa mãn.

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$c) x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 = x_1 + x_2 + 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 7 \quad (7).$$

Thay (3), (4) vào (7) ta được

$$\left(\frac{m+2}{m}\right)^2 + \frac{1}{m} - \left(\frac{m+2}{m}\right) = 7 \Rightarrow m^2 + 4m + 4 + m - m^2 - 2m = 7m^2 \Leftrightarrow 7m^2 - 3m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{4}{7} \text{ (thỏa mãn)}. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m \in \left\{1; -\frac{4}{7}\right\}.$$

$$d) \text{ Vì } x_1 \text{ là nghiệm của phương trình (1) nên } mx_1^2 - (m+2)x_1 + 1 = 0 \Leftrightarrow mx_1^2 = (m+2)x_1 - 1.$$

$$\text{Do đó: } mx_1^2 + (m+2)x_2 + 1 = 9m^2$$

$$\Leftrightarrow (m+2)x_1 - 1 + (m+2)x_2 + 1 = 9m^2 \Leftrightarrow (m+2)(x_1 + x_2) - 9m^2 = 0 \quad (8).$$

$$\text{Thay (3) vào (8) ta được: } (m+2) \cdot \left(\frac{m+2}{m}\right) - 9m^2 = 0$$

$$\Rightarrow 9m^3 - m^2 - 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(9m^2 + 8m + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ (t/m)} \\ 9m^2 + 8m + 4 = 0 \text{ (VN)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m = 1.$$

$$e) P = x_1^2 + x_2^2 - 5x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 7x_1x_2$$

$$\Rightarrow P = \left(\frac{m+2}{m}\right)^2 - 7\left(\frac{m+2}{m}\right) = \left(1 + \frac{2}{m}\right)^2 - 7\left(1 + \frac{2}{m}\right) = \frac{4}{m^2} - \frac{10}{m} - 6$$

$$= \left(\frac{2}{m} - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \geq -\frac{49}{4}, \forall m \neq 0.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \frac{2}{m} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow m = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Vậy } m = \frac{4}{5}.$$

$$6) \text{ Phương trình (1) có hai nghiệm } a, b \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 4 \geq 0 \text{ (t/m } \forall m) \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Theo định lí Vi-et, ta có:
$$\begin{cases} a+b=\frac{m+2}{m} \\ a.b=\frac{1}{m} \end{cases} \quad (9).$$

$$+) (ma+1)^2 + (mb+1)^2 > \frac{1}{2}(m+2)^2 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow m^2(a^2+b^2) + 2m(a+b) + 2 > \frac{1}{2}m^2 + 2m + 2$$

$$\Leftrightarrow m^2((a+b)^2 - 2ab) + 2m(a+b) > \frac{1}{2}m^2 + 2m$$

$$\Leftrightarrow m^2 \left(\left(\frac{m+2}{m} \right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{m} \right) + 2m \left(\frac{m+2}{m} \right) > \frac{1}{2}m^2 + 2m \quad (\text{theo 9})$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 16 > 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 + 12 > 0 \text{ luôn đúng với mọi } m \neq 0.$$

Do đó (*) đúng với mọi $m \neq 0$.

$$+) |a-b| > 1 \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 > 1$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 - 4ab > 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{m+2}{m} \right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{m} > 1 \quad (\text{theo 9})$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{m^2} > 0 \text{ luôn đúng với mọi } m \neq 0.$$

Do đó (**) đúng với mọi $m \neq 0$.

7) Ta xét hai trường hợp sau:

$$\text{TH1: } m=0 \Rightarrow -2x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Với $m=0$ thì phương trình (1) có nghiệm $x=\frac{1}{2} \Rightarrow m=0$ không thỏa mãn.

$$\text{TH2: } \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (m+2)^2 - 4 \cdot m \cdot 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 4 \geq 0 \quad (\forall m) \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Để phương trình (1) có nghiệm nguyên thì $\Delta = m^2 + 4$ là số chính phương $\Leftrightarrow m^2 + 4 = a^2, a \in \mathbb{Z}$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\Leftrightarrow m^2 - a^2 = 4 \Leftrightarrow (m - a)(m + a) = 4.$$

Do $m - a$, $m + a$ cùng tính chẵn lẻ nên ta có hai trường hợp sau

$$\begin{cases} m - a = 2 \\ m + a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ a = 0 \end{cases} \quad (t/m)$$
$$\begin{cases} m - a = -2 \\ m + a = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ a = 0 \end{cases} \quad (t/m)$$

Với $m = 2$, phương trình (1) trở thành: $2x^2 - 4x + 1 = 0$.

Giải phương trình này ta được 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$; $x_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.

Với $m = -2$, phương trình (1) trở thành: $-2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Do đó không có giá trị nào của m để phương trình (1) có nghiệm nguyên.

Bài 23. Cho phương trình $(2m - 5)x^2 - 2(m - 1)x + 3 = 0$ (1); với m là tham số thực.

7. Giải phương trình (1) khi $m = 3$.

8. Tìm m để phương trình (1) có một nghiệm bằng 2, tìm nghiệm còn lại.

9. Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm.

10. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho:

f) $x_1 - x_2 = 3$

g) Nghiệm này bằng lập phương nghiệm kia.

h) $x_1^3 - x_2^3 = 6$

i) $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1x_2 = 0$

j) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$

k) $x_1 \in [2; 3], x_2 \in [0; 1]$

11. Xác định giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt đều nguyên dương.

Lời giải

7. Khi $m = 3$ ta có phương trình (1) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

Vậy khi $m=3$ phương trình (1) có nghiệm $x=1, x=3$

8. Phương trình (1) có nghiệm bằng 2 nghĩa là $x=2$ thỏa mãn phương trình (1)

Thay $x=2$ vào (1) ta có: $(2m-5)4-4(m-1)+3=0$

$$\Leftrightarrow 8m-20-4m+4+3=0$$

$$\Leftrightarrow 4m-13=0$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{13}{4}$$

Thay $m=\frac{13}{4}$ vào phương trình (1) ta có: $\left(\frac{13}{2}-5\right)x^2-2\left(\frac{13}{4}-1\right)x+3=0$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2-\frac{9}{2}x+3=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases}$$

Vậy với $m=\frac{13}{4}$, phương trình (1) có nghiệm bằng 2 và nghiệm còn lại sẽ bằng 1.

3. Tìm giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm.

➤ Trường hợp 1: $2m-5=0 \Leftrightarrow m=\frac{5}{2}$ ta có phương trình (1) $\Leftrightarrow -3x+3=0$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ nên } m=\frac{5}{2} \text{ thỏa mãn. (*)}$$

➤ Trường hợp 2: $2m-5 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{5}{2}$ khi đó phương trình $(2m-5)x^2-2(m-1)x+3=0$

$$\text{Có } \Delta' = b'^2 - ac = (m-1)^2 - 3(2m-5) = m^2 - 2m + 1 - 6m + 15$$

$$= m^2 - 8m + 16 = (m-4)^2$$

Ta thấy với mọi giá trị của $m \neq \frac{5}{2}$ thì $\Delta' \geq 0$ nên phương trình (1) luôn có nghiệm (**)

Kết luận: Từ (*) và (**) ta có mọi giá trị của m phương trình (1) luôn có nghiệm

CHUYÊN ĐỀ 9.HỆ THỨC VI-ÉT

4. Xét phương trình $(2m - 5)x^2 - 2(m - 1)x + 3 = 0$ (1); với m là tham số thực.

Ta có: $a = 2m - 5$, $b = 2(m - 1)$, $c = 3$

Điều kiện để phương trình trên là phương trình bậc hai là $2m - 5 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{5}{2}$

Ta thấy $a + b + c = 2m - 5 - 2m + 2 + 3 = 0$

Do đó phương trình có hai nghiệm là $\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2m - 5} \end{cases}$ với mọi $m \neq \frac{5}{2}$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt cần $\frac{3}{2m - 5} \neq 1 \Leftrightarrow 2m - 5 \neq 3 \Leftrightarrow m \neq 4$

Vậy với mọi m sao cho $m \neq \frac{5}{2}$; $m \neq 4$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2m - 5} \end{cases}$

a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 - x_2 = 3$

Với mọi m sao cho $m \neq \frac{5}{2}$; $m \neq 4$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2m - 5} \end{cases}$

Vì $x = 1$ luôn là nghiệm của phương trình (1) nên ta có:

Trường hợp 1: $x_1 = 1$

$$x_1 - x_2 = 3 \Rightarrow 1 - x_2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x_2 = -2$$

Thay $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ vào (3) ta được: $-2 = \frac{3}{2m - 5} \Leftrightarrow -4m + 10 = 3$

$$\Leftrightarrow m = \frac{7}{4} \text{ (thỏa mãn)}$$

Trường hợp 2: $x_2 = 1$

$$x_1 - x_2 = 3 \Rightarrow x_1 - 1 = 3$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 4$$

Thay $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ vào (3) ta được: $4 = \frac{3}{2m - 5} \Leftrightarrow 8m - 20 = 3$

$$\Leftrightarrow m = \frac{23}{8} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy với $m = \frac{7}{4}$ và $m = \frac{23}{8}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 - x_2 = 3$.

- b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho nghiệm này bằng lập phương nghiệm kia nghĩa là $x_1 = x_2^3$

Với mọi m sao cho $m \neq \frac{5}{2}; m \neq 4$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt là
$$\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2m-5} \end{cases}$$

➤ Trường hợp 1: $x_1 = 1; x_2 = \frac{3}{2m-5}$

$$x_1 = x_2^3 \Rightarrow x_2^3 = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1$$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = 1$ không thỏa mãn điều kiện hai nghiệm phân biệt

➤ Trường hợp 2: $x_2 = 1; x_1 = \frac{3}{2m-5}$

$$x_1 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = 1$$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = 1$ không thỏa mãn điều kiện hai nghiệm phân biệt

Vậy không có giá trị nào của m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt sao cho $x_1 = x_2^3$

- c) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^3 - x_2^3 = 6$

Với mọi m sao cho $m \neq \frac{5}{2}; m \neq 4$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt là
$$\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2m-5} \end{cases}$$

Vì $x = 1$ luôn là nghiệm của phương trình (1) nên ta có:

+ Trường hợp 1: $x_1 = 1$

$$x_1^3 - x_2^3 = 6 \Rightarrow 1 - x_2^3 = 6$$

$$\Leftrightarrow x_2^3 = -5 \Leftrightarrow x_2 = \sqrt[3]{-5}$$

Thay $x_1 = 1, x_2 = \sqrt[3]{-5}$ vào (3) ta được

$$1 \cdot \sqrt[3]{-5} = \frac{3}{2m-5} \Leftrightarrow \sqrt[3]{-5} = \frac{3}{2m-5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{-5}(2m-5) = 3 \Leftrightarrow -2\sqrt[3]{5}m + 5\sqrt[3]{5} = 3$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{5\sqrt[3]{5} - 3}{2\sqrt[3]{5}}$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\Leftrightarrow m = \frac{(5\sqrt[3]{5} - 3) \cdot \sqrt[3]{25}}{2\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{25 - 3\sqrt[3]{25}}{10} \text{ (thỏa mãn)}$$

+ Trường hợp 2: $x_2 = 1$

$$x_1^3 - x_2^3 = 6 \Rightarrow x_1^3 - 1 = 6$$

$$\Leftrightarrow x_1^3 = 7 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt[3]{7}$$

Thay $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt[3]{-5}$ vào (3) được $\sqrt[3]{7} \cdot 1 = \frac{3}{2m-5} \Leftrightarrow \sqrt[3]{7} = \frac{3}{2m-5}$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{7}(2m-5) = 3 \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{7}m - 5\sqrt[3]{7} = 3$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{3 + 5\sqrt[3]{7}}{2\sqrt[3]{7}}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{(3 + 5\sqrt[3]{7}) \cdot \sqrt[3]{49}}{2\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{49}}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{3\sqrt[3]{49} + 35}{14} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = \frac{25 - 3\sqrt[3]{25}}{10}$ và $m = \frac{3\sqrt[3]{49} + 35}{14}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt sao cho

$$x_1^3 - x_2^3 = 6$$

d) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1x_2 = 0$

Với mọi m sao cho $m \neq \frac{5}{2}$; $m \neq 4$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2m-5} \end{cases}$

Vì $x = 1$ luôn là nghiệm của phương trình (1) nên ta có:

Trường hợp 1: $x_1 = 1$

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1x_2 = 0 \Rightarrow 1 + 2x_2^2 + 3x_2 = 0 \Leftrightarrow (x_2 + 1)(2x_2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Thay $x_1 = 1$; $x_2 = -1$ vào (3) ta có: $-1 = \frac{3}{2m-5} \Leftrightarrow 2m-5 = -3$

$$\Leftrightarrow m = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Thay $x_1 = 1; x_2 = \frac{-1}{2}$ vào (3) ta có: $\frac{-1}{2} = \frac{3}{2m-5} \Leftrightarrow 2m-5 = -6$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-1}{2} \quad (\text{thỏa mãn})$$

Trường hợp 2: $x_2 = 1$

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1x_2 = 0 \Rightarrow x_1^2 + 3x_1 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 + 1)(x_1 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_1 = -2 \end{cases}$$

Thay $x_1 = -1; x_2 = 1$ vào (3) ta có $m = 1$ (thỏa mãn) (giống trường hợp a của trường hợp 1)

Thay $x_1 = -2; x_2 = 1$ vào (3) ta có $-2 = \frac{3}{2m-5} \Rightarrow -4m+10=3$

$$\Leftrightarrow m = \frac{7}{4} \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy với $m = 1; m = \frac{-1}{2}; m = \frac{7}{4}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_1x_2 = 0$$

e) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho

Với mọi m sao cho $m \neq \frac{5}{2}; m \neq 4$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2m-5} \end{cases}$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2x_1x_2 \Leftrightarrow \frac{2(m-1)}{2m-5} = \frac{6}{2m-5}$$

$$\Rightarrow 2(m-1) = 6$$

$$\Leftrightarrow 2m = 8$$

$$\Leftrightarrow m = 4 \quad (\text{loại})$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta thấy không có giá trị nào của m để phương trình (1) có 2 nghiệm

phân biệt thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 2$

f) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 \in [2; 3], x_2 \in [0; 1]$

Với mọi m sao cho $m \neq \frac{5}{2}; m \neq 4$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2m-5} \end{cases}$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Vì phương trình đã có một nghiệm là $x = 1 \in [0; 1]$

Để thỏa mãn đề bài $x_1 \in [2; 3], x_2 \in [0; 1] \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = \frac{3}{2m-5} \end{cases}$ và cần thêm $x_1 \in [2; 3]$

$$\text{nghĩa là cần } 2 \leq \frac{3}{2m-5} \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2m-5} \geq 2 & (**) \\ \frac{3}{2m-5} \leq 3 & (***) \end{cases}$$

$$\text{Giải (**)} \text{ ta có: } \frac{3}{2m-5} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{3-2(2m-5)}{2m-5} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{13-4m}{2m-5} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4m-13}{2m-5} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m-13 \geq 0 \\ 2m-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{13}{4} \\ m < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \emptyset \\ \frac{5}{2} < m \leq \frac{13}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2} < m \leq \frac{13}{4} \quad (4)$$

$$\text{Giải (***)} \text{ ta có: } \frac{3}{2m-5} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{3-3(2m-5)}{2m-5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{18-6m}{2m-5} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{6m-18}{2m-5} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m-6}{2m-5} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-6 \geq 0 \\ 2m-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m < \frac{5}{2} \end{cases} \quad (5)$$

Kết hợp đồng thời (4) và (5) thì tìm được $3 \leq m \leq \frac{13}{4}$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân

biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 \in [2; 3], x_2 \in [0; 1]$

5. Xác định giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt đều nguyên dương.

Xét phương trình $(2m-5)x^2 - 2(m-1)x + 3 = 0$ (1); với m là tham số thực.

Phương trình (1) luôn có 2 nghiệm $x=1; x=\frac{3}{2m-5}$ với mọi $m \neq \frac{5}{2}, m \neq 4$

Ta có $x=1 \in \mathbb{Z}^+$ để phương trình (1) có 2 nghiệm đều nguyên dương thì $x=\frac{3}{2m-5} \in \mathbb{Z}^+$

Mà $U(3)=\{-1; 1; 3; -3\}$ để $x=\frac{3}{2m-5}$ là số nguyên dương thì $\begin{cases} 2m-5=1 \\ 2m-5=3 \end{cases}$

Trường hợp 1: $2m-5=1 \Leftrightarrow m=3$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $2m-5=3 \Leftrightarrow m=4$ (loại)

Vậy với $m=3$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt đều nguyên dương.

Bài 24. Cho phương trình $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 3 - m = 0$ (1); với m là tham số thực.

1. Giải phương trình (1) với $m=0$.
2. Giải và biện luận phương trình đã cho theo tham số m .
3. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn tổng hai nghiệm bằng tích hai nghiệm.
4. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho
 - a) x_1, x_2 là hai số đối nhau.
 - b) x_1, x_2 là hai số nghịch đảo của nhau.
 - c) $x_1^3 + x_2^3 = 656$

Lời giải

Cho phương trình $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 3 - m = 0$ (1); với m là tham số thực.

1. Giải phương trình (1) với $m=0$.

Với $m=0$ phương trình (1) trở thành: $2x^2 + 2x + 3 = 0$

$$\Delta' = 1 - 6 = -5 < 0$$

Suy ra phương trình vô nghiệm.

2. Giải và biện luận phương trình đã cho theo tham số m .

Xét phương trình $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 3 - m = 0$ (1); với m là tham số thực

Trường hợp 1: $m+2=0 \Rightarrow m=-2$.

Khi đó, phương trình (1) trở thành: $6x+5=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{6}$.

Trường hợp 2: $m+2 \neq 0 \Rightarrow m \neq -2$.

$$\Delta' = (m-1)^2 - (m+2)(3-m) = 2m^2 - 3m - 5$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$=(2m^2 - 5m) + (2m - 5) = (2m - 5)(m + 1)$$

$$\Delta' = 0 \Rightarrow (2m - 5)(m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = -1 \\ m_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{➤ } \Delta' = 0 \Rightarrow (2m - 5)(m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = -1 \\ m_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Với $m = -1$, phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{m-1}{m+2} = -2$.

Với $m = \frac{5}{2}$, phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \frac{m-1}{m+2} = \frac{1}{3}$.

$$\text{➤ } \Delta' > 0$$

$$\Rightarrow (m+1)(2m-5) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ 2m-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m > \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{5}{2} \\ m < -1 \end{cases}$$

Khi $m < -1$ hoặc $m > \frac{5}{2}$, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{m-1-\sqrt{2m^2-3m-5}}{m+2}; \quad x_2 = \frac{m-1+\sqrt{2m^2-3m-5}}{m+2}$$

$$\text{➤ } \Delta' < 0 \Rightarrow (m+1)(2m-5) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ 2m-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < \frac{5}{2}$$

Khi đó, phương trình (1) vô nghiệm.

Kết luận:

- Với $m = -2$, phương trình (1) có nghiệm $x = -\frac{5}{6}$.
- Với $m = -1$, phương trình (1) có nghiệm kép $x = -2$.
- Với $m = \frac{5}{2}$, phương trình (1) có nghiệm kép $x = \frac{1}{3}$.
- Với $m < -1$ hoặc $m > \frac{5}{2}$, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{m-1-\sqrt{2m^2-3m-5}}{m+2}; \quad x_2 = \frac{m-1+\sqrt{2m^2-3m-5}}{m+2}$$

- Với $-1 < m < \frac{5}{2}$, phương trình (1) vô nghiệm.

3. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn tổng hai nghiệm bằng tích hai nghiệm.

Áp dụng kết quả phần 2) ta có: Phương trình (1) có hai nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \neq -2 \\ m \geq \frac{5}{2} \end{cases} \quad (*)$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1)

Theo định lý Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3-m}{m+2} \end{cases}$$

Theo đề bài, ta được:
$$\frac{2(m-1)}{m+2} = \frac{3-m}{m+2} \Rightarrow 2m-2 = 3-m \Rightarrow m = \frac{5}{3} \quad (**)$$

Kết hợp (*) và (**), không tồn tại giá trị m để phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn tổng hai nghiệm bằng tích hai nghiệm.

4. a, Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho x_1, x_2 là hai số đối nhau.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m \neq -2 \\ m > \frac{5}{2} \end{cases} \quad (*)$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Theo định lý Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3-m}{m+2} \end{cases}$$

x_1, x_2 là hai số đối nhau $\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2(m-1)}{m+2} = 0 \Leftrightarrow m = 1$ (loại).

Vậy không có giá trị của m để x_1, x_2 là hai số đối nhau.

4. b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho x_1, x_2 là hai số nghịch đảo của nhau.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m \neq -2 \\ m > \frac{5}{2} \end{cases} (*)$

Theo định lý Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3-m}{m+2} \end{cases}$$

x_1, x_2 là hai số nghịch đảo của nhau $\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{3-m}{m+2} = 1 \Rightarrow 3-m = m+2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ (loại).

Vậy không tồn tại giá trị của m để x_1, x_2 là hai số nghịch đảo của nhau.

4 c) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^3 + x_2^3 = 656$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi $\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m \neq -2 \\ m > \frac{5}{2} \end{cases} (*)$

Theo định lý Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m+2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3-m}{m+2} \end{cases}$$

$x_1^3 + x_2^3 = 656 \Leftrightarrow (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2 \right] = 656$

$\Leftrightarrow \frac{2(m-1)}{m+2} \left\{ \left[\frac{2(m-1)}{m+2} \right]^2 - 3 \cdot \frac{3-m}{m+2} \right\} = 656$

$$\Leftrightarrow \frac{2(m-1)}{m+2} \left[\frac{4(m-1)^2 - 3(3-m)(m+2)}{(m+2)^2} \right] = 656$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(m-1)}{m+2} \left[\frac{4m^2 - 8m + 4 - 9m - 18 + 3m^2 + 6m}{(m+2)^2} \right] = 656$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m-2}{m+2} \left[\frac{7m^2 - 11m - 14}{m^2 + 4m + 4} \right] = 656$$

$$\Leftrightarrow \frac{14m^3 - 22m^2 - 28m - 14m^2 + 22m + 28}{m^3 + 4m^2 + 4m + 2m^2 + 8m + 8} = 656$$

$$\Leftrightarrow \frac{14m^3 - 36m^2 - 6m + 28}{m^3 + 6m^2 + 12m + 8} = 656$$

$$\Leftrightarrow 14m^3 - 36m^2 - 6m + 28 = 656m^3 + 3936m^2 + 7872m + 5248$$

$$\Leftrightarrow 642m^3 + 3972m^2 + 7878m + 5220 = 0$$

$$\Leftrightarrow 642m^3 + 3972m^2 + 7878m + 5220 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+3)(642m^2 + 2046m + 1740) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ 642m^2 + 2046m + 1740 = 0 \end{cases}$$

Giải phương trình $642m^2 + 2046m + 1740 = 0 \Leftrightarrow 321m^2 + 1023m + 870 = 0$

$$\Delta = 1023^2 - 4 \cdot 321 \cdot 870 = -70551 < 0$$

Suy ra phương trình $642m^2 + 2046m + 1740 = 0$ vô nghiệm.

Ta thấy $m = -3$ thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy $m = -3$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^3 + x_2^3 = 656$.

Bài 25. Cho phương trình $mx^2 + 2mx + m^2 + 3m - 3 = 0$ (1); với m là tham số thực.

1) Giải phương trình (1) khi $m = 5$.

2) Tìm m để (1) có một nghiệm bằng 2.

3) Tìm giá trị của m để (1) có nghiệm duy nhất.

4) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện

a) $x_1 - x_2 = 2$.

b) $x_1^3 - x_2 = 2$.

c) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 = 4$.

d) $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{9}{2}$.

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

e) $|x_1 - x_2| = \sqrt{14}$.

5) Tìm nghiệm của phương trình (1) trong trường hợp $m^2 - mn + 2009n^2 = 0$ ($n \in \mathbb{R}$).

6) Xác định m để (1) có hai nghiệm cùng dấu, khi đó hai nghiệm mang dấu gì?

7) Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để (1) có các nghiệm đều là số nguyên.

Lời giải

Xét phương trình $mx^2 + 2mx + m^2 + 3m - 3 = 0$ (1); m là tham số thực.

1) Giải phương trình (1) khi $m = 5$.

Thay $m = 5$ vào phương trình (1) ta có: $5x^2 + 10x + 37 = 0$

$\Delta' = 5^2 - 5.37 = -160 < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy khi $m = 5$ phương trình (1) vô nghiệm.

2) Tìm m để (1) có một nghiệm bằng 2.

Thay $x = 2$ vào phương trình (1) ta có $4m + 2m.2 + m^2 + 3m - 3 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 11m - 3 = 0$

$\Delta = 11^2 - 4.1.(-3) = 133 > 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$m_1 = \frac{-11 - \sqrt{133}}{2}; m_2 = \frac{-11 + \sqrt{133}}{2}$$

Vậy với $m = \frac{-11 - \sqrt{133}}{2}$ hoặc $m = \frac{-11 + \sqrt{133}}{2}$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = 2$.

3) Tìm giá trị của m để (1) có nghiệm duy nhất.

Để phương trình (1) có nghiệm duy nhất thì phương trình (1) là phương trình bậc nhất một ẩn
 $\Rightarrow m = 0$

Thay $m = 0$ vào phương trình (1) ta có: $-3 = 0$ (Vô lý)

Vậy không có giá trị nào của m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Sửa lại là:

+ TH1: $m = 0$ ta có:

$$(1) \Leftrightarrow -3 = 0 \text{ (vô lý)}$$

+ TH2: $m \neq 0$

Để phương trình (1) có nghiệm duy nhất thì $\Delta' = 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - m(m^2 + 3m - 3) = 0 \Leftrightarrow m(m - m^2 - 3m + 3) = 0 \Leftrightarrow m(-m^2 - 2m + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -m(m+3)(m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \text{ (L)} \\ m=1 \text{ (TM)} \\ m=-3 \text{ (TM)} \end{cases}$$

Vậy với $\begin{cases} m=1 \\ m=-3 \end{cases}$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất

4a) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1 - x_2 = 2$.

Xét phương trình $mx^2 + 2mx + m^2 + 3m - 3 = 0$ (1); m là tham số thực.

$$\begin{aligned} \Delta' &= (-m)^2 - m(m^2 + 3m - 3) = -m^3 - 2m^2 + 3m = -m(m^2 + 2m - 3) = -m(m^2 + 3m - m - 3) \\ &= -m(m+3)(m-1) \end{aligned}$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ cần

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -m(m+3)(m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m(m+3)(m-1) < 0 \end{cases}$$

Vì $m-1 < m < m+3$ với mọi số thực m và tích âm khi có một nhân tử âm hoặc cả ba nhân tử trong tích đó đều âm nên :

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ m(m+3)(m-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 < 0 \\ m-1 < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Áp dụng hệ thức Viet ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 & (1) \\ x_1 x_2 = \frac{m^2 + 3m - 3}{m} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\text{Thay } \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases} \text{ vào (2) ta có } \frac{m^2 + 3m - 3}{m} = 0 \Rightarrow m^2 + 3m - 3 = 0$$

$\Delta = 3^2 - 4.1.(-3) = 21 > 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$m_1 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \text{ (thỏa mãn)} \quad ; \quad m_2 = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy với $m = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$ hoặc $m = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$x_1 - x_2 = 2.$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

4b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^3 - x_2 = 2$.

Xét phương trình $mx^2 + 2mx + m^2 + 3m - 3 = 0$ (1); m là tham số thực.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khi $\begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 1 \end{cases}$ (*)

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1^3 - x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^3 + x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1(x_1^2 + 1) = 0 \\ x_1 + x_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\text{Thay } \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases} \text{ vào (2) ta có } \frac{m^2 + 3m - 3}{m} = 0 \Rightarrow m^2 + 3m - 3 = 0$$

$\Delta = 3^2 - 4.1.(-3) = 21 > 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$m_1 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \text{ (thỏa mãn); } m_2 = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy với $m = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$ hoặc $m = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^3 - x_2 = 2$.

4c) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 = 4$.

Xét phương trình $mx^2 + 2mx + m^2 + 3m - 3 = 0$ (1); m là tham số thực.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khi $\begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 1 \end{cases}$ (*)

$$\text{Ta có: } x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 = 4$$

$$\Rightarrow (-2)^2 + \frac{m^2 + 3m - 3}{m} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 + 3m - 3}{m} = 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 3m - 3 = 0$$

$\Delta = 3^2 - 4.1.(-3) = 21 > 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$m_1 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \text{ (thỏa mãn); } m_2 = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy với $m = \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}$ hoặc $m = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 = 4.$$

4d) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{9}{2}$.

Xét phương trình $mx^2 + 2mx + m^2 + 3m - 3 = 0$ (1); m là tham số thực.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khi $\begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 1 \end{cases}$ (*)

$$\text{Ta có: } x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{9}{2} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \leq \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow (-2)^2 - 2 \cdot \frac{m^2 + 3m - 3}{m} \leq \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{m^2 + 3m - 3}{m} \geq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{4m^2 + 13m - 12}{4m} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + 13m - 12 \geq 0 \\ 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4m - 3)(m + 4) \geq 0 \\ 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{3}{4} \\ m \leq -4 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{3}{4} \\ -4 \leq m < 0 \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện (*) ta có } \begin{cases} -4 \leq m < -3 \\ \frac{3}{4} \leq m < 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy với } \begin{cases} -4 \leq m < -3 \\ \frac{3}{4} \leq m < 1 \end{cases} \text{ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn } x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{9}{2}.$$

$$\text{Cách khác: Từ } \frac{4m^2 + 13m - 12}{4m} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(4m - 3)(m + 4)}{m} \geq 0$$

➤ Nếu $m > 0$ (2)

$$\Rightarrow m + 4 > 0 \Rightarrow 4m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2), (3) và (*) ta có } \frac{3}{4} \leq m < 1$$

➤ Nếu $m < 0$ (4)

$$\Rightarrow 4m - 3 < 0 \Rightarrow m + 4 > 0 \Leftrightarrow m \geq -4 \quad (5)$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Từ (4), (5) và (*) ta có $-4 \leq m < -3$

Vậy với $\begin{cases} -4 \leq m < -3 \\ \frac{3}{4} \leq m < 1 \end{cases}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{9}{2}$.

4e) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện $|x_1 - x_2| = \sqrt{14}$.

Xét phương trình $mx^2 + 2mx + m^2 + 3m - 3 = 0$ (1); m là tham số thực.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ khi $\begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 1 \end{cases}$ (*)

Ta có: $|x_1 - x_2| = \sqrt{14}$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 14 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 14$$

$$\Rightarrow (-2)^2 - 4 \cdot \frac{m^2 + 3m - 3}{m} = 14 \Leftrightarrow \frac{4m^2 + 22m - 12}{m} = 0 \Rightarrow 4m^2 + 22m - 12 = 0$$

$\Delta' = 11^2 - 4 \cdot (-12) = 169 > 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$m_1 = -6 \text{ (thỏa mãn); } m_2 = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy với $m = -6$ hoặc $m = \frac{1}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $|x_1 - x_2| = \sqrt{14}$.

5) Tìm nghiệm của phương trình (1) trong trường hợp $m^2 - mn + 2009n^2 = 0$ ($n \in \mathbb{R}$).

Ta có: $m^2 - mn + 2009n^2 = 0$ ($n \in \mathbb{R}$)

$$\Delta = (-n)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2009n^2 = -8053n^2$$

+) $n = 0 \Rightarrow n^2 = 0 \Rightarrow -8053n^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm kép $m_1 = m_2 = \frac{n}{2} = 0$

Thay $m = 0$ vào phương trình (1) ta có: $-3 = 0$ (Vô lý) nên $n = 0$ (loại)

+) $n \neq 0 \Rightarrow n^2 > 0 \Rightarrow -8053n^2 < 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm $\Rightarrow$ phương trình (1) vô nghiệm.

Vậy phương trình (1) vô nghiệm trong trường hợp $m^2 - mn + 2009n^2 = 0$ ($n \in \mathbb{R}$).

6) Xác định m để (1) có hai nghiệm cùng dấu, khi đó hai nghiệm mang dấu gì?

Để phương trình (1) có hai nghiệm cùng dấu cần $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ x_1x_2 > 0 \end{cases}$

$$+) \text{ Giải } \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -m(m+3)(m-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m(m+3)(m-1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ (m-1)(m+3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \geq 1 \\ m \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ 0 < m \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (m-1)(m+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -3 \leq m \leq 1 \end{cases}$$

$$+) \text{ Giải } x_1 x_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{m^2 + 3m - 3}{m} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m - 3 > 0 \\ m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m - 3 < 0 \\ m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(m - \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} \right) \left(m + \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \right) > 0 \\ m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(m - \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} \right) \left(m + \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \right) < 0 \\ m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m > \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \\ m < \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} \end{cases} \\ m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} < m < \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \\ m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{-3 + \sqrt{21}}{2} \\ \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} < m < 0 \end{cases}$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\text{Kết hợp } \begin{cases} m \leq -3 \\ 0 < m \leq 1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} m > \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \\ \frac{-3-\sqrt{21}}{2} < m < 0 \end{cases} \text{ ta được } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-3+\sqrt{21}}{2} < m \leq 1 \\ \frac{-3-\sqrt{21}}{2} < m \leq -3 \end{cases}$$

Mà $x_1 + x_2 = -2 < 0 \Rightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm âm

Vậy với $\frac{-3+\sqrt{21}}{2} < m \leq 1$ hoặc $\frac{-3-\sqrt{21}}{2} < m \leq -3$ thì phương trình có hai nghiệm cùng

dấu, khi đó hai nghiệm mang dấu âm.

Cách khác:

Xét phương trình $mx^2 + 2mx + m^2 + 3m - 3 = 0$ (1); m là tham số thực.

$$\Delta' = -m(m+3)(m-1)$$

$$\text{Để phương trình (1) có hai nghiệm cùng dấu cần } \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m(m-1)(m+3) \leq 0 \\ \frac{m^2 + 3m - 3}{m} > 0 \end{cases}$$

➤ Giải $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m(m-1)(m+3) \leq 0$

Căn cứ thêm vào phần 4a ta tìm được $\begin{cases} m \leq -3 \\ 0 \leq m \leq 1 \end{cases}$

$$\text{➤ Giải } x_1 x_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{m^2 + 3m - 3}{m} > 0 \Leftrightarrow \frac{\left(m - \frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right)\left(m - \frac{-3-\sqrt{21}}{2}\right)}{m} > 0 \quad (7)$$

Ta thấy $m - \frac{-3+\sqrt{21}}{2} < m < m - \frac{-3-\sqrt{21}}{2}$ nên (7) thỏa mãn khi:

$$\begin{cases} m - \frac{-3+\sqrt{21}}{2} > 0 \\ \begin{cases} m < 0 \\ m - \frac{-3-\sqrt{21}}{2} > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \\ \begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{-3-\sqrt{21}}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \\ \frac{-3-\sqrt{21}}{2} < m < 0 \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp } m \neq 0 \text{ với } \begin{cases} m \leq -3 \\ 0 \leq m \leq 1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} m > \frac{-3+\sqrt{21}}{2} \\ \frac{-3-\sqrt{21}}{2} < m < 0 \end{cases} \text{ ta có } \begin{cases} \frac{-3-\sqrt{21}}{2} < m \leq -3 \\ \frac{-3+\sqrt{21}}{2} < m \leq 1 \end{cases}$$

Mà $x_1 + x_2 = -2 < 0 \Rightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm âm

Vậy với $\frac{-3 + \sqrt{21}}{2} < m \leq 1$ hoặc $\frac{-3 - \sqrt{21}}{2} < m \leq -3$ thì phương trình có hai nghiệm cùng

dấu, khi đó hai nghiệm mang dấu âm.

7) Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình (1) có các nghiệm đều là số nguyên.

Xét phương trình $mx^2 + 2mx + m^2 + 3m - 3 = 0$ (1); m là tham số thực.

➤ Nếu $m = 0$ thì phương trình trở thành $-3 = 0$ (vô nghiệm).

➤ Nếu $m \neq 0$ có

$$\Delta' = -m(m+3)(m-1)$$

Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ khi $\begin{cases} m \leq -3 \\ 0 \leq m \leq 1 \end{cases}$ (10)

$$\text{Áp dụng hệ thức Viet ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -2 & (1) \\ x_1 x_2 = \frac{m^2 + 3m - 3}{m} = m + 3 - \frac{3}{m} & (2) \end{cases}$$

Để phương trình có nghiệm nguyên cần $x_1 x_2 \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \in \mathbb{Z} \\ x_1 x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \frac{m^2 + 3m - 3}{m} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(m + 3 - \frac{3}{m} \right) \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Vì } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } \frac{3}{m} \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in U(3) \Rightarrow m \in \{\pm 1; \pm 3\}$$

Kết hợp với điều kiện (10) ta có $m \in \{1; -3\}$ thì phương trình (1) có các nghiệm đều là số

nguyên.

Thử lại: thay lần lượt $m \in \{-3; 1\}$ vào phương trình (1) :

+, Với $m = -3$ thì phương trình (1) trở thành: $-3x^2 - 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ là nghiệm nguyên
 $\Rightarrow m = -1$ thỏa mãn (A)

+, Với $m = 1$ thì phương trình (1) trở thành: $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ là nghiệm nguyên
 $\Rightarrow m = -1$ thỏa mãn (A)

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Vậy với $m \in \{-3; 1\}$ thì phương trình có các nghiệm đều là số nguyên.

Bài 26. Cho phương trình: $mx^2 - (2m+1)x + m+1 = 0$ (1); với m là tham số thực.

- Giải phương trình đã cho với $m=5$.
- Tìm m để phương trình (1) có một nghiệm bằng 2, tìm nghiệm còn lại.
- Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho:

a) $4(x_1 + x_2) - 5x_1x_2 = 2$.

b) $x_1^2 + x_2^2 = 9$.

c) Nghiệm này bằng 3 lần nghiệm kia.

d) $x_1 < -1 < x_2$.

e) $\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2} \leq 3$.

f) $x_1^6 + x_2^6 = 2$.

g) Biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 + 5$ nhận giá trị nhỏ nhất.

h) Biểu thức $A = x_1^8 + x_2^8$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- Tìm tất cả các giá trị của m để (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3 + x_1^2$.

Hướng dẫn giải

Cho phương trình: $mx^2 - (2m+1)x + m+1 = 0$ (1); với m là tham số thực.

- Giải phương trình đã cho với $m=5$.

Lời giải

Với $m=5$ thì phương trình (1) trở thành:

$$5x^2 - (2 \cdot 5 + 1)x + 5 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 11x + 6 = 0$$

$$\text{Ta có } a=5, b=-11, c=6 \Rightarrow a+b+c=5-11+6=0$$

Với $m=5$ thì phương trình trên có hai nghiệm phân biệt là $x_1=1, x_2=\frac{6}{5}$.

- Tìm m để phương trình (1) có một nghiệm bằng 2, tìm nghiệm còn lại.

Để phương trình (1) có một nghiệm bằng 2 cần:

$$4m - (2m+1)2 + m+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m - 4m - 2 + m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Với $m = 1$ thì phương trình (1) trở thành:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Ta có $a = 1, b = -3, c = 2 \Rightarrow a + b + c = 1 - 3 + 2 = 0$. nên phương trình trên có hai nghiệm là $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Với $m = 1$ thì phương trình (1) có một nghiệm bằng 2, và nghiệm còn lại là $x = 1$

3. Tìm m để (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho:

a) $4(x_1 + x_2) - 5x_1x_2 = 2$.

Phương trình $mx^2 - (2m+1)x + m+1 = 0$ có $a = m, b = -(2m+1), c = m+1$

Điều kiện: $m \neq 0$

Ta có: $\Delta = (2m+1)^2 - 4m(m+1) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4m = 1 > 0, \forall m \neq 0$

Vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với $\forall m \neq 0$.

Theo hệ thức Vi – et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2m+1}{m} \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m+1}{m} \end{cases}$$

Ta có: $4(x_1 + x_2) - 5x_1x_2 = 2$

$$\Rightarrow 4 \frac{2m+1}{m} - 5 \frac{m+1}{m} = 2$$

$$\Rightarrow 8m + 4 - 5m - 5 = 2m$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \text{ (tmđk)}$$

Vậy với $m = 1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $4(x_1 + x_2) - 5x_1x_2 = 2$.

Cách 2:

Phương trình $mx^2 - (2m+1)x + m+1 = 0$ có $a = m, b = -(2m+1), c = m+1$

Điều kiện: $m \neq 0$

Ta có: $a + b + c = m - (2m+1) + m + 1 = 0$ nên phương trình (1) luôn có 1 nghiệm $x = 1$ và

nghiệm còn lại $x = \frac{m+1}{m}$

$$\text{Như vậy: } 4(x_1 + x_2) - 5x_1x_2 = 2 \Leftrightarrow 4 \left(1 + \frac{m+1}{m} \right) - 5 \frac{m+1}{m} = 2$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{m+1}{m} = 0 \Rightarrow m+1 = 2m \Leftrightarrow m=1 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy với $m=1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $4(x_1 + x_2) - 5x_1x_2 = 2$.

b) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 = 9$.

Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt với $\forall m \neq 0$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 9$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2m+1}{m} \right)^2 - 2 \frac{m+1}{m} = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{4m^2 + 4m + 1}{m^2} - \frac{2m^2 + 2m}{m^2} = \frac{9m^2}{m^2}$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 4m + 1 - 2m^2 - 2m - 9m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 7m^2 - 2m - 1 = 0 \quad (*)$$

$$(a=7, b=-2 \Rightarrow b'=-1, c=-1)$$

$$\text{Ta có: } \Delta' = b'^2 - ac = 1 + 7 = 8 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 2\sqrt{2}$$

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt là:

$$m_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{7} \text{ (tmđk)}$$

$$m_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{7} \text{ (tmđk)}$$

Vậy với $m = \frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{7}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 9$.

Cách 2:

Điều kiện: $m \neq 0$

Phương trình $mx^2 - (2m+1)x + m+1 = 0$ luôn có 1 nghiệm $x=1$ và nghiệm còn lại $x = \frac{m+1}{m}$

$$\text{Như vậy } x_1^2 + x_2^2 = 9 \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{m+1}{m} \right)^2 = 9 \Leftrightarrow \left(\frac{m+1}{m} \right)^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+1}{m} = 2\sqrt{2} \\ \frac{m+1}{m} = -2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+1 = m2\sqrt{2} \\ m+1 = -m2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(2\sqrt{2}-1) = 1 \\ m(2\sqrt{2}+1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2\sqrt{2}-1} = \frac{2\sqrt{2}+1}{7} \\ m = \frac{-1}{2\sqrt{2}+1} = \frac{1-2\sqrt{2}}{7} \end{cases}$$

Vậy với $m = \frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{7}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 9$.

c) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho nghiệm này bằng 3 lần nghiệm kia.

Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $\forall m \neq 0$.

Giả sử $x_1 = 3x_2$ (*)

Theo hệ thức Vi – ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2m+1}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m+1}{m} \end{cases} \quad (2)$$

$$(3)$$

Thay (*) vào (2) ta được:

$$4x_2 = \frac{2m+1}{m} \Rightarrow x_2 = \frac{2m+1}{4m} \quad (4)$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 \frac{2m+1}{4m} = \frac{6m+3}{4m} \quad (5)$$

Thay (4), (5) vào (3) ta có:

$$\frac{6m+3}{4m} \cdot \frac{2m+1}{4m} = \frac{m+1}{m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{12m^2 + 12m + 3}{16m^2} = \frac{16m^2 + 16m}{16m^2}$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 4m - 3 = 0$$

$$(a = 4, b' = 2, c = -3)$$

Ta có: $\Delta' = b'^2 - ac = 4 + 12 = 16 > 0, \sqrt{\Delta'} = 4$

Phương trình trên có hai nghiệm phân biệt là:

$$m_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-2 - 4}{4} = -\frac{3}{2} \text{ (tmđk)}$$

$$m_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-2 + 4}{4} = \frac{1}{2} \text{ (tmđk)}$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Vậy với $m \in \left\{ \frac{-3}{2}; \frac{1}{2} \right\}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn nghiệm này bằng 3 lần nghiệm kia.

Cách 2:

Điều kiện: $m \neq 0$

Phương trình $mx^2 - (2m+1)x + m+1 = 0$ luôn có 1 nghiệm $x=1$ và nghiệm còn lại $x = \frac{m+1}{m}$

$$+ \text{ TH1: } \begin{cases} x_1 = 3x_2 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{m+1}{m} \end{cases} \Leftrightarrow 1 = \frac{3m+3}{m} \Rightarrow 3m+3=m \Leftrightarrow m = \frac{-3}{2} \text{ (TM)}$$

$$+ \text{ TH2: } \begin{cases} x_2 = 3x_1 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{m+1}{m} \end{cases} \Leftrightarrow 3 = \frac{m+1}{m} \Rightarrow 3m=m+1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \text{ (TM)}$$

Vậy với $m \in \left\{ \frac{-3}{2}; \frac{1}{2} \right\}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn nghiệm này bằng 3 lần nghiệm kia.

d) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 < -1 < x_2$.

Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $\forall m \neq 0$.

Ta có $x_1 < -1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + 1 < 0 < x_2 + 1$

$$\Rightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{m+1}{m} + \frac{2m+1}{m} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{m+1+2m+1+m}{m} < 0 \Leftrightarrow \frac{4m+2}{m} < 0$$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} 4m+2 > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{-1}{2} \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1}{2} < m < 0$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} 4m+2 < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{-1}{2} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Kết hợp điều kiện $m \neq 0$ ta được: $\frac{-1}{2} < m < 0$

Vậy với $\frac{-1}{2} < m < 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2$.

Cách 2:

Điều kiện: $m \neq 0$

Phương trình $mx^2 - (2m+1)x + m+1 = 0$ luôn có 1 nghiệm $x=1$ và nghiệm còn lại $x = \frac{m+1}{m}$

Như vậy $x_1 < -1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{m+1}{m} < -1 < 1 \Leftrightarrow \frac{m+1}{m} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2m+1}{m} < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+1 < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{2} \\ m > 0 \end{cases} \text{ (vô lý)}$$

Vậy với $\frac{-1}{2} < m < 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2$.

e) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $\frac{1}{x_1-2} + \frac{1}{x_2-2} \leq 3$.

Cho phương trình: $mx^2 - (2m+1)x + m+1 = 0$ (1); với m là tham số thực.

Để phương trình (1) là phương trình bậc hai cần $m \neq 0$.

Có $a=m, b=-(2m+1), c=m+1 \Rightarrow a+b+c = m - 2m - 1 + m + 1 = 0$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là: $x=1; x = \frac{m+1}{m}$

Ta có: $\frac{1}{x_1-2} + \frac{1}{x_2-2} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1-2} + \frac{1}{x_2-2} - 3 \leq 0$

Vì không mất tính tổng quát nên ta giả sử $x_1=1; x_2 = \frac{m+1}{m}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-2} + \frac{1}{\frac{m+1}{m}-2} - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{\frac{m+1-2m}{m}} - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -4 + \frac{m}{1-m} \leq 0 \text{ (ĐKXD: } m \neq 1) \Leftrightarrow \frac{-4+4m+m}{1-m} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-4+5m}{1-m} \leq 0$$

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} 5m-4 \leq 0 \\ 1-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{4}{5} \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{4}{5}$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Kết hợp ĐKXD ta có: $m \leq \frac{4}{5}, m \neq 0$.

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} 5m - 4 \geq 0 \\ 1 - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{4}{5} \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Kết hợp với điều kiện $m \neq 0$ ta có:

Với $\begin{cases} m \leq \frac{4}{5} \\ m \neq 0 \end{cases}$ hoặc $m > 1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2} \leq 3.$$

Cách 2:

Điều kiện: $m \neq 0$

Phương trình $mx^2 - (2m+1)x + m+1 = 0$ luôn có 1 nghiệm $x=1$ và nghiệm còn lại $x = \frac{m+1}{m}$

$$\text{Như vậy: } \frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{1 - 2} + \frac{1}{\frac{m+1}{m} - 2} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{m+1-2m}{m}} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{m}{1-m} - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-4+4m}{1-m} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{5m-4}{1-m} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5m-4 \leq 0 \\ 1-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{4}{5} \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq \frac{4}{5}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m-4 \geq 0 \\ 1-m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{4}{5} \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Kết hợp với điều kiện ta có:

Với $\begin{cases} m \leq \frac{4}{5} \\ m \neq 0 \end{cases}$ hoặc $m > 1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2} \leq 3.$$

f) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^6 + x_2^6 = 2$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là: $x=1; x = \frac{m+1}{m}$ với $\forall m \neq 0$

Vì không mất tính tổng quát trong $x_1^6 + x_2^6 = 2$ nên ta giả sử $x_1 = 1; x_2 = \frac{m+1}{m}$

Ta có: $x_1^6 + x_2^6 = 2 \Rightarrow 1 + \left(\frac{m+1}{m}\right)^6 = 2$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{m+1}{m}\right)^6 = 1 \Leftrightarrow \frac{m+1}{m} = \pm 1$$

Trường hợp 1: $\frac{m+1}{m} = 1 \Rightarrow m+1 = m \Leftrightarrow 1 = 0$ (vô lý)

Trường hợp 2: $\frac{m+1}{m} = -1 \Rightarrow m+1 = -m \Leftrightarrow 2m = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$ (tmdk)

Vậy với $m = -\frac{1}{2}$ để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^6 + x_2^6 = 2$

g) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức

$$T = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 + 5 \text{ nhận giá trị nhỏ nhất.}$$

Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $\forall m \neq 0$.

Ta có: $T = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 + 5 = (x_1 + x_2)^2 - 8x_1x_2 + 5$

$$\Rightarrow T = \left(\frac{2m+1}{m}\right)^2 - 8\frac{m+1}{m} + 5 = \frac{4m^2 + 4m + 1 - 8m^2 - 8m + 5m^2}{m^2} = \frac{m^2 - 4m + 1}{m^2} = 1 - \frac{4}{m} + \frac{1}{m^2}$$

$$= \frac{1}{m^2} - \frac{4}{m} + 4 - 3 = \left(\frac{1}{m} - 2\right)^2 - 3$$

$$\forall \left(\frac{1}{m} - 2\right)^2 \geq 0, \forall m \neq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{m} - 2\right)^2 - 3 \geq -3$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{1}{m} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{m} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ (tmdk)

Vậy biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 + 5$ nhận giá trị nhỏ nhất là -3 khi $m = \frac{1}{2}$.

h) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = x_1^8 + x_2^8$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $\forall m \neq 0$.

Vì không mất tính tổng quát trong $A = x_1^8 + x_2^8$ nên ta giả sử $x_1 = 1; x_2 = \frac{m+1}{m}$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Ta có: $A = x_1^8 + x_2^8 \Rightarrow A = 1 + \left(\frac{m+1}{m}\right)^8 = 1 + \left(1 + \frac{1}{m}\right)^8$

Vì với $\forall m \neq 0$ có $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^8 \geq 0 \Leftrightarrow 1 + \left(1 + \frac{1}{m}\right)^8 \geq 1$

Dấu “=” xảy ra khi $1 + \frac{1}{m} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{m} = -1 \Leftrightarrow m = -1$ (tmdk)

Vậy biểu thức $A = x_1^8 + x_2^8$ đạt giá trị nhỏ nhất là 1 khi $m = -1$.

4. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1 + x_2 = 3 + x_1^2.$$

Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $\forall m \neq 0$.

Trường hợp 1: $x_1 = 1; x_2 = \frac{m+1}{m}$

Ta có: $x_1 + x_2 = 3 + x_1^2 \Rightarrow 1 + \frac{m+1}{m} = 3 + 1 \Leftrightarrow \frac{m+1}{m} = 3 \Rightarrow m+1 = 3m \Leftrightarrow 2m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ (tmdk)

Trường hợp 2: $x_1 = \frac{m+1}{m}; x_2 = 1$

Ta có: $x_1 + x_2 = 3 + x_1^2 \Rightarrow \frac{m+1}{m} + 1 = 3 + \left(\frac{m+1}{m}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{m+1}{m}\right)^2 - \frac{m+1}{m} + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2 + 2m + 1 - m^2 - m + 2m^2}{m^2} = 0 \Rightarrow 2m^2 + m + 1 = 0 \quad (*) \quad (a = 2, b = 1, c = 1)$$

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$ nên phương trình (*) vô nghiệm.

Vậy với $m = \frac{1}{2}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 27. Cho phương trình: $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m - 3 = 0$ (1); với m là tham số thực.

1. Giải phương trình (1) khi $m = -2$.

2. Tìm m để phương trình có một nghiệm $x = 2$.

3. Xác định giá trị của m để (1) có nghiệm.

4. Xác định m để (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

a) $1 > x_1 > x_2$

$$b) 3(x_1 + x_2) - 5x_1x_2 \leq \frac{4}{m+1}$$

$$c) (4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$$

$$d) 3x_1 + 4x_2 = 1$$

$$e) |x_1 - x_2| \leq 1$$

5. Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dương.

6. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để (1) có các nghiệm là số nguyên.

Hướng dẫn giải

1. Giải phương trình (1) khi $m = -2$.

Với $m = -2$ ta có:

$$(1) \Leftrightarrow -x^2 - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -5 \text{ (Vô lí)}$$

Vậy với $m = -2$ thì phương trình (1) vô nghiệm.

2. Tìm m để phương trình có một nghiệm $x = 2$.

Thay $x = 2$ vào phương trình (1) ta được:

$$(1) \Leftrightarrow 2^2(m+1) - 2 \cdot 2(m+2) + m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m + 4 - 4m - 8 + m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 7$$

Vậy với $m = 7$ thì phương trình (1) có một nghiệm $x = 2$.

3. Xác định giá trị của m để (1) có nghiệm.

- Nếu $m = -1$ thì $(1) \Leftrightarrow -2x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x = -2 \quad (*)$$

- Nếu $m \neq -1$, ta có: $\Delta' = (m+2)^2 - (m+1)(m-3)$

$$= 6m + 7$$

Để phương trình (1) có nghiệm cần $\Delta' \geq 0$

$$\Leftrightarrow 6m + 7 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{-7}{6} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có $m \geq \frac{-7}{6}$ thì phương trình (1) có nghiệm.

4a. Xác định m để (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $1 > x_1 > x_2$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Xét phương trình: $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m - 3 = 0$ (1); với m là tham số thực

Có $a = m+1$, $b' = -m-2$, $c = m-3$, $\Delta' = 6m+7$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt cần $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ 6m+7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m > -\frac{7}{6} \end{cases} \quad (*)$

Khi đó, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1), theo hệ thức Vi – ét ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m+2)}{m+1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-3}{m+1} \end{cases}$$

$$1 > x_1 > x_2 \Leftrightarrow 0 > x_1 - 1 > x_2 - 1 \Leftrightarrow x_2 - 1 < x_1 - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_2 - 1)(x_1 - 1) > 0 \\ x_2 - 1 + x_1 - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \\ (x_1 + x_2) - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-3}{m+1} - \frac{2(m+2)}{m+1} + 1 > 0 \\ \frac{2(m+2)}{m+1} - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-3}{m+1} - \frac{2(m+2)}{m+1} + \frac{m+1}{m+1} > 0 \\ \frac{2(m+2)}{m+1} - \frac{2(m+1)}{m+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-3-2m-4+m+1}{m+1} > 0 \\ \frac{2m+4-2m-2}{m+1} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-6}{m+1} > 0 \\ \frac{2}{m+1} < 0 \end{cases} \Rightarrow m+1 < 0 \Rightarrow m < -1.$$

Kết hợp với điều kiện (*) thì $-\frac{7}{6} < m < -1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

thỏa mãn $1 > x_1 > x_2$.

Cách khác:

Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$, thay vào phương trình (1) ta được:

$$(m+1)(t+1)^2 - 2(m+2)(t+1) + m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)t^2 - 2t - 6 = 0 \quad (2) \quad \text{có } \Delta'_{(t)} = 1 + 6(m+1) = 6m+7$$

Phương trình (1) có hai nghiệm thỏa mãn $1 > x_1 > x_2 \Leftrightarrow 0 > x_1 - 1 > x_2 - 1$ khi và chỉ khi

phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn: $0 > t_1 > t_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6m+7 > 0 \\ \frac{2}{m+1} < 0 \\ \frac{-6}{m+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6m+7 > 0 \\ m+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{-7}{6} \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-7}{6} < m < -1.$$

Vậy cần $\frac{-7}{6} < m < -1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $1 > x_1 > x_2$.

4b) Xác định m để (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3(x_1 + x_2) - 5x_1x_2 \leq \frac{4}{m+1}$

Với $m \neq -1$, $m > \frac{-7}{6}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m+2)}{m+1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-3}{m+1} \end{cases}$$

$$(\text{Thay vào biểu thức}) \quad 3(x_1 + x_2) - 5x_1x_2 \leq \frac{4}{m+1} \Rightarrow \frac{3 \cdot 2(m+2)}{m+1} - \frac{5(m-3)}{m+1} \leq \frac{4}{m+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(m+2)}{m+1} - \frac{5(m-3)}{m+1} - \frac{4}{m+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6m+12-5m+15-4}{m+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m+23}{m+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+23 \geq 0 \\ m+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -23 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -23 \leq m < -1 \\ m \in \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow -23 \leq m < -1.$$

Kết hợp với điều kiện $m \neq -1; m > \frac{-7}{6}$ ta có $\frac{-7}{6} < m < -1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm

phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3(x_1 + x_2) - 5x_1x_2 \leq \frac{4}{m+1}$.

CHUYÊN ĐỀ 9.HỆ THỨC VI-ÉT

4c) Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$

Với $m \neq -1$, $m > \frac{-7}{6}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m+2)}{m+1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-3}{m+1} \end{cases}$$

Có $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$

$$\Leftrightarrow 16x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) + 1 = 18$$

$$\Leftrightarrow \frac{16(m-3)}{m+1} + \frac{4 \cdot 2(m+2)}{m+1} + 1 = 18$$

$$\Leftrightarrow 16(m-3) + 8(m+2) - 17(m+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 7m - 49 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 7.$$

Kết hợp $m = 7$ với $m \neq -1$, $m > \frac{-7}{6}$ ta có $m = 7$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

x_1, x_2 thỏa mãn $(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) = 18$.

4d) Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $3x_1 + 4x_2 = 1$.

Với $m \neq -1$, $m > \frac{-7}{6}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m+2)}{m+1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-3}{m+1} \end{cases}$$

$$3x_1 + 4x_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 3x_1 + 3x_2 + x_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) + x_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 \cdot 2(m+2)}{m+1} + x_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x_2 = 1 - \frac{3 \cdot 2(m+2)}{m+1}$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{-5m - 11}{m+1}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2(m+2)}{m+1} - \frac{-5m-11}{m+1} = \frac{7m+15}{m+1}$$

$$\text{Mà } x_1 x_2 = \frac{m-3}{m+1} \Leftrightarrow \frac{7m+15}{m+1} \cdot \frac{-5m-11}{m+1} = \frac{m-3}{m+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-35m^2 - 152m - 165}{(m+1)^2} - \frac{(m-3)(m+1)}{(m+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-35m^2 - 152m - 165 - m^2 + 2m + 3}{(m+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 36m^2 + 150m + 162 = 0 \quad (\text{vì } m \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow \left(6m + \frac{25}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} = 0.$$

$$\text{Với mọi số thực } m \text{ ta có: } \left(6m + \frac{25}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(6m + \frac{25}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} > 0.$$

Vậy không có giá trị nào của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$3x_1 + 4x_2 = 1.$$

4e) Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 1$

Với $m \neq -1$, $m > -\frac{7}{6}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m+2)}{m+1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-3}{m+1} \end{cases}$$

$$\text{Mà } |x_1 - x_2| \leq 1 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{2(m+2)}{m+1}\right]^2 - \frac{4(m-3)}{m+1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(m+2)^2}{(m+1)^2} - \frac{4(m-3)(m+1)}{(m+1)^2} - \frac{(m+1)^2}{(m+1)^2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4(m+2)^2 - 4(m-3)(m+1) - (m+1)^2 \leq 0 \quad (\text{do } (m+1)^2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + 22m + 27 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 22m - 27 \geq 0$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\Leftrightarrow (m - 11 - 2\sqrt{37})(m - 11 + 2\sqrt{37}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 11 - 2\sqrt{37} \geq 0 \\ m - 11 + 2\sqrt{37} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 11 + 2\sqrt{37} \\ m \geq 11 - 2\sqrt{37} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 11 + 2\sqrt{37}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 11 - 2\sqrt{37} \leq 0 \\ m - 11 + 2\sqrt{37} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 11 + 2\sqrt{37} \\ m \leq 11 - 2\sqrt{37} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 11 - 2\sqrt{37}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 11 + 2\sqrt{37} \\ m \leq 11 - 2\sqrt{37} \end{cases}.$$

Kết hợp với $m \neq -1; m > \frac{-7}{6}$ ta được $m \leq 11 + 2\sqrt{37}$ và $\frac{-7}{6} < m \leq 11 - 2\sqrt{37}$ thì phương trình (1)

có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 1$.

- TH1: $\begin{cases} m - 11 - 2\sqrt{37} \geq 0 \\ m - 11 + 2\sqrt{37} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 11 + 2\sqrt{37} \\ m \leq 11 - 2\sqrt{37} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$
- TH2: $\begin{cases} m - 11 - 2\sqrt{37} \leq 0 \\ m - 11 + 2\sqrt{37} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 11 + 2\sqrt{37} \\ m \geq 11 - 2\sqrt{37} \end{cases} \Leftrightarrow 11 - 2\sqrt{37} \leq m \leq 11 + 2\sqrt{37}.$

Kết hợp với $m \neq -1; m > \frac{-7}{6}$ ta được $11 - 2\sqrt{37} \leq m \leq 11 + 2\sqrt{37}$ và $m \neq -1$ thì phương trình (1)

có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 1$

5. Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dương.

Với $m \neq -1, m > \frac{-7}{6}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{2(m+2)}{m+1} \\ P = x_1 x_2 = \frac{m-3}{m+1} \end{cases}$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm dương cần thêm: $\begin{cases} S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(m+2)}{m+1} > 0 \\ \frac{m-3}{m+1} > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ m+2 > 0 \\ m-3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m > -2 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -2 \end{cases}$$

Kết hợp với $m \neq -1$, $m > \frac{-7}{6} \Rightarrow m > 3$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dương.

6. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để (1) có các nghiệm là số nguyên.

Xét phương trình: $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m - 3 = 0$ (1); với m là tham số thực.

+, Với $m = -1$ thì phương trình (1) trở thành: $-2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ là nghiệm nguyên
 $\Rightarrow m = -1$ thỏa mãn

+, Với $m \neq -1$, $m \geq \frac{-7}{6}$ thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{2(m+2)}{m+1} = 2 + \frac{2}{m+1} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{m-3}{m+1} = 1 - \frac{4}{m+1} \end{cases}$$

Vì x nguyên nên S, P nguyên $\Rightarrow \begin{cases} 2:(m+1) \\ 4:(m+1) \end{cases} \Rightarrow 2:(m+1) \Rightarrow m+1 \in \{-2; -1; 1; 2\}$

$\Rightarrow m \in \{-3; -2; 0; 1\}$

Kết hợp với điều kiện $m \neq -1$, $m > \frac{-7}{6}$ ta có $m \in \{0; 1\}$

Thử lại:

- Với $m = 0$ thì phương trình (1) trở thành: $x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{7} \\ x = 2 - \sqrt{7} \end{cases}$ không là nghiệm nguyên $\Rightarrow m = 0$ (loại)

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

- Với $m=1$ thì phương trình (1) trở thành: $2x^2 - 6x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$ không là nghiệm

nguyên $\Rightarrow m=1$ (loại)

Vậy $m=-1$ thì phương trình (1) có các nghiệm là số nguyên.

Bài 28. Cho phương trình: $(m-1)x^2 - 2(m-4)x + m-5 = 0$ (1); với m là tham số thực.

- Giải phương trình (1) khi $m=2$.
- Tìm m để phương trình trên không nhận nghiệm bằng 5.
- Tìm m để (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dương.
- Khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , tìm m sao cho
 - $x_1 = 2x_2$.
 - $x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = \frac{2}{m-1}$.
 - $x_1^2 + x_2^2 = 5x_1x_2 + 3(x_1 + x_2 - 2)$.
 - $(m-1)x_1^2 + 2(m-4)x_2 + m-5 \geq 0$.
- Khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào tham số m .
- Xác định m để phương trình (1) có ít nhất một nghiệm dương.
- Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng lớn hơn 4.

Lời giải

Bài 29. Xét phương trình: $(m-1)x^2 - 2(m-4)x + m-5 = 0$ (1); với m là tham số thực.

1. Giải phương trình (1) khi $m=2$.

Với $m=2$ ta có (1) $\Leftrightarrow (2-1)x^2 - 2(2-4)x + 2-5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 3 = 0$

$\Delta' = 2^2 - 1 \cdot (-3) = 7 > 0$.

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-2+\sqrt{7}}{1} = -2+\sqrt{7}$; $x_2 = \frac{-2-\sqrt{7}}{1} = -2-\sqrt{7}$.

Vậy $m=2$ thì (1) có tập nghiệm là $S = \{-2 \pm \sqrt{7}\}$.

2. Tìm m để phương trình trên không nhận nghiệm bằng 5.

Để phương trình (1) không nhận nghiệm bằng 5 thì:

$$(m-1)5^2 - 2(m-4)5 + m - 5 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 25m - 25 - 10m + 40 + m - 5 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 16m \neq -10$$

$$\Leftrightarrow m \neq \frac{-5}{8}$$

Vậy $m \neq \frac{5}{8}$ thì phương trình (1) không nhận nghiệm bằng 5.

3. Tìm m để (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dương.

Với $m \neq 1$ thì phương trình (1) có:

$$\Delta' = [- (m-4)]^2 - (m-1)(m-5) = m^2 - 8m + 16 - m^2 + 5m + m - 5 = -2m + 11$$

để (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = [- (m-4)]^2 - (m-1)(m-5) > 0 \\ m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m+11 > 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{11}{2} (*) \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Khi đó để hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 của (1) cùng dương thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(m-4)}{m-1} > 0 \\ \frac{m-5}{m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m-4 > 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m-4 < 0 \\ m-1 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m-5 > 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m-5 < 0 \\ m-1 < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m > 4 \\ m > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} m < 4 \\ m < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} m > 5 \\ m > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} m < 5 \\ m < 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m > 4 \\ m < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} m > 5 \\ m < 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 5 \\ m < 1 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $m \neq 1$ và $m < \frac{11}{2}$ ta có (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dương khi

$$\begin{cases} 5 < m < \frac{11}{2} \\ m < 1 \end{cases}$$

Vậy kết hợp với điều kiện (*) để phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dương thì:

$$\begin{cases} 5 < m < \frac{11}{2} \\ m < 1 \end{cases}$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

4. Khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , tìm m sao cho:

Với $m \neq 1$ thì phương trình (1) có:

$$\Delta' = [- (m - 4)]^2 - (m - 1)(m - 5) = m^2 - 8m + 16 - m^2 + 5m + m - 5 = -2m + 11$$

Để

(1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = [- (m - 4)]^2 - (m - 1)(m - 5) > 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + 11 > 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{11}{2} (*) \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Khi đó theo hệ thức Vi-et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2(m-4)}{m-1} & ;(2) \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-5}{m-1} & ;(3) \end{cases}$$

a) $x_1 = 2x_2$.

Với $x_1 = 2x_2$ thay vào (2) ta có $2x_2 + x_2 = \frac{2(m-4)}{m-1} \Leftrightarrow x_2 = \frac{2(m-4)}{3(m-1)} \Rightarrow x_1 = \frac{4(m-4)}{3(m-1)}$

thay vào (3) ta có $\frac{2(m-4)}{3(m-1)} \cdot \frac{4(m-4)}{3(m-1)} = \frac{m-5}{m-1} \Rightarrow 8(m-4)^2 = 9(m-5)(m-1)$

$$\Leftrightarrow 8m^2 - 64m + 128 = 9m^2 - 45m - 9m + 45$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 10m - 83 = 0$$

$$\Delta' = 5^2 - 1 \cdot (-83) = 108 > 0$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$m_1 = \frac{-5 + \sqrt{108}}{1} = -5 + 6\sqrt{3} ; m_2 = \frac{-5 - \sqrt{108}}{1} = -5 - 6\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m \in \{-5 \pm 6\sqrt{3}\}$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , sao cho $x_1 = 2x_2$.

b) $x_1 + x_2 - 3x_1 x_2 = \frac{2}{m-1}$.

Với $x_1 + x_2 - 3x_1 x_2 = \frac{2}{m-1} \Leftrightarrow \frac{2(m-4)}{m-1} - 3 \cdot \frac{m-5}{m-1} = \frac{2}{m-1}$

$$\Leftrightarrow 2(m-4) - 3(m-5) = 2$$

$$\Leftrightarrow 2m - 8 - 3m + 15 = 2$$

$$\Leftrightarrow -m = -5$$

$$\Leftrightarrow m = 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

(vậy $m = 5$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , sao cho $x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = \frac{2}{m-1}$)

$$c) x_1^2 + x_2^2 = 5x_1x_2 + 3(x_1 + x_2 - 2)$$

$$\text{Với } x_1^2 + x_2^2 = 5x_1x_2 + 3(x_1 + x_2 - 2) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) - 6$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 7x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 6 = 0$$

Thay hệ thức Vi-et vào ta có:

$$\left[\frac{2(m-4)}{m-1} \right]^2 - 7 \cdot \frac{m-5}{m-1} - 3 \frac{2(m-4)}{m-1} + 6 = 0$$

$$\Rightarrow 4(m-4)^2 - 7(m-5)(m-1) - 6(m-4)(m-1) + 6(m-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 32m + 64 - 7m^2 + 7m + 35m - 35 - 6m^2 + 6m + 24m - 24 + 6m^2 - 12m + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3m^2 + 28m + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 28m - 11 = 0$$

$$\Delta' = (-14)^2 - 3 \cdot (-11) = 229 > 0$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$m_1 = \frac{-(-14) + \sqrt{229}}{3} = \frac{14 + \sqrt{229}}{3} \text{ (loại vì } m_1 > \frac{11}{2} \text{);}$$

$$m_2 = \frac{-(-14) - \sqrt{229}}{3} = \frac{14 - \sqrt{229}}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } m_2 = \frac{14 - \sqrt{229}}{3} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

(Vậy $m_2 = \frac{14 - \sqrt{229}}{3}$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , sao cho

$$x_1^2 + x_2^2 = 5x_1x_2 + 3(x_1 + x_2 - 2).$$

$$d) (m-1)x_1^2 + 2(m-4)x_2 + m - 5 \geq 0$$

$$\text{Với } (m-1)x_1^2 + 2(m-4)x_2 + m - 5 \geq 0 \quad (4)$$

Nếu $m > 1 \Leftrightarrow m - 1 > 0$ chi cả hai vế của (4) cho $m - 1$ ta được:

$$(4) \Leftrightarrow x_1^2 + \frac{2(m-4)}{m-1}x_2 + \frac{m-5}{m-1} \geq 0 \text{ thay hệ thức Vi-et vào ta có}$$

$$x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 + x_1x_2 \geq 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 \geq 0 \text{ luôn đúng.}$$

Nếu $m < 1 \Leftrightarrow m - 1 < 0$ chi cả hai vế của (4) cho $m - 1$ ta được:

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$(4) \Leftrightarrow x_1^2 + \frac{2(m-4)}{m-1}x_2 + \frac{m-5}{m-1} \leq 0 \text{ thay hệ thức Vi-et vào ta có}$$

$$x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 + x_1x_2 \leq 0 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(m-4)}{m-1} = 0 \Leftrightarrow m = 4 \text{ (loại).}$$

Vậy $1 < m < \frac{11}{2}$ là các giá trị cần tìm.

(Vậy $1 < m < \frac{11}{2}$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , sao cho

$$(m-1)x_1^2 + 2(m-4)x_2 + m-5 \geq 0.)$$

5. Khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào tham số m .

Với $m \neq 1$ thì phương trình (1) có:

$$\Delta' = [-(m-4)]^2 - (m-1)(m-5) = m^2 - 8m + 16 - m^2 + 5m + m - 5 = -2m + 11$$

Để (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m + 11 > 0 \Leftrightarrow -2m > -11 \Leftrightarrow m < \frac{11}{2}$.

Khi đó theo hệ thức Vi-et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2(m-4)}{m-1} & ;(2) \\ x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-5}{m-1} & ;(3) \end{cases}$$

$$\text{Vi} \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-4)}{m-1} \\ x_1x_2 = \frac{m-5}{m-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m-2-6}{m-1} \\ x_1x_2 = \frac{m-1-4}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - \frac{6}{m-1} \\ x_1x_2 = 1 - \frac{4}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_1 + x_2) = 4 - \frac{12}{m-1} \\ 3x_1x_2 = 3 - \frac{12}{m-1} \end{cases}$$

Trừ vế với vế hai phương trình của hệ ta được:

$$2(x_1 + x_2) - 3x_1x_2 = 1$$

là hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào tham số m $m \neq 1; m < \frac{11}{2}$.

6. Xác định m để phương trình (1) có ít nhất một nghiệm dương.

Theo ý 3 pt (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dương khi
$$\begin{cases} 5 < m < \frac{11}{2} \\ m < 1 \end{cases}$$

Để (1) có hai nghiệm trái dấu, khi đó sẽ có một nghiệm dương thì:

$$(m-1)(m-5) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ m-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 5 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ m-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 5$$

Với $m=1$ khi đó

$$(1) \Leftrightarrow (1-1)x^2 - 2(1-4)x + 1-5 = 0 \Leftrightarrow 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} > 0$$

Với $m=5$ khi đó (TH phương trình có nghiệm bằng 0 và 1 nghiệm dương)

$$(1) \Leftrightarrow (5-1)x^2 - 2(5-4)x + 5-5 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$$

Với $m = \frac{11}{2}$ khi đó (TH phương trình có nghiệm kép dương)

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{11}{2} - 1\right)x^2 - 2\left(\frac{11}{2} - 4\right)x + \frac{11}{2} - 5 = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow (3x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} > 0$$

Kết hợp các trường hợp ta có (1) có ít nhất một nghiệm dương khi $m \leq \frac{11}{2}$.

Cách 2:

Với $m=1$ khi đó

$$(1) \Leftrightarrow (1-1)x^2 - 2(1-4)x + 1-5 = 0 \Leftrightarrow 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} > 0$$

Với $m \neq 1$ thì phương trình (1) có:

$$\Delta' = [-(m-4)]^2 - (m-1)(m-5) = m^2 - 8m + 16 - m^2 + 5m + m - 5 = -2m + 11$$

Để (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -2m + 11 \geq 0 \Leftrightarrow -2m \geq -11 \Leftrightarrow m \leq \frac{11}{2}$.

Để hai nghiệm x_1, x_2 cùng âm thì:

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(m-4)}{m-1} < 0 \\ \frac{m-5}{m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m-4 < 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m-4 > 0 \\ m-1 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m-5 > 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m-5 < 0 \\ m-1 < 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < 4 \\ m > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} m > 4 \\ m < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} m > 5 \\ m > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} m < 5 \\ m < 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} m < 4 \\ m > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} m > 5 \\ m < 1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy không có m thỏa mãn.

Để (1) có một nghiệm bằng 0 thì $m-5=0 \Leftrightarrow m=5$ khi đó

$$(1) \Leftrightarrow (5-1)x^2 - 2(5-4)x + 5-5 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(2x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{1}{2} > 0 \end{cases}$$

Vậy khi $m \leq \frac{11}{2}$ thì (1) có ít nhất một nghiệm dương.

7. Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng lớn hơn 4.

Với $m \neq 1$ thì phương trình (1) có:

$$\Delta' = [-(m-4)]^2 - (m-1)(m-5) = m^2 - 8m + 16 - m^2 + 5m + m - 5 = -2m + 11$$

Để (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m + 11 > 0 \Leftrightarrow -2m > -11 \Leftrightarrow m < \frac{11}{2}$.

Khi đó theo hệ thức Vi-et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2(m-4)}{m-1} & ;(2) \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-5}{m-1} & ;(3) \end{cases}$$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng lớn hơn 4 thì:

$$\begin{cases} x_1 - 4 > 0 \\ x_2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - 4)(x_2 - 4) > 0 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 - 4(x_1 + x_2) + 16 > 0 \\ x_1 + x_2 > 8 \end{cases}$$

Thay hệ thức Vi-et vào ta có:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{m-5}{m-1} - 4 \frac{2(m-4)}{m-1} + 16 > 0 \\ \frac{2(m-4)}{m-1} > 8 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{m-5-8(m-4)+16(m-1)}{m-1} > 0 \\ \frac{2(m-4)-8(m-1)}{m-1} > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{m-5-8m+32+16m-16}{m-1} > 0 \\ \frac{2m-4-8m+8}{m-1} > 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{9m+11}{m-1} > 0 \\ \frac{-6m+4}{m-1} > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 9m+11 > 0 \\ m-1 > 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 9m+11 < 0 \\ m-1 < 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -6m+4 > 0 \\ m-1 > 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -6m+4 < 0 \\ m-1 < 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} m > -\frac{11}{9} \\ m > 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} m < -\frac{11}{9} \\ m < 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} m < \frac{2}{3} \\ m > 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} m > \frac{2}{3} \\ m < 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} m > 1 \\ m < -\frac{11}{9} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} m > \frac{2}{3} \\ m < 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Vậy không có m thỏa mãn để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng lớn hơn 4.

Bài 30 Cho phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m+2)x + 1 = 0$ (1); với m là tham số thực

- Giải phương trình (1) với $m = 2$.
- Tìm m để (1) không nhận nghiệm bằng 1.
- Tìm giá trị m để phương trình (1) có nghiệm.
- Tìm giá trị m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất, tính nghiệm duy nhất đó.
- Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm cùng dương.
- Xác định giá trị m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

a) $x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = \frac{3}{m^2 - 4}$

b) $x_1 + x_2 - 4x_1x_2 = 1$

c) $x_1 = 2x_2$

d) Nghiệm này bằng hai lần nghiệm kia

- Tìm tất cả các nghiệm nguyên của m để (1) có các nghiệm đều là số nguyên.

Lời giải

Phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 2(m+2)x + 1 = 0$ (1); với m là tham số thực

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$(a = m^2 - 4; b' = m + 2; c = 1)$$

1. Thay $m = 2$ vào phương trình (1) ta được: $(2^2 - 4)x^2 + 2(2 + 2)x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 8x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{8}$$

Vậy với $m = 2$ thì phương trình (1) có nghiệm $x = \frac{-1}{8}$

2. Phương trình (1) không nhận nghiệm bằng 1 nên $x = 1$ không thỏa mãn phương trình (1)

$$\text{Do đó: } (m^2 - 4).1^2 + 2(m + 2).1 + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4 + 2m + 4 + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (m + 1)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq -1$$

Vậy với $m \neq -1$ thì phương trình (1) không nhận nghiệm bằng 1

3. Phương trình (1) có nghiệm khi :

$$\begin{cases} a = 0, b' \neq 0 \\ a \neq 0, \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = 0, m + 2 \neq 0 \\ m^2 - 4 \neq 0, (m + 2)^2 - (m^2 - 4) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2, m \neq -2 \\ m \neq \pm 2, 4m + 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m \neq \pm 2, 4m + 8 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m \neq \pm 2, m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m > -2, m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$$

Vậy với $m > -2$ thì phương trình (1) có nghiệm .

4. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi $\begin{cases} a = 0 \\ b' \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

Thay $m = 2$ vào phương trình (1) ta được: $(2^2 - 4)x^2 + 2(2 + 2)x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 8x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{8}$$

Vậy với $m = 2$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = \frac{-1}{8}$

5. Phương trình (1) có hai nghiệm cùng dương khi :

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 \neq 0 \\ (m+2)^2 - (m^2 - 4) \geq 0 \\ \frac{-2(m+2)}{m^2 - 4} > 0 \\ \frac{1}{m^2 - 4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ 4m+8 \geq 0 \\ \frac{-2(m+2)}{(m-2)(m+2)} > 0 \\ \frac{1}{(m-2)(m+2)} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ m \geq -2 \\ \frac{-2}{m-2} > 0 \\ \frac{1}{(m-2)(m+2)} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ m \geq -2 \\ m-2 < 0 \\ m+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ m \geq -2 \\ m < 2 \\ m < -2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Vậy không có giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm cùng dương.

6. Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 \neq 0 \\ (m+2)^2 - (m^2 - 4) \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ 4m+8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m > -2 \end{cases} \quad (*)$$

Theo định lý Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2(m+2)}{m^2 - 4} ; \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{m^2 - 4} ; \end{cases} \quad (2)$

a) $x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = \frac{3}{m^2 - 4}$

$$\Leftrightarrow \frac{-2(m+2)}{m^2 - 4} - 3 \cdot \frac{1}{m^2 - 4} = \frac{3}{m^2 - 4} \Leftrightarrow \frac{-2(m+2)}{m^2 - 4} - \frac{6}{m^2 - 4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2m - 10}{m^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow -2m - 10 = 0 \Leftrightarrow m = -5 \text{ (không thỏa điều kiện (*))}$$

Vậy không có giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = \frac{3}{m^2 - 4}$$

b) $x_1 + x_2 - 4x_1x_2 = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{-2(m+2)}{m^2 - 4} - 4 \cdot \frac{1}{m^2 - 4} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2(m+2)}{m^2 - 4} - \frac{4}{m^2 - 4} - \frac{m^2 - 4}{m^2 - 4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2m - 4 - 4 - m^2 + 4}{m^2 - 4} = 0$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\Leftrightarrow \frac{-m^2 - 2m - 4}{m^2 - 4} = 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 - 2m - 4 = 0; \quad (4)$$

Phương trình (4) có : $\Delta' = (-1)^2 - (-1) \cdot (-4) = -3 < 0$.

Do đó phương trình (4) vô nghiệm.

Vậy không có giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1 + x_2 - 4x_1x_2 = 1$$

c) Theo đề toán, ta có $x_1 = 2x_2$; (5)

Từ (2) và (5) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_1 + x_2 = \frac{-2(m+2)}{m^2-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{-2}{m-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_2 = \frac{2}{m-2} \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{-2}{3(m-2)} \\ x_1 = \frac{-4}{3(m-2)} \end{cases}$$

Thay $x_1 = \frac{-4}{3(m-2)}$ và $x_2 = \frac{-2}{3(m-2)}$ vào (3) ta được

$$\frac{-4}{3(m-2)} \cdot \frac{-2}{3(m-2)} = \frac{1}{m^2-4} \Leftrightarrow \frac{8}{9(m-2)} = \frac{1}{m+2}$$

$$\Leftrightarrow 8(m+2) = 9(m-2) \Leftrightarrow 8m+16 = 9m-18 \Leftrightarrow m=34 \text{ (thỏa điều kiện (*))}$$

Vậy với $m=34$ thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = 2x_2$

d) Phương trình (1) có nghiệm này bằng hai lần nghiệm kia.

Không mất tính tổng quát, giải sử $x_1 = 2x_2$ (giải như câu c)

7. Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 \neq 0 \\ (m+2)^2 - (m^2 - 4) \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ 4m+8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2 \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m > -2 \end{cases} (*)$$

Theo định lý Vi-ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2(m+2)}{m^2-4} = \frac{-2}{m+2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{m^2-4} \end{cases}$$

Phương trình (1) có các nghiệm x_1, x_2 đều là số nguyên

$$\Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{m^2-4} \in \mathbb{Z} \Rightarrow m^2-4 \in \{-1; 1\} \Rightarrow m^2 \in \{3; 5\}$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \emptyset$

Vậy không có giá trị của m để phương trình (1) có các nghiệm đều là số nguyên.

Bài 31. Cho phương trình: $(m^2 - m)x^2 + 2mx + 1 = 0$ (1); với m là tham số thực.

1. Giải phương trình (1) khi $m = 2$.
2. Tìm m để (1) không nhận $x = 1$ làm nghiệm.
3. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.
4. Tìm m để phương trình có một nghiệm bằng 3. Tính nghiệm còn lại.
5. Xác định giá trị của m để phương trình có hai nghiệm cùng âm.
6. Xác định giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

a) $x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = \frac{1}{m^2 - m}$.

b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = m^3$.

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 + x_2}$.

d) $(m^2 - m)x_1^2 - 2mx_2 = 8$

7. Khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , tìm hệ thức liên hệ giữa 2 nghiệm không phụ thuộc vào tham số m .

Lời giải

Bài 32. Xét phương trình: $(m^2 - m)x^2 + 2mx + 1 = 0$ (1); với m là tham số thực.

1. Giải phương trình (1) khi $m = 2$.

Với $m = 2$ ta có (1) $\Leftrightarrow (2^2 - 2)x^2 + 2.2x + 1 = 2x^2 + 4x + 1 = 0$; ($a = 2, b' = 2, c = 1$)

Ta có: $\Delta' = 2^2 - 2.1 = 2 > 0$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-2 + \sqrt{2}}{2}$; $x_2 = \frac{-2 - \sqrt{2}}{2}$.

Vậy $m = 2$ thì (1) có tập nghiệm là $S = \left\{ \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2} \right\}$.

2. Tìm m để (1) không nhận $x = 1$ làm nghiệm.

Để phương trình (1) không nhận $x = 1$ làm nghiệm thì:

$$(m^2 - m)1^2 + 2m.1 + 1 \neq 0$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\Leftrightarrow m^2 - m + 2m + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + m + 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \neq 0 \text{ (Luôn đúng } \forall m \in \mathbb{R} \text{)}.$$

Vậy phương trình (1) không nhận $x = 1$ làm nghiệm $\forall m \in \mathbb{R}$.

3. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.

Với $m \neq 0, m \neq 1$ thì phương trình (1) có:

$$\Delta' = (m)^2 - (m^2 - m) \cdot 1 = m^2 - m^2 + m = m$$

Để (1) có hai nghiệm thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 0 \Leftrightarrow m > 0$ (Do $m \neq 0$)

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm khi $m > 0$ và $m \neq 1$; (2)

Với $m = 0$ thì phương trình (1): $(0^2 - 0)x^2 + 2 \cdot 0 \cdot x + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ (Vô lý)

Với $m = 1$ thì phương trình (1): $(1^2 - 1)x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$; (3)

Từ (2) và (3) suy ra phương trình (1) có nghiệm khi $m > 0$.

4. Tìm m để phương trình có một nghiệm bằng 3. Tính nghiệm còn lại.

Để phương trình (1) có một nghiệm bằng 3 thì:

$$(m^2 - m)3^2 + 2 \cdot m \cdot 3 + 1 = 0 \Leftrightarrow 9m^2 - 3m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(3m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(3m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \text{ (Vô lý)}$$

Vậy không có m để phương trình có nghiệm bằng 3.

5. Xác định giá trị của m để phương trình có hai nghiệm cùng âm.

Để (1) có hai nghiệm thì $m > 0$ và $m \neq 1$ (kết quả câu 3)

Khi đó để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 cùng âm thì :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0 \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2m}{m^2 - m} < 0 \\ \frac{1}{m^2 - m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2m}{m(m-1)} < 0 \\ \frac{1}{m(m-1)} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2}{m-1} < 0 \text{ (Do } m > 0) \\ \frac{1}{m(m-1)} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ m-1 > 0 \text{ (Do } m > 0) \end{cases} \Leftrightarrow m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm cùng âm khi $m > 1$.

6. Xác định giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

Với $m \neq 0, m \neq 1$ thì phương trình (1) có:

$$\Delta' = m$$

Để (1) có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi $m > 0$ và $m \neq 1$.

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1).

$$\text{Khi đó theo hệ thức Vi-et, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-2m}{m^2 - m} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{m^2 - m} \end{cases}$$

$$\text{a) } x_1 + x_2 - 3x_1 x_2 = \frac{1}{m^2 - m}.$$

$$\text{Ta có: } x_1 + x_2 - 3x_1 x_2 = \frac{-2m}{m^2 - m} - 3 \frac{1}{m^2 - m} = \frac{1}{m^2 - m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2m - 3}{m^2 - m} = \frac{1}{m^2 - m}$$

$$\Rightarrow -2m - 3 = 1$$

$$\Leftrightarrow m = -2 \text{ (Loại)}$$

$$\text{Vậy không tìm được } m \text{ để } x_1 + x_2 - 3x_1 x_2 = \frac{1}{m^2 - m}$$

$$\text{b) } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = m^3.$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{-2m}{m^2 - m}}{\frac{1}{m^2 - m}} = -2m = m^3$$

$$\Leftrightarrow m^3 + 2m = 0 \Leftrightarrow m(m^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (Loại)}$$

$$\text{Vậy không tìm được } m \text{ để } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = m^3$$

$$\text{c) } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 + x_2}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -2m; \frac{1}{x_1 + x_2} = \frac{m^2 - m}{-2m}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 + x_2} \Leftrightarrow -2m = \frac{m^2 - m}{-2m}$$

$$\Rightarrow 4m^2 = m^2 - m \Leftrightarrow 3m^2 + m = 0 \Leftrightarrow m(3m + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{1}{3} \end{cases} \text{ (Loại)}$$

$$\text{Vậy không tìm được } m \text{ để } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 + x_2}$$

$$\text{d) } (m^2 - m)x_1^2 - 2mx_2 = 8 \quad (4)$$

$$\text{Do } x_1 \text{ là nghiệm phương trình (1) nên ta có: } (m^2 - m)x_1^2 + 2mx_1 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - m)x_1 = -2mx_1 - 1$$

Thay vào phương trình (4), ta được:

$$-2mx_1 - 1 - 2mx_2 = 8$$

$$\Leftrightarrow -2m(x_1 + x_2) - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2m \cdot \frac{-2m}{m^2 - m} - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 8m^2 + 8m = 0$$

$$\Leftrightarrow -4m^2 + 8m = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (L)} \\ m = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } m = 2 \text{ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn } (m^2 - m)x_1^2 - 2mx_2 = 8$$

7. Khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 , tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào tham số m .

Với $m \neq 0, m \neq 1$ thì phương trình (1) có: $\Delta' = m$

Để (1) có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 0$

Vậy phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi $m > 0$ và $m \neq 1$.

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (1).

Khi đó theo hệ thức Vi-et, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-2m}{m^2 - m} = \frac{-2}{m-1} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{m^2 - m} = \frac{1}{m(m-1)} \end{cases} \quad (5)$$

Vì $x_1 + x_2 = \frac{-2}{m-1} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-2}{x_1 + x_2} + 1 = \frac{-2 + x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \\ m - 1 = \frac{-2}{x_1 + x_2} \end{cases}$

Thay vào phương trình (5), ta được:
$$x_1 x_2 = \frac{1}{\frac{-2 + x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \cdot \frac{-2}{x_1 + x_2}} = \frac{(x_1 + x_2)^2}{4 - 2x_1 - 2x_2}$$

$\Rightarrow x_1 x_2 = \frac{(x_1 + x_2)^2}{4 - 2x_1 - 2x_2}$ là hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào tham số m với

điều kiện $m \neq 1; m > 0$.

Bài 33. Cho phương trình: $mx^2 - 2(m+1)x + m - 4 = 0 \quad (1)$; với m là tham số thực.

1. Giải phương trình đã cho với $m = 0$.

2. Tìm m để (1) không nhận nghiệm bằng 3.

3. Xác định giá trị của m để (1) có hai nghiệm trái dấu. Khi đó trong hai nghiệm hãy chứng minh nghiệm dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn.

4. Xác định giá trị của m để (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn:

a) $x_1 + x_2 = 3x_1 x_2 - 5$

b) Nghiệm này bằng 2 lần nghiệm kia.

c) $x_1 + 4x_2 = 3$

d) $x_1^3 + x_2^3 = 100$

e) $x_1 < 1 < x_2$

f) $mx_1^2 + 2(m+1)x_2 + m - 5 = 0$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

g) Biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

5. Khi (1) có hai nghiệm, tìm hệ thức liên hệ không phụ thuộc vào tham số m

Lời giải

1.

Khi $m = 0$ ta có: $-2x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow -2x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

Vậy khi $m = 0$ phương trình có nghiệm $x = -2$

2. Để (1) không nhận nghiệm bằng 3 ta có:

$$m.3^2 - 2.(m+1).3 + m - 4 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 9m - 6m - 6 + m - 4 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 4m \neq 10$$

$$\Leftrightarrow m \neq \frac{5}{2}$$

3.

Để (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0$

$$\Leftrightarrow 0 < m < 4 \text{ (Khi cho tích } a.c < 0 \text{ thì mặc định } a \text{ đã khác } 0)$$

Theo định lý Vi-et: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2m+2}{m} = 2 + \frac{2}{m}$

$$\text{Mà } 0 < m < 4 \Leftrightarrow \frac{2}{m} > 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{2}{m} > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 0$$

Vậy khi (1) có hai nghiệm trái dấu thì nghiệm dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn.

Sửa lại: Theo định lý Vi-et: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2m+2}{m} = 2 + \frac{2}{m}$

$$\text{Mà } 0 < m < 4 \Leftrightarrow \frac{2}{m} > 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{2}{m} > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 0$$

$$\text{Giả sử } x_1 < 0; x_2 > 0 \Rightarrow |x_1| = -x_1; |x_2| = x_2$$

Ta có:

$$x_1 + x_2 > 0 \Leftrightarrow x_2 > -x_1 \Leftrightarrow |x_2| > |x_1|$$

Vậy khi (1) có hai nghiệm trái dấu thì nghiệm dương có giá trị tuyệt đối lớn hơn.

$$4. \text{ Để (1) có hai nghiệm } x_1; x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 6m + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Theo hệ thức Vi – et có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2m+2}{m}; & (2) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-4}{m}; & (3) \end{cases}$$

$$a) x_1 + x_2 = 3x_1x_2 - 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m+2}{m} = 3 \cdot \frac{m-4}{m} - 5$$

$$\Rightarrow 2m+2 = 3m - 12 - 5m$$

$$\Leftrightarrow 4m = -14$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{7}{2} (KTM)$$

Vậy không có giá trị nào của m để phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn

$$x_1 + x_2 = 3x_1x_2 - 5$$

$$b) \text{ Giả sử } x_1 = 2x_2; \quad (4)$$

$$\text{Từ (2); (4) ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m+2}{m} \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{2m+2}{3m} \\ x_1 = \frac{4m+4}{3m} \end{cases}$$

$$\text{Thay } x_1 = \frac{4m+4}{3m}; x_2 = \frac{2m+2}{3m} \text{ vào (3) có:}$$

$$\frac{4m+4}{3m} \cdot \frac{2m+2}{3m} = \frac{m-4}{m}$$

$$\Rightarrow 8m^2 + 16m + 8 = 9m^2 - 36m$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 52m - 8 = 0$$

$$(a=1; b=-52 \Rightarrow b'=-26; c=-8)$$

$$\Delta = b'^2 - ac = 684 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 6\sqrt{19}$$

$$m_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta}}{a} = 26 - 6\sqrt{19} (TM); m_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta}}{a} = 26 + 6\sqrt{19} (TM)$$

Vậy $m \in \{26 - 6\sqrt{19}; 26 + 6\sqrt{19}\}$ thì (1) có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn nghiệm này gấp đôi nghiệm

kia.

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

c) $x_1 + 4x_2 = 3(*)$

Từ (2); (*) có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m+2}{m} \\ x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{m-2}{3m} \\ x_1 = \frac{5m+8}{3m} \end{cases}$$

Thay $x_1 = \frac{5m+8}{3m}; x_2 = \frac{m-2}{3m}$ vào (3) có:

$$\begin{aligned} \frac{5m+8}{3m} \cdot \frac{m-2}{3m} &= \frac{m-4}{m} \\ \Leftrightarrow \frac{5m^2 - 2m - 16}{9m^2} &= \frac{m-4}{m} \\ \Rightarrow 5m^2 - 2m - 16 &= 9m^2 - 36m \\ \Leftrightarrow 4m^2 - 32m + 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow m^2 - 8m + 4 &= 0 \end{aligned}$$

$$a=1; b=-8 \Rightarrow b'=-4; c=4$$

$$\Delta = b'^2 - ac = 12 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$m_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta}}{a} = 4 - 2\sqrt{3} (TM); m_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta}}{a} = 4 + 2\sqrt{3} (TM)$$

Vậy $m \in \{4 - 2\sqrt{3}; 4 + 2\sqrt{3}\}$ thì (1) có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + 4x_2 = 3$

d) $x_1^3 + x_2^3 = 100$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) &= 100 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2m+2}{m}\right)^3 - 3 \cdot \frac{m-4}{m} \cdot \frac{2m+2}{m} &= 100 \\ \Rightarrow 8m^3 + 24m^2 + 24m + 8 - 6m^3 + 18m^2 + 24m &= 100m^3 \\ \Leftrightarrow 98m^3 - 42m^2 - 48m - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow 49m^3 - 21m^2 - 24m - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (m-1)(49m^2 + 28m + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (m-1)(7m+2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m=1(TM) \\ m=\frac{-2}{7}(KTM) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $m=1$ thì (1) có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 100$

e) Để $x_1 < 1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 1 \\ x_2 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 1 < 0 \\ x_2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-4}{m} - \frac{2m+2}{m} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-6}{m} < 0 \Leftrightarrow m > 0$$

Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow m > 0$ thì (1) có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$

f) $mx_1^2 + 2(m+1)x_2 + m - 5 = 0$

Vì $m \neq 0$ nên chia cả 2 vế của phương trình cho m ta có:

$$x_1^2 + \frac{2(m+1)}{m}x_2 + 1 - \frac{5}{m} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + (x_1 + x_2) \cdot x_2 + 1 - \frac{5}{m} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1 \cdot x_2 + 1 - \frac{5}{m} = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 7m + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -15 < 0$$

Vậy phương trình vô nghiệm

Vậy không có giá trị của m thỏa mãn

g)

$$P = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 6x_1x_2 = \left(\frac{2m+2}{m}\right)^2 - 6 \cdot \frac{m-4}{m}$$

$$= \frac{-2m^2 + 32m + 4}{m^2} = -2 + \frac{32}{m} + \frac{4}{m^2} = \left(\frac{2}{m} + 8\right)^2 - 66 \geq -66$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi : $m = \frac{-1}{4}$ (TM)

Vậy GTNN của $P = -66 \Leftrightarrow m = \frac{-1}{4}$

5. Khi (1) có 2 nghiệm $x_1; x_2$ theo hệ thức Vi – et có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2m+2}{m}; & (2) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-4}{m}; & (3) \end{cases}$$

Có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2m+2}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-4}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 + \frac{2}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = 1 - \frac{4}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_1 + x_2) = 4 + \frac{4}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = 1 - \frac{4}{m} \end{cases}$

Cộng hai vế của 2 phương trình của hệ ta được :

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$2(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 = 5$$

Là biểu thức không phụ thuộc vào giá trị của m .

Bài 34. Cho phương trình: $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ (1); với m là tham số thực.

1. Giải phương trình với $m = 4$

2. Tìm m để phương trình (1) không nhận giá trị nghiệm bằng 3.

3. Xác định giá trị m để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều dương.

4. Tìm m để tập hợp nghiệm của phương trình (1) chỉ có một phần tử. Xác định nghiệm đó.

5. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

a) $3(x_1 + x_2) = 6x_1x_2 - 7$

b) $x_1^2 + x_2^2 = 1$

c) $x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 - 5$

d) $mx_2^2 + 2(m-2)x_1 + m = 12$

e) $[mx_1^2 + 2(m-2)x_2 + m - 3](x_1 - 1) \leq 0$

6. Khi phương trình có hai nghiệm, tìm hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m

Lời giải

Cho phương trình: $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ (1); với m là tham số thực.

1. Giải phương trình với $m = 4$

Thay $m = 4$ vào phương trình (1) ta được:

$$4x^2 - 2(4-2)x + 4 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(2x - 1)^2 = 0 \dots$$

2. Cho phương trình: $mx^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ (1); với m là tham số thực.

Tìm m để phương trình (1) không nhận giá trị nghiệm bằng 3.

Phương trình (1) không nhận nghiệm bằng 3 nên $x = 3$ không thỏa mãn phương trình (1)

$$\Rightarrow m \cdot 3^2 - 2(m-2) \cdot 3 + m - 3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 4m + 9 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq \frac{-9}{4}$$

Vậy với $m \neq -\frac{9}{4}$ thì phương trình (1) không nhận nghiệm bằng 3.

3. Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt đều dương khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[-(m-2)^2 \right] - m(m-3) > 0 \\ \frac{m-3}{m} > 0 \\ \frac{2(m-2)}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -m+4 > 0 \\ \begin{cases} m-3 > 0 \\ m < 0 \end{cases} \\ \frac{m-2}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < 4 \\ \begin{cases} m > 3 \\ m < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 < m < 4 \\ m < 0 \end{cases}$$

Vậy với $3 < m < 4$ hoặc $m < 0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt đều dương.

4. $mx^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ (1); với m là tham số thực.

Ta xét 2 trường hợp sau:

TH1: $m = 0$. Thay $m = 0$ vào phương trình (1) ta được:

$$-2 \cdot (-2)x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Với $m = 0$ phương trình có 1 nghiệm là $x = \frac{3}{4}$

TH2: $m \neq 0$. Tập nghiệm phương trình (1) chỉ có 1 phần tử khi:

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow \left[-(m-2)^2 \right] - m(m-3) = 0 \Leftrightarrow -m+4 = 0 \Leftrightarrow m = 4$$

Khi đó phương trình có nghiệm kép là: $x = \frac{-1}{2}$. (Theo ý 1).

Vậy với $m = 0$ hoặc $m = 4$ thì tập nghiệm của phương trình (1) có duy nhất 1 phần tử.

5. Phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \left[-(m-2)^2 \right] - m(m-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -m+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq 4 \end{cases} (*)$$

Khi đó, theo hệ thức Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-2)}{m} & (2) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-3}{m} & (3) \end{cases}$$

a) Từ $3(x_1 + x_2) = 6x_1x_2 - 7$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\Rightarrow 3 \cdot \frac{2(m-2)}{m} = 6 \cdot \frac{m-3}{m} - 7$$

$$\Rightarrow 6m - 12 = 6m - 18 - 7m$$

$$\Leftrightarrow 7m = -6 \Leftrightarrow m = \frac{-6}{7} \text{ (thỏa mãn (*))}$$

Vậy với $m = \frac{-6}{7}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $3(x_1 + x_2) = 6x_1x_2 - 7$

$$\text{b) Ta có: } x_1^2 + x_2^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2(m-2)}{m} \right)^2 - 2 \cdot \frac{m-3}{m} = 1$$

$$\Rightarrow 4(m-2)^2 - 2m(m-3) = m^2$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 16m + 16 - 2m^2 + 6m - m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 10m + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 8 \text{ (loại)} \\ m = 2 \text{ (thỏa mãn (**))} \end{cases}$$

Vậy với $m = 2$ thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

$$\text{c) Ta có } x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 - 5 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2(m-2)}{m} \right)^2 - 3 \cdot \frac{m-3}{m} + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 4(m-2)^2 - 3m(m-3) + 5m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 16m + 16 - 3m^2 + 9m + 5m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 6m^2 - 7m + 16 = 0 \text{ (**)}$$

$$\text{Ta lại có } 6m^2 - 7m + 16 = 6 \left(m^2 - \frac{7}{6}m \right) + 16 = 6 \left(m^2 - 2 \cdot m \cdot \frac{7}{12} + \left(\frac{7}{12} \right)^2 \right) - 6 \cdot \left(\frac{7}{12} \right)^2 + 16$$

$$= 6 \left(m - \frac{7}{12} \right)^2 + \frac{335}{24} > 0$$

$\Rightarrow$ Phương trình (**) vô nghiệm

Vậy không có giá trị nào của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1x_2 - 5.$$

$$\text{d) } mx^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$$

$$mx_2^2 + 2(m-2)x_1 + m = 12 \quad (4)$$

Ta có $x_1 + x_2 = \frac{2(m-2)}{m} \Rightarrow 2(m-2) = m(x_1 + x_2)$. Thế vào (4) ta được:

$$mx_2^2 + m(x_1 + x_2)x_1 + m = 12 \Leftrightarrow mx_2^2 + mx_1^2 + mx_1x_2 + m = 12$$

$$\Leftrightarrow m(x_1 + x_2)^2 - mx_1x_2 + m - 12 = 0$$

$$\Rightarrow m \left(\frac{2(m-2)}{m} \right)^2 - m \cdot \frac{m-3}{m} + m - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 4(m-2)^2 + (3-m)m + m^2 - 12m = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 16m + 16 - m^2 + 3m + m^2 - 12m = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 25m + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{25+3\sqrt{41}}{8} (\text{loại}) \\ m = \frac{25-3\sqrt{41}}{8} (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

Vậy với $m = \frac{25-3\sqrt{41}}{8}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$mx_2^2 + 2(m-2)x_1 + m = 12$$

$$mx_2^2 + 2(m-2)x_1 + m = 12 \quad (4)$$

$$e) [mx_1^2 + 2(m-2)x_2 + m-3](x_1-1) \leq 0 \quad (5)$$

Ta có $x_1 + x_2 = \frac{2(m-2)}{m} \Rightarrow 2(m-2) = m(x_1 + x_2)$. Thế vào (5) ta được:

$$[mx_1^2 + 2(m-2)x_2 + m-3](x_1-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (mx_2^2 + mx_1^2 + mx_1x_2 + m-3)(x_1-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (m(x_1 + x_2)^2 - mx_1x_2 + m-3)(x_1-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow \left(m \left(\frac{2(m-2)}{m} \right)^2 - m \cdot \frac{m-3}{m} + m-3 \right) (x_1-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow (4(m-2)^2 + (3-m)m + m^2 - 3m)(x_1-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4(m-2)^2(x_1-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow x_1-1 \leq 0 \text{ (Do } (m-2)^2 \geq 0) \quad (***)$$

Bài toán quy về tìm điều kiện của m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1-1 \leq 0$

Xét phương trình (1): $mx^2 - 2(m-2)x + m-3 = 0$ (1); với m là tham số thực.

$$\text{Có } \Delta' = [- (m-2)]^2 - m(m-3) = -m+4$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\Rightarrow x_1 = \frac{m-2+\sqrt{-m+4}}{m}. \text{ Thay vào (***) ta được:}$$

$$\frac{m-2+\sqrt{-m+4}}{m} - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-2+\sqrt{-m+4}}{m} \leq 1$$

$$\Rightarrow m-2+\sqrt{-m+4} \leq m$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-m+4} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -m+4 \leq 4 \Leftrightarrow m \geq 0. \text{ Kết hợp với điều kiện (*)} \Rightarrow 0 < m \leq 4.$$

Vậy với $0 < m \leq 4$ thì phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$[mx_1^2 + 2(m-2)x_2 + m-3](x_1-1) \leq 0$$

$$7. \text{ Phương trình (1) có 2 nghiệm } x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq 4 \end{cases}$$

Khi đó, theo hệ thức Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-2)}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-3}{m} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - \frac{4}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = 1 - \frac{3}{m} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_1 + x_2) = 6 - \frac{12}{m} \\ 4x_1 \cdot x_2 = 4 - \frac{12}{m} \end{cases}$$

Trừ vế với vế hai phương trình của hệ ta được: $3(x_1 + x_2) - 4x_1 \cdot x_2 = 2$ là hệ thức liên hệ giữa 2 nghiệm không phụ thuộc tham số m với $m \neq 0$; $m \leq 4$.

Bài 35. Cho phương trình: $(m+2)x^2 - (2m-1)x + m-3 = 0$ (1)

Với m là tham số thực

1. Giải phương trình (1) khi $m=3$.

2. Tìm m để phương trình (1) không nhận nghiệm bằng 4.

3. Tìm m để tập hợp nghiệm của (1) chỉ có 1 phần tử.
4. Tìm m để phương trình (1) có ít nhất 1 nghiệm không âm
5. Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm sao cho nghiệm này gấp 5 lần nghiệm kia.
6. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho (1) có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn:
- $x_1 + x_2 = 2x_1x_2 - 5$
 - $x_1^2 + x_2^2 \leq 10$
 - $x_1 > x_2 > \frac{1}{2}$
 - $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2$
 - $9\sqrt{x_1x_2} = \frac{10}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$
 - $x_1^2 = 9x_2$
 - $x_1 - x_2 \leq 4$
 - Nghiệm này bằng lũy thừa bậc năm của nghiệm kia.
 - Biểu thức $S = x_1^6 + x_2^6$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 - $x_1 \in [3; 4], x_2 \in [0; 2]$
7. Tồn tại hay không hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm độc lập với m (khi phương trình có hai nghiệm phân biệt).

Lời giải:

1. Thay $m = 3$ vào (1) ta được phương trình:

$$5x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow 5x(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy với $m = 3$ tập nghiệm của phương trình (1) là: $S = \{0; 1\}$

$$5x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow 5x(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy với $m = 3$ tập nghiệm của phương trình (1) là: $S = \{0; 1\}$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

2. $x = 4$ không phải nghiệm của (1)

$$\Leftrightarrow (m+2).4^2 - (2m-1).4 + m - 3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 16m + 32 - 8m + 4 + m - 3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 9m + 33 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq -\frac{11}{3}$$

Vậy $m \neq -\frac{11}{3}$ để phương trình (1) không nhận nghiệm bằng 4.

3. Tập nghiệm của (1) chỉ có 1 phần tử:

+) TH1: $m = -2$

$$(1) \Leftrightarrow 5x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$\Rightarrow m = -2$ thỏa mãn đề bài

+) TH2: $m \neq -2$ phương trình (1) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \Delta = 0$$

$$\Leftrightarrow [- (2m-1)]^2 - 4.(m+2).(m-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 - 4(m^2 - m - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow 25 = 0 \text{ (Vô lí)}$$

$\Rightarrow$ Không có m thỏa mãn

Vậy tập nghiệm của (1) chỉ có 1 phần tử $\Leftrightarrow m = -2$

4. Ta có: $a + b + c = m + 2 - (2m - 1) + m - 3 = 0$

$$\Rightarrow \text{Phương trình (1) có nghiệm: } \begin{cases} x_1 = 1 & (\text{lưu ý không âm}) \\ x_2 = \frac{m-3}{m+2} & (\text{với } m \neq -2) \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) luôn có ít nhất một nghiệm không âm với mọi m

5. Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -2$

$$\text{Theo Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m-1}{m+2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-3}{m+2} \end{cases} \quad (2)$$

Theo đề bài: $x_1 = 5x_2$

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} x_1 = 5x_2 \\ x_1 + x_2 = \frac{2m-1}{m+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5x_2 \\ 6x_2 = \frac{2m-1}{m+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5(2m-1)}{6(m+2)} \\ x_2 = \frac{2m-1}{6(m+2)} \end{cases}$$

Thay vào (2) ta có:

$$\frac{5(2m-1)}{6(m+2)} \cdot \frac{2m-1}{6(m+2)} = \frac{m-3}{m+2}$$

$$\Leftrightarrow 16m^2 - 16m - 221 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{17}{4} \\ m = -\frac{13}{4} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $m \neq -2$, vậy $m = \frac{17}{4}$ hoặc $m = -\frac{13}{4}$ thỏa mãn đề bài.

$$6. \text{ Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -2$$

$$\text{Theo Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m-1}{m+2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-3}{m+2} \end{cases}$$

$$a) x_1 + x_2 = 2x_1x_2 - 5$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m-1}{m+2} = \frac{2(m-3)}{m+2} - 5$$

$$\Leftrightarrow 5m + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -5 \neq -2$$

Vậy $m = -5$ thỏa mãn đề bài.

$$b) x_1^2 + x_2^2 \leq 10$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \leq 10$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2m-1}{m+2} \right)^2 - 2 \cdot \frac{m-3}{m+2} \leq 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2m-1)^2 - 2(m-3)(m+2) - 10(m+2)^2}{(m+2)^2} \leq 0$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\Leftrightarrow \frac{-8m^2 - 42m - 27}{(m+2)^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow -8m^2 - 42m - 27 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -8 \left(m + \frac{9}{2} \right) \left(m + \frac{3}{4} \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{9}{2} \\ m \geq -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $m \neq -2 \Rightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{9}{2} \\ m \geq -\frac{3}{4} \end{cases}$ thỏa mãn đề bài.

$$c) x_1 > x_2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2} > 0 \\ x_2 - \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(x_1 - \frac{1}{2} \right) \left(x_2 - \frac{1}{2} \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-3}{m+2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2m-1}{m+2} + \frac{1}{4} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-8}{4(m+2)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 8 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $m \neq -2 \Rightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 8 \end{cases}$ thỏa mãn đề bài.

Thiếu điều kiện: $\begin{cases} \left(x_1 - \frac{1}{2} \right) \left(x_2 - \frac{1}{2} \right) > 0 \\ \left(x_1 - \frac{1}{2} \right) + \left(x_2 - \frac{1}{2} \right) > 0 \end{cases}$

$$d) \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = 2 \quad (1)$$

Với $m \neq -2$ phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{m-3}{m+2} \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-3}{m+2} \geq 0 \\ 1 + \sqrt{\frac{m-3}{m+2}} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m \geq 3 \\ \sqrt{\frac{m-3}{m+2}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m \geq 3 \\ \frac{m-3}{m+2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m \geq 3 \\ 0 = 5 \end{cases} \text{ (vô lý)}$$

Vậy không có m thỏa mãn đề bài.

$$e) 9\sqrt{x_1 x_2} = \frac{10}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}.$$

Phương trình $(m+2)x^2 - (2m-1)x + m-3 = 0$ (1) có

$(m+2) - (2m-1) + m-3 = 0$ nên phương trình (1) có 1 nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \frac{m-3}{m+2}$

$$\text{Điều kiện: } x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m \geq 3 \end{cases}$$

$$9\sqrt{x_1 x_2} = \frac{10}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \Leftrightarrow 9\sqrt{x_2} = \frac{10}{1 + \sqrt{x_2}} \Leftrightarrow 9\sqrt{x_2}(1 + \sqrt{x_2}) = 10 \Leftrightarrow 9x_2 + 9\sqrt{x_2} - 10 = 0$$

$$\text{Đặt } \sqrt{x_2} = t \quad (t \geq 0)$$

$$9t^2 + 9t - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} \quad (tm) \\ t = \frac{-5}{3} \quad (l) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{m-3}{m+2} \Leftrightarrow 4(m+2) = 9(m-3) \Leftrightarrow m = 7 \neq -2$$

Kết hợp với điều kiện ban đầu suy ra $m = 7$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

$$f) x_1^2 = 9x_2.$$

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m-1}{m+2} \quad (2) \\ x_1 x_2 = \frac{m-3}{m+2} \quad (3) \end{cases}$$

Ta thấy phương trình (1) luôn có một nghiệm $x = 1$ (do $m+2 - 2m+1 + m-3 = 0$).

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

TH₁: Nếu $x_1 = 1$ thay vào (3) ta có $x_2 = \frac{m-3}{m+2}$

$$\Rightarrow x_1^2 = 9x_2$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{9(m-3)}{m+2} \Leftrightarrow m+2 = 9m-27$$

$$\Leftrightarrow 8m = 29$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{29}{8}$$

TH₂: Nếu $x_2 = 1$ thay vào (3) ta có $x_1 = \frac{m-3}{m+2}$

$$\Rightarrow x_1^2 = 9x_2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{m-3}{m+2} \right)^2 = 9 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 = 9(m^2 + 4m + 4)$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 = 9m^2 + 36m + 36$$

$$\Leftrightarrow 8m^2 + 42m + 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-21 + \sqrt{241}}{8} \\ m = \frac{-21 - \sqrt{241}}{8} \end{cases}$$

Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn phương trình trên là $m = \frac{29}{8}$, $m = \frac{-21 + \sqrt{241}}{8}$ và $m = \frac{-21 - \sqrt{241}}{8}$

g) $x_1 - x_2 \leq 4$ (1).

Ta có phương trình luôn có nghiệm $x = 1$

TH₁: $x_1 - x_2 < 0$ suy ra (1) luôn đúng với $m \neq -2$

TH₂: $x_1 - x_2 \geq 0$, do đó

$$(1) \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 16 \Leftrightarrow \frac{(2m-1)^2}{(m+2)^2} - 4 \frac{m-3}{m+2} \leq 16 \Leftrightarrow \frac{25}{(m+2)^2} \leq 16 \Leftrightarrow \frac{-13}{4} \leq m \leq -2$$

Vậy $\frac{-13}{4} \leq m < -2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

h) Nghiệm này bằng lũy thừa bậc năm của nghiệm kia.

Ta thấy phương trình (1) luôn có một nghiệm $x = 1$.

Suy ra theo yêu cầu đề bài ta có $x_1 = x_2^5 = 1$ suy ra phương trình không có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

i) Biểu thức $S = x_1^6 + x_2^6$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Phương trình $(m+2)x^2 - (2m-1)x + m-3 = 0$ (1) có

$(m+2) - (2m-1) + m-3 = 0$ nên phương trình (1) có 1 nghiệm $x_1 = 1, x_2 = \frac{m-3}{m+2}$

$$S = (x_1)^6 + (x_2)^6 = 1 + \left(\frac{m-3}{m+2}\right)^6 \geq 1$$

$$\Rightarrow \min S = 1 \text{ Khi } \frac{m-3}{m+2} = 0 \Leftrightarrow m-3 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \neq 2$$

Vậy $m = 3$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

$$j) x_1 \in [3; 4], x_2 \in [0; 2].$$

Phương trình (1) có một nghiệm $x_2 = 1 \in [0; 2]$

Theo Vi-et ta có $x_1 = \frac{m-3}{m+2}$. Vì $x_1 \in [3; 4]$

$$\Rightarrow 3 \leq \frac{m-3}{m+2} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-3}{m+2} \leq 4 \\ \frac{m-3}{m+2} \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-3-4m-8}{m+2} \leq 0 \\ \frac{m-3-3m-6}{m+2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-3m-11}{m+2} \leq 0 \\ \frac{-2m-9}{m+2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{-11}{3} \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{-11}{3} \\ m \geq -2 \\ \frac{-9}{2} \leq m \leq \frac{-11}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy để } x_1 \in [3; 4], x_2 \in [0; 2] \text{ thì } \begin{cases} m \leq \frac{-11}{3} \\ m \geq -2 \\ \frac{-9}{2} \leq m \leq \frac{-11}{3} \end{cases}.$$

7. Tồn tại hay không hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm độc lập với m (khi phương trình có hai nghiệm phân biệt).

Khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, áp dụng hệ thức Vi-et ta có:

Cách 1:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m-1}{m+2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{m-3}{m+2} \end{cases} \quad (3)$$

Từ (2) ta có:

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$x_1 + x_2 = 2 - \frac{5}{m+2}$$

$$\Leftrightarrow m+2 = \frac{-5}{x_1 + x_2 - 2}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-5}{x_1 + x_2 - 2} - 2$$

Thay m vào (3) ta có:

$$x_1 x_2 = \left(\frac{-5}{x_1 + x_2 - 2} - 5 \right) : \left(\frac{-5}{x_1 + x_2 - 2} \right)$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 = \left(\frac{-5 - 5(x_1 + x_2 - 2)}{x_1 + x_2 - 2} \right) : \left(\frac{-5}{x_1 + x_2 - 2} \right)$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 = \left(\frac{5 - 5(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2 - 2} \right) \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 - 2}{-5} \right)$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 = \frac{-5(x_1 + x_2 - 1)}{-5}$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 = x_1 + x_2 - 1$$

Như vậy, tồn tại hệ thức liên hệ hai nghiệm độc lập với m .

Cách 2:

$m \neq -2$ ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m-1}{m+2} = 2 - \frac{5}{m+2} \\ x_1 x_2 = \frac{m-3}{m+2} = 1 - \frac{5}{m+2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 - x_1 x_2 = 1 \quad (\forall m \neq -2)$$

Như vậy, tồn tại hệ thức liên hệ hai nghiệm độc lập với m .

Bài 36: Cho phương trình $(m-3)x^2 - 2(m-1)x + m-5 = 0$ (1); với m là tham số thực.

1. Tìm giá trị của m để (1) không nhận nghiệm bằng 2.
2. Giải phương trình (1) khi phương trình có nghiệm kép.
3. Xác định m để phương trình có ít nhất một nghiệm không âm.
4. Xác định m sao cho (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:
 - a. $x_1 \cdot x_2 \leq 2$.
 - b. $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 39$.
 - c. $x_1 + x_2 = 2x_1 x_2$.

$$d. (m-3)x_1^2 + 2(m-1)x_2 + m-5 = \frac{1}{(m-3)}.$$

1. $x=2$ không là một nghiệm phương trình (1)

$$\Leftrightarrow (m-3).2^2 - 2.(m-1).2 + m-5 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 4.(m-3) - 4.(m-1) + m-5 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq 13$$

Vậy với $m \neq 13$ thì phương trình (1) không có nghiệm $x=2$.

$$2. \text{ Phương trình (1) có nghiệm kép } \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - (m-3).(m-5) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \Delta' = 6m-14 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m = \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{7}{3}.$$

$$\text{Khi đó phương trình (1) có nghiệm kép } x_1 = x_2 = \frac{m-1}{m-3} = \frac{\frac{7}{3}-1}{\frac{7}{3}-3} = -2$$

Vậy $m = \frac{7}{3}$ thì phương trình (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -2$.

3. Phương trình (1) có ít nhất 1 nghiệm không âm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có ít nhất một nghiệm $x \geq 0$.

$$+) \text{ Xét } m-3=0 \Leftrightarrow m=3. \text{ thay vào (1) ta có: } x = -\frac{1}{2} < 0.$$

Suy ra $m=3$ không thỏa mãn.

$$+) \text{ Xét } m-3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3.$$

$$\text{Xét } \Delta' = (m-1)^2 - (m-3).(m-5) = 6m-14 = 2.(3m-7).$$

$$\text{TH1. (1) có nghiệm kép } \Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{3}.$$

Khi đó (1) có ít nhất một nghiệm $x \geq 0 \Leftrightarrow$ (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 \geq 0$

$$x_1 = x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \frac{m-1}{m-3} \geq 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = -2 \geq 0 \text{ (vô lí)}$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Suy ra $m = \frac{7}{3}$ không thỏa mãn.

TH2. (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m > \frac{7}{3}$.

Khi đó (1) có ít nhất một nghiệm $x \geq 0$

$\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{m-5}{m-3} \leq 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{m-1}{m-3} \geq 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-5}{m-3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < m \leq 5 \\ \begin{cases} m \leq 1 \\ m > 3 \\ m \geq 5 \\ m < 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < m \leq 5 \\ \begin{cases} m \leq 1 \\ m \geq 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < m \\ m \leq 1 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $m > \frac{7}{3}$ suy ra $m > 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $m > 3$ thỏa mãn phương trình (1) có ít nhất một nghiệm không âm.

4. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \Delta' = (m-1)^2 - (m-3)(m-5) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m > \frac{7}{3} \end{cases}$$

Khi đó theo Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m-3} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-5}{m-3} \end{cases}$

a. $x_1 \cdot x_2 \leq 2$

$$\Leftrightarrow \frac{m-5}{m-3} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{m-5-2(m-3)}{m-3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-m}{m-3} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m \leq 1 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $m > \frac{7}{3}, m \neq 3$ suy ra $m > 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b. $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 39 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 39$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2(m-1)}{m-3} \right)^2 - 3 \cdot \frac{m-5}{m-3} = 39$$

$$\Leftrightarrow 4(m^2 - 2m + 1) - 3(m-5)(m-3) - 39(m-3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 38m^2 - 250m + 392 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-4).(19m-49)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-4=0 \\ 19m-49=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=4 \\ m=\frac{49}{19} \end{cases} \quad (TM).$$

c. $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$

$$\Leftrightarrow \frac{2.(m-1)}{m-3} = \frac{2.(m-5)}{m-3}$$

$$\Leftrightarrow m-1 = m-5$$

$$\Leftrightarrow -1 = -5 \quad (\text{vô lí})$$

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

d. Vì x_1 là một nghiệm của phương trình nên thay x_1 vào phương trình ta có:

$$(m-3)x_1^2 - 2.(m-1)x_1 + m-5 = 0. \quad (2)$$

Theo đề bài : $(m-3)x_1^2 + 2.(m-1)x_2 + m-5 = \frac{1}{(m-3)}. \quad (3)$

Lấy (3) - (2) ta có:

$$2.(m-1).(x_1 + x_2) = \frac{1}{(m-3)}$$

$$\Leftrightarrow 2.(m-1). \frac{2.(m-1)}{m-3} = \frac{1}{(m-3)}$$

$$\Leftrightarrow 4.(m-1)^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 = \frac{1}{2} \\ m-1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $m > \frac{7}{3}, m \neq 3$ suy ra không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 37. Cho phương trình $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$ (1) (với m là tham số thực)

1. Giải phương trình (1) khi $m = 3$.

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

2. Tìm giá trị của m để (1) có nghiệm duy nhất.
3. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng mang giá trị âm.
4. Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho:
 - a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = m^2 + \frac{2}{m}$.
 - b) $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 - 4$.
 - c) $(m-1)x_1^2 + 2(m+1)x_2 + m = 4$.
 - d) $|x_1 - x_2| \geq 2$.
 - e) $x_1 > x_2 > 2$.
 - f) $[(m-1)x_1^2 + 2(m+1)x_2 + m](m-2) \geq 0$.
5. Tồn tại hay không hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm độc lập với m (trường hợp phương trình có hai nghiệm phân biệt).
6. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để có các nghiệm (1) đều là số nguyên.

Giải

1. Giải phương trình (1) khi $m=3$.

Thay $m=3$ vào phương trình (1) ta được :

$$(3-1)x^2 - 2(3+1)x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 3 = 0 \quad (2)$$

Phương trình (2) là phương trình bậc hai có $a=2$, $b'=-4$, $c=3$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-4)^2 - 2 \cdot 3 = 16 - 6 = 10$$

Do $\Delta' = 10 > 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{4 - \sqrt{10}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{4 + \sqrt{10}}{2}$$

Vậy với $m=3$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = \frac{4 - \sqrt{10}}{2}$; $x_2 = \frac{4 + \sqrt{10}}{2}$.

2. Tìm giá trị của m để (1) có nghiệm duy nhất.

$$(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m = 0 \quad (1)$$

+ Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ phương trình (1) trở thành

$$-4x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

+ Nếu $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ phương trình (1) là phương trình bậc hai có:

$$\begin{aligned}\Delta' &= b'^2 - ac = [- (m+1)]^2 - (m-1).m \\ &= m^2 + 2m + 1 - m^2 + m \\ &= 3m + 1\end{aligned}$$

Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$ thì phương trình (1) có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a} = \frac{m+1}{m-1} = \frac{-\frac{1}{3}+1}{-\frac{1}{3}-1} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $m = 1$; $m = -\frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

3. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng mang giá trị âm.

+ Với $m \neq 1$ phương trình (1) là phương trình bậc hai có:

$$\Delta' = 3m + 1$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 3m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{3}$

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có} \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2(m+1)}{m-1} & (3) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m}{m-1} & (4) \end{cases}$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng mang giá trị âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 1 > 0 \\ \frac{2(m+1)}{m-1} < 0 \\ \frac{m}{m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{3} \\ \frac{2(m+1)}{m-1} < 0 \\ \frac{m}{m-1} > 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{Giải (5) ta có } \frac{2(m+1)}{m-1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ m-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 1$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\text{Giải (6) ta có } \frac{m}{m-1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m-1 > 0 \\ m < 0 \\ m-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > 1 \\ m < 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$$

Kết hợp các điều kiện ta được $-\frac{1}{3} < m < 0$

Vậy với $-\frac{1}{3} < m < 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng mang giá trị âm.

4. Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho:

Với $m > -\frac{1}{3}; m \neq 1$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2(m+1)}{m-1} & (3) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m}{m-1} & (4) \end{cases}$$

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = m^2 + \frac{2}{m}.$

Điều kiện: $m \neq 0$

$$\text{Ta có } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = m^2 + \frac{2}{m} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = m^2 + \frac{2}{m} \quad (*)$$

$$\text{Thay (3); (4) vào (*) ta được } \frac{\frac{2(m+1)}{m-1}}{\frac{m}{m-1}} = m^2 + \frac{2}{m} \Leftrightarrow \frac{2(m+1)}{m} = m^2 + \frac{2}{m}$$

$$\Rightarrow 2m + 2 = m^3 + 2 \Leftrightarrow m^3 - 2m = 0 \Leftrightarrow m(m^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \sqrt{2} \\ m = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $m > -\frac{1}{3}; m \neq 1; m \neq 0$ ta được $m = \sqrt{2}$

Vậy $m = \sqrt{2}$ là giá trị cần tìm.

b) $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 - 4.$

$$\Leftrightarrow \frac{2(m+1)}{m-1} = \frac{m}{m-1} - 4$$

$$\Rightarrow 2(m+1) = m - 4(m-1)$$

$$\Leftrightarrow 5m = 2 \Leftrightarrow m = \frac{2}{5} \text{ (tm)}$$

Vậy $m = \frac{2}{5}$ là giá trị cần tìm.

c) $(m-1)x_1^2 + 2(m+1)x_2 + m = 4 \quad (**).$

Với x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên ta có

$$(m-1)x_1^2 - 2(m+1)x_1 + m = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)x_1^2 + m = 2(m+1)x_1 \quad (7)$$

Thay (7) vào (**) ta được $2(m+1)x_1 + 2(m+1)x_2 = 4$

$$\Leftrightarrow 2(m+1)(x_1 + x_2) = 4$$

$$\Leftrightarrow 2(m+1) \cdot \frac{2(m+1)}{m-1} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m+1)^2}{m-1} = 1$$

$$\Rightarrow (m+1)^2 = m-1$$

$$\Leftrightarrow m^2 + m + 2 = 0$$

Phương trình có $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.2 = -7 < 0$

Do đó phương trình vô nghiệm

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn bài toán.

d) $|x_1 - x_2| \geq 2$

Ta có $|x_1 - x_2| \geq 2$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{2(m+1)}{m-1} \right]^2 - 4 \frac{m}{m-1} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m+1)^2}{(m-1)^2} - \frac{m(m-1)}{(m-1)^2} \geq \frac{(m-1)^2}{(m-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m+1)^2 - m(m-1) - (m-1)^2}{(m-1)^2} \geq 0$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\Leftrightarrow \frac{m(5-m)}{(m-1)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m(5-m) \geq 0 \quad (\text{vì } (m-1)^2 > 0 \text{ với } m \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ 5-m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 5$$

Kết hợp với điều kiện $m > \frac{-1}{3}$; $m \neq 1$ ta được $0 \leq m \leq 5$, $m \neq 1$.

Vậy $0 \leq m \leq 5$, $m \neq 1$.

e) $x_1 > x_2 > 2$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 > x_2 > 2$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \\ (x_1 - 2) + (x_2 - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \\ x_1 + x_2 > 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m}{m-1} - \frac{4(m+1)}{m-1} + 4 > 0 \\ \frac{2(m+1)}{m-1} > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-8}{m-1} > 0 \\ \frac{2(3-m)}{m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-8}{m-1} > 0 \\ \frac{2(3-m)}{m-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 8 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 3$$

Kết hợp với điều kiện $m > \frac{-1}{3}$; $m \neq 1$ suy ra không có giá trị nào của m thỏa mãn bài toán.

f) $[(m-1)x_1^2 + 2(m+1)x_2 + m](m-2) \geq 0$ (***)

Với x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên ta có

$$(m-1)x_1^2 - 2(m+1)x_1 + m = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-1)x_1^2 + m = 2(m+1)x_1 \quad (7)$$

Thay (7) vào (***) ta có

$$[2(m+1)x_1 + 2(m+1)x_2](m-2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(m+1)(x_1 + x_2)(m-2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(m+1) \frac{2(m+1)}{m-1} (m-2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(m+1)^2 (m-2)}{m-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-2}{m-1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \geq 0 \\ m-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \leq 0 \\ m-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m < 1 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $m > \frac{-1}{3}$; $m \neq 1$ ta được $\begin{cases} m \geq 2 \\ \frac{-1}{3} < m < 1 \end{cases}$.

Vậy $\begin{cases} m \geq 2 \\ \frac{-1}{3} < m < 1 \end{cases}$.

5. Tồn tại hay không hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm độc lập với m (trường hợp phương trình có hai nghiệm phân biệt).

Với $m > \frac{-1}{3}$; $m \neq 1$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2(m+1)}{m-1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m}{m-1} \end{cases}$

Ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{m-1} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m-1} + \frac{2}{m-1} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_1 x_2 + \frac{2}{m-1} \\ x_1 x_2 = 1 + \frac{1}{m-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_1 x_2 + \frac{2}{m-1} \\ 2(x_1 x_2 - 1) = \frac{2}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_1 x_2 + 2(x_1 x_2 - 1) \\ 2(x_1 x_2 - 1) = \frac{2}{m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 4x_1 x_2 - 2 \\ 2(x_1 x_2 - 1) = \frac{2}{m-1} \end{cases}$$

Vậy ta có hệ thức $x_1 + x_2 = 4x_1 x_2 - 2$ là hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm độc lập với m .

6. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để có các nghiệm (1) đều là số nguyên.

Theo câu 2) ta có

+ Nếu $m=1$ phương trình (1) có nghiệm $x = \frac{1}{4}$ (loại)

+ Nếu $m \neq 1$ phương trình (1) là phương trình bậc hai có: $\Delta' = 3m+1$

Với $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 3m+1=0 \Leftrightarrow m = \frac{-1}{3}$ thì phương trình (1) có nghiệm kép:

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a} = \frac{m+1}{m-1} = \frac{\frac{-1}{3} + 1}{\frac{-1}{3} - 1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{-4}{3}} = \frac{-1}{2} \quad (\text{loại})$$

+ Với $m > \frac{-1}{3}$; $m \neq 1$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

Áp dụng hệ thức Vi-ét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2(m+1)}{m-1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m}{m-1} \end{cases}$$

Phương trình (1) có các nghiệm x_1 ; x_2 đều là số nguyên thì x_1 ; x_2 thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2(m+1)}{m-1} \in \mathbb{Z} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m}{m-1} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \frac{4}{m-1} \in \mathbb{Z} \\ 1 + \frac{1}{m-1} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{m-1} \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{m-1} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \frac{4}{m-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m-1 \text{ là Ư}(4) \Leftrightarrow m-1 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\} \quad (8)$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{m-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m-1 \text{ là Ư}(1) \Leftrightarrow m-1 \in \{\pm 1\} \quad (9)$$

Từ (8) và (9) ta có $m-1 \in \{\pm 1\}$ khi đó ta có

$$m-1 = -1 \Leftrightarrow m = 0$$

$$m-1 = 1 \Leftrightarrow m = 2$$

- Thay $m = 0$ vào phương trình (1) ta được :

$$(0-1)x^2 - 2(0+1)x + 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow -x(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy với $m = 0$ phương trình (1) có hai nghiệm là số nguyên.

- Thay $m = 2$ vào phương trình (1) ta được :

$$(2-1)x^2 - 2(2+1)x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 2 = 0 \quad (2)$$

Phương trình (2) là phương trình bậc hai có $a = 1$, $b' = -3$, $c = 2$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-3)^2 - 1 \cdot 2 = 9 - 2 = 7$$

Do $\Delta' = 7 > 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{3 - \sqrt{7}}{1} = 3 - \sqrt{7}$$

$$x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{3 + \sqrt{7}}{1} = 3 + \sqrt{7}$$

Vậy với $m = 2$ phương trình (1) có hai nghiệm không là số nguyên.

Kết hợp với điều kiện $m > \frac{-1}{3}$; $m \neq 1$ ta được $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Bài 38. Cho phương trình $(m+1)x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (1) với m là tham số thực

- 1) Giải phương trình (1) với $m = 4$
- 2) Tìm giá trị của m để (1) có nghiệm bằng 2. Tìm nghiệm còn lại.
- 3) Tìm m để (1) không tồn tại nghiệm bằng 3.
- 4) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.
- 5) Xác định m để (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{9m}{m-1}$

b) $x_1 + x_2 + x_1x_2 = m^3 - 7$

c) $(m+1)x_2^2 + 2x_1 + m \leq 2$

d) Biểu thức $P = \Delta(x_1 + x_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất, lớn nhất (nếu có)

e) $(m+1)x_1^2 + 2x_2 + m - 1 = \left(\frac{5m-2}{m+1}\right)^2$

- 6) Tìm m để (1) có ít nhất một nghiệm không âm
- 7) Tìm giá trị của m để (1) có hai nghiệm phân biệt cùng nhỏ hơn 2
- 8) Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để (1) có các nghiệm đều là số nguyên.

Giải

1) Với $m = 4$ thay vào pt (1) ta được: $5x^2 - 2x + 3 = 0$

Vì $\Delta' = (-1)^2 - 5.3 = -14 < 0$, nên phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình (1) vô nghiệm với $m = 4$

2) Vì pt (1) có nghiệm bằng 2, thay $x = 2$ vào pt (1) ta được

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$(m+1).2^2 - 2.2 + m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m + 4 - 4 + m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{5}$$

Do pt có hai nghiệm. Theo định lí Viét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{2}{m+1}$

do $x = x_1 = 2$ và $m = \frac{1}{5}$, Suy ra nghiệm còn lại là $x_2 = -\frac{1}{3}$

Vậy $m = \frac{1}{5}$ và nghiệm còn lại là $x_2 = -\frac{1}{3}$

3) Để $x = 3$ không phải là nghiệm của phương trình (1)

$$\Leftrightarrow (m+1).3^2 - 2.3 + m - 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 9m + 9 - 6 + m - 1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 10m + 2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{5}$$

Vậy $m \neq -\frac{1}{5}$ thì phương trình (1) không có nghiệm $x = 3$.

4) Xét pt: $(m+1)x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (1)

Ta có: $\Delta' = (-1)^2 - (m+1)(m-1) = 2 - m^2$

Để pt (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ 2 - m^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ -\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2} \end{cases}$

Vậy $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}, m \neq -1$ thì phương trình (1) có nghiệm.

5) Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ 2 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \end{cases} \quad (*)$$

Theo định lí Viét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2}{m+1} \\ x_1 x_2 = \frac{m-1}{m+1} \end{cases} \quad (I)$$

a) Bài ra: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{9m}{m-1} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{9m}{m-1} \quad (m \neq 1)$

Theo (I) ta có:

$$\frac{2}{m+1} : \frac{m-1}{m+1} = \frac{9m}{m-1} \Leftrightarrow \frac{2}{m-1} = \frac{9m}{m-1} \Leftrightarrow 9m = 2 \Leftrightarrow m = \frac{2}{9} \text{ (thỏa mãn ĐK)}$$

Vậy $m = \frac{2}{9}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{9m}{m-1}$

b) Bài ra: $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = m^3 - 7$

Theo (I) ta có: $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = m^3 - 7 \Leftrightarrow \frac{2}{m+1} + \frac{m-1}{m+1} = m^3 - 7$

$$\Leftrightarrow 1 = m^3 - 7 \Leftrightarrow m^3 = 8 \Leftrightarrow m = 2 \text{ (không thỏa mãn ĐK (*))}$$

Vậy không có giá trị của m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1 + x_2 + x_1 x_2 = m^3 - 7$$

c) Bài ra: $(m+1)x_2^2 + 2x_1 + m \leq 2$

vì x_2 là nghiệm của phương trình nên ta có: $(m+1)x_2^2 - 2x_2 + m - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (m+1)x_2^2 + m = 2x_2 + 1$$

Khi đó: $(m+1)x_2^2 + 2x_1 + m \leq 2 \Leftrightarrow 2x_2 + 1 + 2x_1 \leq 2$

$$\Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) \leq 1$$

Theo (I) ta có: $2 \cdot \frac{2}{m+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4}{m+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3-m}{m+1} \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được: $-1 < m \leq \sqrt{2}$

Vậy $-1 < m \leq \sqrt{2}$ thì (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(m+1)x_2^2 + 2x_1 + m \leq 2$

d) Xét biểu thức $P = \Delta(x_1 + x_2) = \frac{2 \cdot (2 - m^2)}{m+1} = \frac{4 - 2m^2}{m+1}$ với $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}, m \neq -1$

Ta có: $P = \frac{4 - 2m^2}{m+1} \Leftrightarrow P(m+1) = 4 - 2m^2 \Leftrightarrow 2m^2 + Pm + P - 4 = 0$

Tính $\Delta = P^2 - 8(P - 4) = P^2 - 8P + 16 + 16 = (P - 4)^2 + 16 > 0 \forall P$

=> Biểu thức P không có GTNN; GTLN.

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

e) Bài ra: $(m+1)x_1^2 + 2x_2 + m - 1 = \left(\frac{5m-2}{m+1}\right)^2$

vì x_1 là nghiệm của phương trình nên ta có: $(m+1)x_1^2 - 2x_1 + m - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (m+1)x_1^2 + m = 2x_1 + 1$$

Khi đó: $(m+1)x_1^2 + 2x_2 + m - 1 = \left(\frac{5m-2}{m+1}\right)^2$

$$\Leftrightarrow 2x_1 + 1 + 2x_2 - 1 = \left(\frac{5m-2}{m+1}\right)^2 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) = \left(\frac{5m-2}{m+1}\right)^2$$

Theo (I) ta có: $2 \cdot \frac{2}{m+1} = \left(\frac{5m-2}{m+1}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{4}{m+1} = \frac{(5m-2)^2}{(m+1)^2}$

$$\Leftrightarrow 4(m+1) = (5m-2)^2 \Leftrightarrow 4m+4 = 25m^2 - 20m + 4$$

$$\Leftrightarrow 25m^2 - 24m = 0 \Leftrightarrow m(25m - 24) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=\frac{24}{25} \text{ thỏa mãn điều kiện (*)} \end{cases}$$

Vậy $m \in \left\{0; \frac{24}{25}\right\}$ thì (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$(m+1)x_1^2 + 2x_2 + m - 1 = \left(\frac{5m-2}{m+1}\right)^2$$

6) Tìm m để $(m+1)x^2 - 2x + m - 1 = 0$ (1) có ít nhất một nghiệm không âm

+ Với $m = -1$ thì pt (1) có dạng $-2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ (không thỏa mãn)

+ Với $m \neq -1$.

TH1: Phương trình (1) có một nghiệm $x=0 \Leftrightarrow m-1=0 \Leftrightarrow m=1$

TH2: Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0$

$$\Leftrightarrow (m+1)(m-1) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$$

$$\text{TH3: Phương trình (1) có hai nghiệm cùng dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m^2 > 0 \\ \frac{2}{m+1} > 0 \\ \frac{m-1}{m+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \\ m > -1 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \sqrt{2}$$

Kết hợp lại ta có $-1 < m \leq 1$ hoặc $1 < m < \sqrt{2}$ thì (1) có ít nhất một nghiệm không âm

7) Tìm giá trị của m để (1) có hai nghiệm phân biệt cùng nhỏ hơn 2

Để (1) có hai nghiệm phân biệt cùng nhỏ hơn 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ x_1 < 2; x_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 2 - m^2 > 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \\ x_1 + x_2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \\ x_1 + x_2 < 4 \end{cases}$$

Thay (I) vào $x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$ ta có:

$$\frac{m-1}{m+1} - 2 \cdot \frac{2}{m+1} + 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{m-1-4+4(m+1)}{m+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{5m-1}{m+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{5} \\ m < -1 \end{cases}, \text{ Kết hợp với } \begin{cases} m \neq -1 \\ -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < m < -1 \\ \frac{1}{5} < m < \sqrt{2} \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 < 4 \Leftrightarrow \frac{2}{m+1} < 4 \Leftrightarrow \frac{4m+2}{m+1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{1}{2} \\ m < -1 \end{cases}$$

Vậy với

Cách 2:

Đặt $x = 2 - t$. Khi đó pt (1) có dạng $(m+1)(2-t)^2 - 2(2-t) + m-1 = 0$

$$\Leftrightarrow (m+1)t^2 - 2(2m+1)t + 5m-1 = 0 \quad (2)$$

Ta có: $\Delta'_t = 2 - m^2$

Để pt(1) có hai nghiệm phân biệt cùng nhỏ hơn 2

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$\Leftrightarrow$ pt(2) có hai nghiệm phân biệt cùng dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta'_t > 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ 2 - m^2 > 0 \\ \frac{2(2m+1)}{m+1} > 0 \\ \frac{5m-1}{m+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} \\ \begin{cases} m < -1 \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} m < -1 \\ m > \frac{1}{5} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} < m < -1 \\ \frac{1}{5} < m < \sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy $-\sqrt{2} < m < -1$ hoặc $\frac{1}{5} < m < \sqrt{2}$ pt (1) có hai nghiệm phân biệt cùng nhỏ hơn 2

8) Tìm tất cả các giá trị nguyên của m để (1) có các nghiệm đều là số nguyên.

Ta có: $\Delta = 2 - m^2$

(1) có các nghiệm đều là số nguyên thì Δ' viết dưới dạng bình phương của một số nguyên

Mà $2 - m^2 \leq 2 \forall m$ nên để pt (1) có các nghiệm đều là số nguyên với mọi giá trị nguyên của m

$$\Leftrightarrow \Delta \in \{0; 1\}$$

Với $\Delta = 0$ thì $2 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m \in \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ không thỏa mãn $m \in \mathbb{Z}$

Với $\Delta = 1$ thì $2 - m^2 = 1 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m \in \{-1; 1\}$

Thử lại:

+ Với $m = -1$ pt (1) có nghiệm $x = -1$

+ Với $m = 1$ pt (1) có nghiệm $x = 0$ hoặc $x = 2$

Vậy với $m \in \{-1; 1\}$ (1) có các nghiệm đều là số nguyên.

Bài 39. Cho phương trình $(m+1)x^2 - 2(m+1)x + 2m - 1 = 0$ (1); Với m là tham số thực

1. Giải phương trình với $m = 5$

2. Xác định m để (1) có một nghiệm bằng 2, tính nghiệm còn lại.

3. Giải và biện luận phương trình (1) theo tham số m .

4. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

5. xác định giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn :

$$a) x_1 + x_2 - \frac{2}{3}x_1x_2 = 6$$

$$b) x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = \frac{6}{m+1}$$

$$c) x_1^3x_2^3 + 3(x_1^2 + x_2^2) + 8x_1x_2 \leq 15$$

$$d) x_1x_2(x_1 + x_2) = 4$$

$$e) (m+1)x_1^2 + 2(m+1)x_2^2 + 2(m-1) = 0$$

Giải

1. Giải phương trình với $m = 5$

Với $m = 5$, thay vào ta được: $6x^2 - 12x + 9 = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta' = (-2)^2 - 2.3 = -2 < 0. \text{ Nên pt vô nghiệm.}$$

2. Xác định m để (1) có một nghiệm bằng 2, tính nghiệm còn lại.

pt(1) có một nghiệm bằng 2, thay $x = 2$ vào pt(1) ta được :

$$(m+1)2^2 - 2(m+1)2 + 2m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)4 - 4(m+1) + 2m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\text{Với } m = \frac{1}{2}: (1) \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{3}{2}x - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm còn lại là $x = 0$

3. Giải và biện luận phương trình (1) theo tham số m .

Nếu $m = -1$: (1) $\Leftrightarrow -3 = 0$ (vô lí). phương trình (1) vô nghiệm.

Nếu $m \neq -1$: phương trình (1) là pt bậc hai:

$$(m+1)x^2 - 2(m+1)x + 2m - 1 = 0 \quad (1)$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\begin{aligned}\Delta' &= [- (m+1)]^2 - (m+1)(2m-1) \\ &= m^2 + 2m + 1 - 2m^2 - m + 1 \\ &= -m^2 + m + 2 \\ &= (m+1)(2-m)\end{aligned}$$

Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow (m+1)(2-m) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$ phương trình (1) vô nghiệm.

Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow (m+1)(2-m) = 0 \Leftrightarrow m = 2$ (vì : $m \neq -1$) phương trình (1) có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = 1$$

Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+1)(2-m) > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 2$. phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt .

$$x_1 = \frac{m+1 + \sqrt{(m+1)(2-m)}}{m+1}; x_2 = \frac{m+1 - \sqrt{(m+1)(2-m)}}{m+1}$$

4. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

Điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu:

$$a.c < 0 \Leftrightarrow (m+1)(2m-1) < 0$$

$$\Leftrightarrow -1 < m < \frac{1}{2}$$

Vậy với $-1 < m < \frac{1}{2}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.

5. Xác định giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn :

Với $-1 < m \leq 2$: phương trình (1) có 2 nghiệm .

$$\text{Theo hệ thức vi-et có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{2m-1}{m+1} \end{cases}$$

$$\text{a) } x_1 + x_2 - \frac{2}{3} x_1 x_2 = 6 \Leftrightarrow 2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2m-1}{m+1} = 6$$

$$\Rightarrow 2.3(m+1) - 2(2m-1) = 6.3(m+1)$$

$$\Leftrightarrow 6m + 6 - 4m + 2 = 18m + 18$$

$$\Leftrightarrow 16m = -10$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{5}{8} \text{ (TM } -1 < m \leq 2 \text{)}$$

$$\text{b) } x_1 + x_2 - 3x_1 x_2 = \frac{6}{m+1} \Leftrightarrow 2 - 3 \frac{2m-1}{m+1} = \frac{6}{m+1}$$

$$\Rightarrow 2(m+1) - 3(2m-1) = 6$$

$$\Leftrightarrow 2m + 2 - 6m + 3 = 6$$

$$\Leftrightarrow -4m = 1$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{4} \text{ (TM - } 1 < m \leq 2 \text{)}$$

$$\text{c) } x_1^3 x_2^3 + 3(x_1^2 + x_2^2) + 8x_1 x_2 \leq 15 \Leftrightarrow (x_1 x_2)^3 + 3[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] + 8x_1 x_2 \leq 15$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2m-1}{m+1}\right)^3 + 3\left[2^2 - 2\frac{2m-1}{m+1}\right] + 8\frac{2m-1}{m+1} \leq 15$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2m-1}{m+1}\right)^3 + 12 - 6\frac{2m-1}{m+1} + 8\frac{2m-1}{m+1} \leq 15$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2m-1}{m+1}\right)^3 + 2\frac{2m-1}{m+1} - 3 \leq 0 \text{ (2)}$$

$$\text{Đặt : } \frac{2m-1}{m+1} = k \quad (2) \Leftrightarrow k^3 + 2k - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (k-1)(k^2 + k + 3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow k-1 \leq 0 \text{ (vì } k^2 + k + 3 > 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow k \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{2m-1}{m+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2m-1}{m+1} - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m-1-m-1}{m+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-2}{m+1} \leq 0$$

$$-1 < m \leq 2 \text{ (Thỏa mãn điều kiện có nghiệm)}$$

$$\text{d) } x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 4 \Leftrightarrow \frac{2m-1}{m+1} 2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m-1}{m+1} = 2$$

$$\Rightarrow 2m-1 = 2(m+1)$$

$$\Leftrightarrow -1 = 2 \text{ (Vô lí)}$$

Không tìm được giá trị m nào thỏa mãn bài toán.

$$\text{e) } (m+1)x_1^2 + 2(m+1)x_2 + 2(m-1) = 0 \quad (*)$$

Vì x_1 là một nghiệm của phương trình (1) nên ta có :

$$(m+1)x_1^2 - 2(m+1)x_1 + 2m-1 = 0 \Leftrightarrow (m+1)x_1^2 + 2m-1 = 2(m+1)x_1$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\text{Ta có : } (*) \Leftrightarrow (m+1)x_1^2 + 2m - 1 + 2(m+1)x_2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2(m+1)x_1 + 2(m+1)x_2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(m+1)(x_1 + x_2) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2(m+1) \frac{2m-1}{m+1} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2(2m-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2m-1 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2m = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{3}{4} \text{ (TM - } 1 < m \leq 2 \text{)}.$$

Bài 40.

Cho phương trình: $(m+2)x^2 - 2mx - 1 = 0$ (1) với m là tham số thực.

1. Giải phương trình (1) khi $m = 3$.
2. Tìm m để phương trình đã cho có một nghiệm bằng 2.
3. Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất?
4. Khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ hãy tìm m để:

$$\text{a) } x_1 + x_2 - 4x_1x_2 = \frac{5}{m+2}$$

$$\text{b) } x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 = -\frac{8}{9}$$

$$\text{c) } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{2m}{m^3+1}$$

$$\text{d) } (m+2)x_1^2 + 2(mx_2 - 1) = 0.$$

$$\text{e) } x_1 < 4 < x_2$$

5. Xác định m để phương trình (1) có ít nhất một nghiệm nhỏ hơn 1.
6. Xác định m để phương trình (1) có các nghiệm đều nguyên.

Giải

1. Với $m = 3$ thay vào phương trình ta được $5x^2 - 6x - 1 = 0$

$$\text{Ta có: } \Delta' = (-3)^2 - 4.5.(-1) = 29 > 0$$

Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{3+\sqrt{29}}{5}; x_2 = \frac{3-\sqrt{29}}{5}$

2. TH1: Nếu $m = -2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -2mx - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (KTM)

TH2: Nếu $m \neq -2$ để phương trình có một nghiệm bằng 2 thì: $(m+2)x^2 - 2mx - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (m+2).2^2 - 2m.2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m + 8 - 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow 7 = 0 \text{ (vô lý)}$$

Vậy không tồn tại giá trị của m để phương trình (1) có một nghiệm bằng 2.

3. Để phương trình (1) có nghiệm duy nhất thì: $m = -2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -2mx - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Vậy $m = -2$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

4. Để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thì: $m+2 \neq 0$ và $\Delta' > 0$

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - (m+2).(-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{ (luôn đúng). Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt với } m \neq -2.$$

a) ĐK: $m \neq -2$

Theo Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m+2} \\ x_1 x_2 = \frac{-1}{m+2} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 - 4x_1 x_2 = \frac{5}{m+2} \Leftrightarrow \frac{2m}{m+2} + \frac{4}{m+2} = \frac{5}{m+2}$$

$$\Leftrightarrow 2m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \text{ (TM)}$$

Vậy $m = \frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

b) ĐK: $m \neq -2$

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 x_2 = -\frac{8}{9} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 4x_1 x_2 = -\frac{8}{9} \text{ (*)}$

Theo Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m+2} \\ x_1 x_2 = \frac{-1}{m+2} \end{cases}$$

$$\text{(*)} \Leftrightarrow \left(\frac{2m}{m+2}\right)^2 - \frac{4}{m+2} + \frac{8}{9} = 0 \Leftrightarrow 36m^2 - 36(m+2) + 8(m+2)^2 = 0$$

$$(\Leftrightarrow 44m^2 - 4m - 40 = 0 \Leftrightarrow 11m^2 - m - 10 = 0$$

$$(\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{10}{11} \end{cases} \text{ (Do: } a+b+c=0 \text{)})$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Vậy $\begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-10}{11} \end{cases}$ thỏa mãn điều kiện có 2 nghiệm phân biệt.

c) ĐK: $\begin{cases} x_1 x_2 \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1}{m+2} \neq 0 \\ m \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq -1 \end{cases}$

Ta có: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{2m}{m^3+1} \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1 x_2} + \frac{2m}{m^3+1} = 0 \quad (**)$

Theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m+2} \\ x_1 x_2 = \frac{-1}{m+2} \end{cases} \Rightarrow (**)\Leftrightarrow -2m + \frac{2m}{m^3+1} = 0$

$\Leftrightarrow -2m^4 - 2m + 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \quad (TM)$

Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

d) ĐK: $m \neq -2$

Vì: $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình (1) nên:

$\begin{cases} (m+2)x_1^2 - 2mx_1 - 1 = 0 \\ (m+2)x_2^2 - 2mx_2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)x_1^2 = 2mx_1 + 1 \\ (m+2)x_2^2 = 2mx_2 + 1 \end{cases}$

Thay vào biểu thức $(m+2)x_1^2 + 2(mx_2 - 1) = 0$ ta được: $2mx_1 + 1 + 2(mx_2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2mx_1 + 1 + 2mx_2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2m(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow 2m\left(\frac{2m}{m+2}\right) = 1 \Leftrightarrow 4m^2 = m + 2$

$\Leftrightarrow 4m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \\ m = \frac{1-\sqrt{33}}{8} \end{cases} \quad (TM)$

Vậy $\begin{cases} m = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \\ m = \frac{1-\sqrt{33}}{8} \end{cases}$ thỏa mãn yêu cầu có nghiệm.

e) ĐK: $m \neq -2$

Ta có: $\Delta' = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ Vậy phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Đặt: $y = x - 4 \Rightarrow x = y + 4 \Rightarrow$ phương trình (1) trở thành:

$(m+2)(y+4)^2 - 2m(y+4) - 1 = 0 \Leftrightarrow (m+2)(y^2 + 8y + 16) - 2my + 8m - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (m+2)y^2 + 2(3m+8)y + 8m + 31 = 0 \quad (***)$

$$\text{Mà: } x_1 < 4 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 4 < 0 < x_2 - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 4 < 0 \\ x_2 - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1 - 4)(x_2 - 4) < 0$$

Suy ra phương trình (***) có 2 nghiệm trái dấu.

$$\text{Hay: } (m+2)(8m+31) < 0 \Leftrightarrow \frac{-31}{8} < m < -2.$$

Vậy $\frac{-31}{8} < m < -2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

$$\text{5. TH1: Nếu } m = -2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -2m \cdot x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (TM)}$$

TH2: Nếu $m \neq -2$

Đặt: $y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1 \Rightarrow$ phương trình (1) trở thành:

$$\begin{aligned} (m+2)(y+1)^2 - 2m(y+1) - 1 &= 0 \Leftrightarrow (m+2)(y^2 + 2y + 1) - 2my - 2m - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (m+2)y^2 + 4y - m + 1 = 0 \text{ (***)} \end{aligned}$$

Để phương trình có ít nhất một nghiệm < 1 thì: $\begin{cases} x_1 - 1 < 0 \\ x_2 - 1 < 0 \end{cases}$

$$\text{Hay phương trình (***) có một nghiệm âm} \Leftrightarrow (m+2)(-m+1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 1 \end{cases}$$

Vậy $\begin{cases} m \leq -2 \\ m > 1 \end{cases}$ thì phương trình (1) có ít nhất một nghiệm < 1 .

6. Xác định m để phương trình (1) có các nghiệm đều nguyên.

$$\text{6. TH1: Nếu } m = -2 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow -2m \cdot x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (KTM)}$$

TH2: Nếu $m \neq -2$ để phương trình (1) có các nghiệm đều nguyên thì: $\begin{cases} x_1 + x_2 \in \mathbb{Z} \\ x_1 x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2m}{m+2} \in \mathbb{Z} \\ \frac{-1}{m+2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2m+4-4}{m+2} \in \mathbb{Z} \\ \frac{-1}{m+2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + \frac{-4}{m+2} \in \mathbb{Z} \\ \frac{-1}{m+2} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4 : m+2 \\ -1 : m+2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 : m+2 \Leftrightarrow m+2 = \pm 1 \Leftrightarrow m = -1; m = -3$$

Thử lại $m = \{-1; -3\}$ (KTM). Vậy không tồn tại giá trị của m để thỏa mãn yêu cầu.

Bài 41. Cho phương trình: $mx^2 - 2(m-3)x + m - 4 = 0$ (1) m là tham số thực.

1. Giải phương trình (1) với $m = 4$.

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

2. Tìm m để phương trình có một nghiệm bằng 3. Tính nghiệm còn lại.
3. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu.
4. Xác định m để phương trình có ít nhất một nghiệm không dương.
5. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:
 - a) $x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = \frac{5}{m}$
 - b) $x_1 > 2; x_2 > 2$.
 - c) $mx_1^2 + 2(m-3)x_2 + m - 5 \leq 0$
 - d) $x_1^3 + x_2^3 + 4x_1 + 4x_2 + x_1x_2 = \frac{-1}{3}$
6. Khi (1) có hai nghiệm phân biệt, hãy thiết lập hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm độc lập với m .

Giải

1. Thay $m = 4$ vào phương trình (1) ta có:

$$4x^2 - 2(4-3)x + 4 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{2}$$

Vậy phương trình (1) có các nghiệm $x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{2}$

2. TH1: $m = 0$ phương trình (1) trở thành: $6x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3} (KTM)$$

TH2: $m \neq 0$ phương trình (1) có nghiệm bằng 3 khi:

$$m \cdot 3^2 - 2(m-3) \cdot 3 + m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9m - 6m + 18 + m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m + 14 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-7}{2}$$

Gọi 2 nghiệm của phương trình (1) là x_1, x_2 trong đó $x_1 = 3$ theo Viet ta có:

$$x_1 + x_2 = \frac{2(m-3)}{m} (*) ; x_1x_2 = \frac{m-4}{m} (**)$$

$$\text{Thay } m = \frac{-7}{2}; x_1 = 3 \text{ vào } (**) \text{ ta có: } 3x_2 = \frac{\frac{-7}{2} - 4}{\frac{-7}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 3x_2 = \frac{-15}{2} \cdot \frac{2}{-7}$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{5}{7}$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $\frac{-7}{2}$. Nghiệm còn lại là $\frac{5}{7}$

$$3. \text{ Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu } \Leftrightarrow \begin{cases} a.c < 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m(m-4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

4. Xác định m để phương trình có ít nhất một nghiệm không dương.

TH1: $m=0$ phương trình (1) có nghiệm $x = \frac{2}{3}$ (KTM)

TH2: $m \neq 0$

. Phương trình (1) có nghiệm bằng 0 khi:

$$m.0^2 - 2(m-3).0 + m-4 = 0 \Leftrightarrow m-4=0 \Leftrightarrow m=4$$

Phương trình (1) có ít nhất một nghiệm âm $\Leftrightarrow$ Phương trình có 1 nghiệm âm (hai nghiệm trái dấu) hoặc phương trình có hai nghiệm đều âm.

. Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 0 < m < 4$

$$\text{.Phương trình (1) có hai nghiệm đều âm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 0 \end{cases}$$

$$\Delta = [-(m-3)]^2 - m(m-4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 - m^2 + 4m \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2m + 9 \geq 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{9}{2}$$

$$x_1 x_2 = \frac{m-4}{m} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m-4 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2(m-3)}{m} < 0 \Leftrightarrow \frac{m-3}{m} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 > 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < 0 \end{cases} \text{ (vô lý)} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 < 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 3 \quad (4)$$

Kết hợp các điều kiện $m \neq 0$; (2); (3) và (4) $\Rightarrow$ Không tồn tại giá trị của m .

Vậy điều kiện để phương trình (1) có ít nhất một nghiệm không dương là $0 < m \leq 4$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

5. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{9}{2} \end{cases}$

a. $x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = \frac{5}{m} \Leftrightarrow \frac{2(m-3)}{m} - 3\frac{m-4}{m} = \frac{5}{m}$
 $\Rightarrow 2(m-3) - 3(m-4) = 5(m \neq 0)$
 $\Leftrightarrow 2m - 6 - 3m + 12 = 0$
 $\Leftrightarrow -m + 6 = 0$
 $\Leftrightarrow m = 6 (KTM : m < \frac{9}{2})$

Vậy không tồn tại giá trị của m để $x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = \frac{5}{m}$

b. $x_1 > 2; x_2 > 2$ Đặt $y = x - 2 \Rightarrow x = y + 2$. Thay vào phương trình (1) ta có:

$$\begin{aligned} m(y+2)^2 - 2(m-3)(y+2) + m-4 &= 0 \\ \Leftrightarrow m(y^2 + 4y + 4) - 2(my + 2m - 3y - 6) + m - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow my^2 + 4my + 4m - 2my - 4m + 6y + 12 + m - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow my^2 + 2my + 6y + m + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow my^2 + 2(m+3)y + m + 8 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Ta đi tìm điều kiện của m để phương trình (5) có hai nghiệm phân biệt đều dương: $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ y_1 + y_2 > 0 \\ y_1y_2 > 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Delta &= (m+3)^2 - m(m+8) > 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m + 9 - m^2 - 8m > 0 \\ \Leftrightarrow -2m + 9 &> 0 \\ \Leftrightarrow m &< \frac{9}{2} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &= \frac{-2(m+3)}{m} > 0 \Leftrightarrow \frac{m+3}{m} < 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m+3 > 0 \\ m < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow -3 < m < 0 \quad (7) \\ \begin{cases} m+3 < 0 \\ m > 0 \end{cases} & \text{(vô lý)} \end{aligned}$$

$$y_1y_2 = \frac{m+8}{m} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+8 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -8 \end{cases} \quad (8)$$

Kết hợp $m \neq 0$; (6); (7) và (8) $\Rightarrow$ Không tồn tại giá trị của m để phương trình (5) có hai nghiệm đều dương.

Vậy không tồn tại giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm $x_1 > 2$; $x_2 > 2$

c. $mx_1^2 + 2(m-3)x_2 + m-5 \leq 0$

Vì x_1 là nghiệm của phương trình (1) nên $mx_1^2 - 2(m-3)x_1 + m-4 = 0$

$$\Leftrightarrow mx_1^2 = 2(m-3)x_1 - m + 4$$

Thay vào $mx_1^2 + 2(m-3)x_2 + m-5 \leq 0$ ta có $2(m-3)x_1 - m + 4 + 2(m-3)x_2 + m-5 \leq 0$

$$\Leftrightarrow 2(m-3)(x_1 + x_2) - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(m-3) \frac{2(m-3)}{m} - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow 4(m-3)^2 - m \leq 0 (m \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 24m + 36 - m \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 25m + 36 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (m-8)\left(m-\frac{9}{2}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2} \leq m \leq 8$$

Kết hợp với điều kiện $\begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow$ Không tồn tại giá trị của m

d. $x_1^3 + x_2^3 + 4x_1 + 4x_2 + x_1x_2 = \frac{-1}{3}$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) + 4(x_1 + x_2) + x_1x_2 = \frac{-1}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 \right] + 4(x_1 + x_2) + x_1x_2 = \frac{-1}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2) \left[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 + 4 \right] + x_1x_2 = \frac{-1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(m-3)}{m} \left[\left(\frac{2(m-3)}{m} \right)^2 - 3 \cdot \frac{m-4}{m} + 4 \right] + \frac{m-4}{m} = \frac{-1}{3}$$

$$\Rightarrow 11m^3 - 58m^2 + 144m - 216 = \frac{-m^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow 34m^3 - 174m^2 + 432m - 648 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-3)(34m^2 - 72m + 216) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = 3$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\text{Kết hợp với điều kiện } \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow m = 3$$

6. Khi (1) có hai nghiệm phân biệt, hãy thiết lập hệ thức liên hệ giữa hai nghiệm độc lập với m .

$$\text{Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{9}{2} \end{cases}$$

Khi đó theo Viet:

$$x_1 + x_2 = \frac{2(m-3)}{m} = 2 \cdot \left(1 - \frac{3}{m}\right) = 2 - \frac{6}{m} \Rightarrow 2(x_1 + x_2) = 4 - \frac{12}{m}$$

$$x_1 x_2 = \frac{m-4}{m} = 1 - \frac{4}{m} \Rightarrow 3x_1 x_2 = 3 - \frac{12}{m}$$

$$\text{Ta có: } 2(x_1 + x_2) - 3x_1 x_2 = 1$$

$$\text{Vậy hệ thức cần tìm là: } 2(x_1 + x_2) - 3x_1 x_2 = 1$$

Bài 42. Cho phương trình: $mx^2 - (3m+1)x + 2m+1 = 0$ (1) (m là tham số)

- 1) Giải phương trình ⁽¹⁾ với $m=5$.
- 2) Tìm m để phương trình ⁽¹⁾ nhận 4 làm nghiệm.
- 3) Tìm m để phương trình ⁽¹⁾ có ít nhất một nghiệm dương.
- 4) Tìm m để phương trình ⁽¹⁾ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn:

a) $x_1 + 4x_2 = 2m$

b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{4}{3}$

c) $\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2} = \frac{4}{3}$

d) $x_1^3 + x_2^3 = 33$

e) $|x_1 - x_2 - m| = 3$

f) $mx_1^2 + (3m+1)x_2 + 2m+1 = m^2$

g) $x_1^3 x_2 = 1$

h) Biểu thức: $M = x_1^2 + x_2^2 + 7x_1 x_2$ không âm.

Lời giải

- 1) Giải phương trình ⁽¹⁾ với $m=5$.

Vì $m=5 \neq 0$ nên phương trình ⁽¹⁾ là phương trình bậc 2 một ẩn

$$5x^2 - (3.5+1)x + 2.5+1=0 \Leftrightarrow 5x^2 - 16x + 11=0 \quad (*).$$

Ta có: $a=5$; $b=-16$; $c=11$.

Nhận thấy phương trình (*) có $a+b+c=5+(-16)+11=0$

$\Rightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm: $x_1=1$ và $x_2=\frac{c}{a}=\frac{11}{5}$.

Vậy với $m=5$ phương trình có hai nghiệm: $x_1=1$; $x_2=\frac{c}{a}=\frac{11}{5}$.

2) Tìm m để phương trình ⁽¹⁾ nhận 4 làm nghiệm.

Do phương trình ⁽¹⁾ nhận 4 làm nghiệm nên thay $x=4$ vào phương trình ⁽¹⁾ ta được:

$$m.4^2 - (3m+1).4 + 2m+1=0 \Leftrightarrow 16m - 12m - 4 + 2m+1=0 \Leftrightarrow 6m - 3=0 \Leftrightarrow 6m=3 \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}.$$

Vậy $m=\frac{1}{2}$ thì phương trình ⁽¹⁾ nhận 4 làm nghiệm.

3) Tìm m để phương trình ⁽¹⁾ có ít nhất một nghiệm dương.

$TH_1: m=0$ khi đó phương trình ⁽¹⁾ có dạng: $-x+1=0 \Leftrightarrow x=1 > 0$

Vậy $m=0$ thì phương trình ⁽¹⁾ có ít nhất một nghiệm dương. ^(*)

$TH_2: m \neq 0 \Rightarrow$ phương trình ⁽¹⁾ là phương trình bậc hai một ẩn x .

Ta có $a=m$; $b=-(3m+1)$; $c=2m+1 \Rightarrow a+b+c=m-(3m+1)+2m+1=0$

Phương trình ⁽¹⁾ luôn có hai nghiệm $x_1=1 > 0$; $x_2=\frac{2m+1}{m}$

Vậy $\forall m \in \mathbb{R}$ thì phương trình ⁽¹⁾ có ít nhất một nghiệm dương.

4) Tìm m để phương trình ⁽¹⁾ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn :

Phương trình ⁽¹⁾ luôn có hai nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m+1)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$

$\Rightarrow$ Phương trình ⁽¹⁾ luôn có hai nghiệm $x_1; x_2$ với $\forall m \neq 0$.

Theo hệ thức Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3m+1}{m} \\ x_1 x_2 = \frac{2m+1}{m} \end{cases} \quad (m \neq 0).$$

Phương trình ⁽¹⁾ có: $a=m$; $b=-(3m+1)$; $c=(2m+1)$.

Thấy $a+b+c=m-(3m+1)+(2m+1)=0$

$\Rightarrow$ phương trình ⁽¹⁾ có hai nghiệm $x_1=1$ và $x_2=\frac{2m+1}{m}=2+\frac{1}{m} \quad (m \neq 0)$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

hoặc : $x_1 = \frac{2m+1}{m} = 2 + \frac{1}{m}$ ($m \neq 0$) và $x_2 = 1$.

a) $x_1 + 4x_2 = 2m$.

TH₁: Thay $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{2m+1}{m} = 2 + \frac{1}{m}$ ($m \neq 0$) vào $x_1 + 4x_2 = 2m$ ta được:

$$1 + 4\left(2 + \frac{1}{m}\right) = 2m \Leftrightarrow 9 + \frac{4}{m} = 2m \Leftrightarrow 2m^2 - 9m - 4 = 0 \quad (3).$$

Có $\Delta = 81 + 32 = 113 > 0 \Rightarrow$ phương trình ⁽³⁾ có hai nghiệm phân biệt:

$$m_1 = \frac{9 + \sqrt{113}}{4}; m_2 = \frac{9 - \sqrt{113}}{4} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

TH₂: Thay $x_1 = \frac{2m+1}{m} = 2 + \frac{1}{m}$ ($m \neq 0$) và $x_2 = 1$ vào $x_1 + 4x_2 = 2m$ ta được:

$$2 + \frac{1}{m} + 4 = 2m$$

$$\Leftrightarrow 2m - \frac{1}{m} - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 6m - 1 = 0 \quad (m \neq 0).$$

Có: $\Delta' = 9 + 2 = 11 > 0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$m_1 = \frac{3 + \sqrt{11}}{2}; m_2 = \frac{3 - \sqrt{11}}{2} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy $m = \frac{9 \pm \sqrt{113}}{4}; m = \frac{3 \pm \sqrt{11}}{2}$ thì phương trình ⁽¹⁾ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn

$$x_1 + 4x_2 = 2m.$$

b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{4}{3} \quad (x_1 \neq 0; x_2 \neq 0)$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = -\frac{4}{3}.$$

Thay hệ thức Viet vào ta được: $\frac{\frac{3m+1}{m}}{\frac{2m+1}{m}} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{3m+1}{m} : \frac{2m+1}{m} = -\frac{4}{3} \quad \left(m \neq 0; m \neq -\frac{1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{3m+1}{m} \cdot \frac{m}{2m+1} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{3m+1}{2m+1} = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow 9m+3 = -8m-4 \Leftrightarrow 17m = -7$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{7}{17} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy $m = -\frac{7}{17}$ thì phương trình ⁽¹⁾ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{4}{3}$.

$$c) \frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2} = \frac{2}{3} \quad (x_1 \neq 2; x_2 \neq 2).$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2 - 2 + x_1 - 2}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2) - 4}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2) - 4}{x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4} = \frac{2}{3}.$$

Thay hệ thức Viet vào ta được :

$$\frac{\frac{3m+1}{m} - 4}{\frac{2m+1}{m} - \frac{2(3m+1)}{m} + 4} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\frac{1-m}{m}}{\frac{-1}{m}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{1-m}{m} : \frac{-1}{m} = \frac{2}{3} \quad (m \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-m}{m} \cdot \frac{m}{-1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3(-1+m) = 2 \Leftrightarrow -3+3m = 2 \Leftrightarrow 3m = 5 \Leftrightarrow m = \frac{5}{3} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy $m = \frac{5}{3}$ thì phương trình ⁽¹⁾ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2} = \frac{2}{3}$.

$$d) x_1^3 + x_2^3 = 33.$$

Theo hệ thức Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3m+1}{m} = 3 + \frac{1}{m} = 3 + a \\ x_1 x_2 = \frac{2m+1}{m} = 2 + \frac{1}{m} = 2 + a \end{cases} \quad (m \neq 0, \text{ đặt } a = \frac{1}{m}).$$

$$\text{Có : } (x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$$

Thay hệ thức Viet vào ta được :

$$x_1^3 + x_2^3 = (3+a)^3 - 3(2+a)(3+a) = 27 + 27a + 9a^2 + a^3 - 18 - 15a - 3a^2 = a^3 + 6a^2 + 12a + 9$$

$$\text{Mà } x_1^3 + x_2^3 = 33 \Rightarrow a^3 + 6a^2 + 12a + 9 = 33 \Leftrightarrow a^3 + 6a^2 + 12a - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+2)^3 = 32 \Leftrightarrow a+2 = \sqrt[3]{32} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{32} - 2$$

$$\text{Mà } a = \frac{1}{m} \Rightarrow m = \frac{1}{a} \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt[3]{32} - 2} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy $m = \frac{1}{\sqrt[3]{32} - 2}$ thì phương trình ⁽¹⁾ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 33$.

$$e) |x_1 - x_2 - m| = 3.$$

TH₁: Thay $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{2m+1}{m} = 2 + \frac{1}{m}$ ($m \neq 0$) vào $|x_1 - x_2 - m| = 3$ ta được:

$$\left| 1 - 2 - \frac{1}{m} - m \right| = 3 \Leftrightarrow \left| 1 + \frac{1}{m} + m \right| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{m} + m = 3 \\ 1 + \frac{1}{m} + m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 1 = 0 \\ m^2 + 4m + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \pm \sqrt{3} \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

TH₂: Thay $x_1 = \frac{2m+1}{m} = 2 + \frac{1}{m}$ ($m \neq 0$) và $x_2 = 1$ vào $|x_1 - x_2 - m| = 3$ ta được:

$$\left| 2 + \frac{1}{m} - 1 - m \right| = 3 \Leftrightarrow \left| 1 + \frac{1}{m} - m \right| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{m} - m = 3 \\ 1 + \frac{1}{m} - m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 1 = 0 \\ m^2 - 4m - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \pm \sqrt{2} \\ m = 2 \pm \sqrt{5} \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy $m = 1$; $m = -2 \pm \sqrt{3}$; $m = 2 \pm \sqrt{5}$; $m = -1 \pm \sqrt{2}$ thì phương trình ⁽¹⁾ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $|x_1 - x_2 - m| = 3$.

$$\text{f) } mx_1^2 + (3m+1)x_2 - (2m+1) = m. \quad (2)$$

Do x_2 là một nghiệm của phương trình ⁽¹⁾ nên ta có:

$$mx_2^2 - (3m+1)x_2 + 2m+1 = 0 \quad (3)$$

Cộng vế với vế của ⁽²⁾ và (3) ta được:

$$\begin{aligned} mx_1^2 + mx_2^2 &= m \\ \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 &= 1 \quad (m \neq 0) \\ \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Thay hệ thức Viet vào ta được:

$$\begin{aligned} \left(3 + \frac{1}{m} \right)^2 - 2 \left(2 + \frac{1}{m} \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow 9 + \frac{6}{m} + \frac{1}{m^2} - 4 - \frac{2}{m} &= 1 \\ \Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2m+1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= -\frac{1}{2} \quad (\text{thỏa mãn}). \end{aligned}$$

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ thì phương trình ⁽¹⁾ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $mx_1^2 + (3m+1)x_2 - (2m+1) = m$.

$$\text{g) } x_1^3 x_2 = 1$$

$$\text{Thay } x_1 x_2 = \frac{2m+1}{m} \text{ vào } x_1^3 x_2 = 1 \Rightarrow x_1^2 \cdot \frac{2m+1}{m} = 1 \Rightarrow x_1^2 = \frac{m}{2m+1}$$

$$\text{TH 1: } x_1 = 1 \Rightarrow \frac{m}{2m+1} = 1 \Leftrightarrow m = 2m+1 \Leftrightarrow m = -1$$

$$\text{TH2 : } x_1 = \frac{2m+1}{m} \Rightarrow \frac{m}{2m+1} = \left(\frac{2m+1}{m} \right)^2 \Leftrightarrow m^3 = (2m+1)^3$$

$$\Leftrightarrow m = 2m+1 \Leftrightarrow m = -1$$

Vậy $m = -1$ thì phương trình ⁽¹⁾ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^3 x_2 = 1$

h) Biểu thức: $M = x_1^2 + x_2^2 + 7x_1 x_2$ không âm

$$M = x_1^2 + x_2^2 + 7x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + 7x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 + 5x_1 x_2.$$

Thay hệ thức Viet vào M ta được:

$$M = \left(3 + \frac{1}{m} \right)^2 + 5\left(2 + \frac{1}{m} \right)$$

$$\Leftrightarrow M = 9 + 6\frac{1}{m} + \left(\frac{1}{m} \right)^2 + 10 + 5\frac{1}{m}$$

$$\Leftrightarrow M = \left(\frac{1}{m} \right)^2 + 11\frac{1}{m} + 19$$

$$\Leftrightarrow M = \left(\frac{1}{m} \right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{11}{2} + \left(\frac{11}{2} \right)^2 + 19 - \left(\frac{11}{2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow M = \left(\frac{1}{m} + \frac{11}{2} \right)^2 - \frac{45}{4}.$$

Biểu thức M không âm tức $M \geq 0$, tương đương với:

$$\left(\frac{1}{m} + \frac{11}{2} \right)^2 - \frac{45}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{m} + \frac{11}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{45}}{2} \right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{m} + \frac{11}{2} - \frac{\sqrt{45}}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{11}{2} + \frac{\sqrt{45}}{2} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{m} + \frac{11 - \sqrt{45}}{2} \right) \left(\frac{1}{m} + \frac{11 + \sqrt{45}}{2} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2 + m(11 - \sqrt{45})}{2m} \right) \left(\frac{2 + m(11 + \sqrt{45})}{2m} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{[2 + m(11 - \sqrt{45})][2 + m(11 + \sqrt{45})]}{4m^2} \geq 0 \Leftrightarrow [2 + m(11 - \sqrt{45})][2 + m(11 + \sqrt{45})] \geq 0$$

(vì $m \neq 0$ nên $m^2 > 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2 + m(11 - \sqrt{45}) \geq 0 \\ 2 + m(11 + \sqrt{45}) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 + m(11 - \sqrt{45}) \leq 0 \\ 2 + m(11 + \sqrt{45}) \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{-2}{11 - \sqrt{45}} = -\frac{11 + 3\sqrt{5}}{38} \\ m \geq \frac{-2}{11 + \sqrt{45}} = \frac{-11 + 3\sqrt{5}}{38} \\ m \leq \frac{-2}{11 - \sqrt{45}} = -\frac{11 + 3\sqrt{5}}{38} \\ m \leq \frac{-2}{11 + \sqrt{45}} = \frac{-11 + 3\sqrt{5}}{38} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{-11 + 3\sqrt{5}}{38} \\ m \leq -\frac{11 + 3\sqrt{5}}{38} \end{cases}.$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

Kết hợp với điều kiện $m \neq 0$ ta được $m \leq -\frac{11+3\sqrt{5}}{38}$ hoặc $m \geq \frac{-11+3\sqrt{5}}{38}$ và $m \neq 0$ thì biểu

thức: $M = x_1^2 + x_2^2 + 7x_1x_2$ không âm.

Bài 43. Cho phương trình: $mx^2 - (2m+3)x + m - 4 = 0$ (1); với m là tham số thực.

1. Giải phương trình (1) khi $m = 9$.

2. Tìm m để phương trình (1) có nghiệm dương.

3. Tìm m để (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức

a) $x_1 + x_2 = 7x_1x_2 - 3$.

b) $x_1^3 + x_2^3 = x_1 + x_2$.

c) $x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 = \frac{3}{m^2}$.

d) $x_1^3 + x_2^3 = 0$.

e) $x_1^2 + 4x_1 = x_2^2 + 4x_2$.

Lời giải

1: $mx^2 - (2m+3)x + m - 4 = 0$

Với $m = 9 \neq 0$ thay $m = 9$ vào phương trình (1) ta được:

$$\Leftrightarrow 9x^2 - (2 \cdot 9 + 3)x + 5 = 0$$

$$\Delta = (-21)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 5 = 261 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{261} = 3\sqrt{29}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là

$$\begin{cases} x_1 = \frac{21+3\sqrt{29}}{18} = \frac{7+\sqrt{29}}{6} \\ x_2 = \frac{21-3\sqrt{29}}{18} = \frac{7-\sqrt{29}}{6} \end{cases}$$

2: $mx^2 - (2m+3)x + m - 4 = 0$

Với $m = 0$ ta có: (1) $\Leftrightarrow -3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} < 0$.

$\Rightarrow m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m \neq 0$, (1) là phương trình bậc hai có:

$$\Delta = [-(2m+3)]^2 - 4m(m-4)$$

$$= (2m+3)^2 - 4m^2 + 16m$$

$$= 28m + 9.$$

$$\text{TH1: PT(1) có nghiệm kép dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \frac{-b}{2a} = \frac{2m+3}{2m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-9}{28} \\ \frac{2m+3}{2m} > 0 \end{cases} \text{ (loại).}$$

TH2: PT(1) có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow a.c = m(m-4) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m-4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4.$$

$$\text{TH3: PT(1) có một nghiệm là 0 và 1 nghiệm dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 28m+9 > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2m+3}{m} > 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-4}{m} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{9}{28} \\ \frac{2m+3}{m} > 0 \\ m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4.$$

$$\text{TH4: PT(1) có hai nghiệm dương phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 28m+9 > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2m+3}{m} > 0 (*) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m-4}{m} > 0 (**) \end{cases}$$

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{3}{2} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases}$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\text{Vậy PT(1) có hai nghiệm dương phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{9}{28} \\ \begin{cases} m > 0 \\ m < -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > 4. \\ \begin{cases} m > 4 \\ m < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Kết luận: Vậy với $m > 0$ thì phương trình (1) có nghiệm dương.

$$3: mx^2 - (2m+3)x + m - 4 = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \Delta &= b^2 - 4ac = [- (2m+3)]^2 - 4.m.(m-4) \\ &= (2m+3)^2 - 4m^2 + 16m \\ &= 28m + 9. \end{aligned}$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 28m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -\frac{9}{28} \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (1)

$$\text{Theo hệ thức Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m+3}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-4}{m} \end{cases}.$$

a) Theo đề bài ta có:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 7x_1 \cdot x_2 - 3 \\ \Leftrightarrow \frac{2m+3}{m} &= 7 \cdot \frac{m-4}{m} - 3 \\ \Leftrightarrow 2m+3 &= 7(m-4) - 3m \quad (m \neq 0) \\ \Leftrightarrow 2m &= 31 \\ \Leftrightarrow m &= \frac{31}{2} \quad (\text{nhận}). \end{aligned}$$

b) Theo đề bài ta có: $x_1^3 + x_2^3 = x_1 + x_2$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) &= x_1 + x_2 \\ \Leftrightarrow (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] - (x_1 + x_2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 - 1] &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m+3}{m} = 0 \\ \left(\frac{2m+3}{m}\right)^2 - 3 \cdot \frac{m-4}{m} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3=0 \\ (2m+3)^2 - m(3m-12) - m^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-3}{2} & (\text{loại}) \\ 4m^2 + 12m + 9 - 3m^2 + 12m - m^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 24m + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-9}{24} \quad (\text{loại})$$

Không có giá trị nào m thỏa mãn yêu cầu trên

c) Theo đề bài ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 = \frac{3}{m^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_2 = \frac{3}{m^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2 = \frac{3}{m^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2m+3}{m}\right)^2 + 4 \cdot \frac{m-4}{m} = \frac{3}{m^2}$$

$$\Leftrightarrow (2m+3)^2 + 4m(m-4) = 3 \quad (\text{do } m \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 12m + 9 + 4m^2 - 16m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8m^2 - 4m + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{11}{16} = 0 \quad \text{Phương trình vô nghiệm với mọi } m.$$

$$\forall \left(m - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{11}{16} > 0 \quad \text{với mọi } m$$

d) Theo đề bài ta có:

$$x_1^3 + x_2^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 0$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2m+3}{m} \right)^3 - 3 \cdot \frac{m-4}{m} \cdot \frac{2m+3}{m} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2m+3)^3 - 3m(m-4)(2m+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 8m^3 + 36m^2 + 54m + 27 - 6m^3 - 9m^2 + 24m^2 + 36m = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^3 + 51m^2 + 90m + 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2m+3)(m^2 + 24m + 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m+3=0 \\ m^2 + 24m + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{3}{2} \\ m = -12 - 3\sqrt{15} \\ m = -12 + 3\sqrt{15} \end{cases}$$

Vậy $m = -12 + 3\sqrt{15}$ (thỏa mãn)

e) Theo đề bài ta có:

$$x_1^2 + 4x_1 = x_2^2 + 4x_2$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 - x_2^2 + 4x_1 - 4x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 4(x_1 - x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 4) = 0$$

Vậy $x_1 + x_2 = -4$. Vì $x_1 - x_2 = 0$, suy ra $x_1 = x_2$ hay $x_1 = x_2$ (loại)

Ta có $x_1 + x_2 = -4$

$$\Leftrightarrow \frac{2m+3}{m} = -4 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \quad (\text{loại})$$

Bài toán 44. Cho phương trình: $mx^2 + (m-1)x + 3m-3 = 0$ (1); với m là tham số thực

- Giải (1) với $m=3$.
- Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm duy nhất đó.
- Xác định giá trị của m để (1) có hai nghiệm x_1, x_2 , trong đó:

a) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{7}{9}$.

b) $x_1 > \frac{3}{2} > x_2$.

c) $mx_1^2 - (m-1)x_2 + 3m-4 = 0$.

d) Biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

4. Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt cùng âm ?

5. Tìm tất cả các giá trị của m để (1) có hai nghiệm phân biệt nghịch đảo nhau.

Lời giải

1. Với $m=3$ (1) trở thành: $3x^2 + 2x + 6 = 0$

$$\Delta' = 1^2 - 3 \cdot 6 = -17 < 0$$

Phương trình vô nghiệm

2. $mx^2 + (m-1)x + 3m-3 = 0$ (1);

Với $m=0$ phương trình (1) trở thành: $-x-3=0 \Leftrightarrow x=-3$.

Với $m \neq 0$ (1) là phương trình bậc hai có:

$$\Delta = (m-1)^2 - 4m(3m-3) = m^2 - 2m + 1 - 12m^2 + 12m = -11m^2 + 10m + 1$$

Để phương trình (1) có nghiệm duy nhất thì: $\Delta = 0$

$$\Delta = -11m^2 + 10m + 1 = 0.$$

Ta có: $a + b + c = -11 + 10 + 1 = 0$

$$m_1 = 1$$

$$m_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{11}.$$

Với $m_1 = 1$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất là $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(m-1)}{2m} = -\frac{(1-1)}{2} = 0$.

Với $m_2 = -\frac{1}{11}$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất là $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(m-1)}{2m} = -\frac{\left(-\frac{1}{11}-1\right)}{2\left(-\frac{1}{11}\right)} = 6$

Vậy với $m=0$; $m=1$; $m=-\frac{1}{11}$. Thì phương trình có nghiệm duy nhất lần lượt là: $x=-3$;

$$x=0; x=6.$$

3. Phương trình $mx^2 + (m-1)x + 3m-3 = 0$ (1) có khi:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-1)^2 - 4m(3m-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -11m^2 + 10m + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-1)\left(m + \frac{1}{11}\right) \leq 0 \end{cases}$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$TH1 \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-1) \geq 0 \\ \left(m + \frac{1}{11}\right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \geq 1 \\ m \leq \frac{-1}{11} \end{cases} \quad (\text{loại})$$

$$TH2 \begin{cases} m \neq 0 \\ (m-1) \leq 0 \\ \left(m + \frac{1}{11}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \leq 1 \\ m \geq \frac{-1}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1}{11} \leq m \leq 1 \text{ và } m \neq 0$$

Vậy với $\frac{-1}{11} \leq m \leq 1$ và $m \neq 0$ hoặc thì phương trình (1) có hai nghiệm.

Áp dụng hệ thức Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(m-1)}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3m-3}{m} \end{cases}$$

$$a) \text{ Để } \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{7}{9} \Leftrightarrow \frac{x_2^2 + x_1^2}{x_1^2 \cdot x_2^2} = \frac{7}{9} \Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{7}{9} \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{m-1}{m}\right)^2 - \frac{2(3m-3)}{m}}{\left(\frac{3m-3}{m}\right)^2} = \frac{7}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{m^2 - 2m + 1}{m^2} - \frac{6m - 6}{m}}{\frac{9m^2 - 18m + 9}{m^2}} = \frac{7}{9} \Leftrightarrow \frac{m^2 - 2m + 1 - 6m^2 + 6m}{9m^2 - 18m + 9} = \frac{7}{9} \Leftrightarrow \frac{-5m^2 + 4m + 1}{9m^2 - 18m + 9} = \frac{7}{9}$$

$$\Leftrightarrow 9(-5m^2 + 4m + 1) = 7(9m^2 - 18m + 9) \Leftrightarrow -45m^2 + 36m + 9 = 63m^2 - 126m + 63$$

$$\Leftrightarrow 108m^2 - 162m + 54 = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m + 1 = 0$$

Ta có: $a + b + c = 2 - 3 + 1 = 0$

$$m_1 = 1 \quad (\text{loại})$$

$$m_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy với $m = \frac{1}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{7}{9}$.

$$b) \quad x_1 > \frac{3}{2} > x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - \frac{3}{2} > 0 \\ x_2 - \frac{3}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(x_1 - \frac{3}{2}\right) \left(x_2 - \frac{3}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - \frac{3}{2}(x_1 + x_2) + \frac{9}{4} < 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{3m-3}{m} + \frac{3}{2} \left(\frac{m-1}{m} \right) + \frac{9}{4} < 0 \Leftrightarrow \frac{4(3m-3)}{4m} + \frac{6}{4} \left(\frac{m-1}{m} \right) + \frac{9m}{4m} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{12m-12+6m-6+9m}{4m} < 0 \Leftrightarrow \frac{27m-18}{4m} < 0$$

$$TH1 \begin{cases} 27m-18 > 0 \\ 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ m < 0 \end{cases} \quad (\text{loại})$$

Đối chiếu với điều kiện của m ta thấy $0 < m < \frac{2}{3}$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy với $0 < m < \frac{2}{3}$ thì phương trình có hai nghiệm thỏa mãn $x_1 > \frac{3}{2} > x_2$.

$$c) \quad mx_1^2 - (m-1)x_2 + 3m - 4 = 0. \quad (2)$$

Giả sử phương trình $mx^2 + (m-1)x + 3m - 3 = 0 \quad (1)$; có hai nghiệm $x_1; x_2$ thì:

$$mx_1^2 + (m-1)x_1 + 3m - 3 = 0 \quad (3).$$

trừ vế với vế của (3) cho (2) ta được:

$$(m-1)x_1 + (m-1)x_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(x_1 + x_2) + 1 = 0. \text{ Thay } x_1 + x_2 = -\frac{(m-1)}{m} \text{ ta có:}$$

$$-(m-1)\frac{(m-1)}{m} + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{(m-1)^2}{m} = 0 \Leftrightarrow \frac{m - m^2 + 2m - 1}{m} = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 1 = 0 \quad (*)$$

$$\Delta_m = 9 - 4 = 5 > 0 \text{ nên } (*) \text{ có hai nghiệm phân biệt } m_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ (loại)}$$

$$m_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$m = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad (1)$$

Vậy với $m = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn:

$$mx_1^2 - (m-1)x_2 + 3m - 4 = 0.$$

d) Biểu thức $T = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$$\text{Ta có } T = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{m-1}{m} \right)^2 - \frac{2(3m-3)}{m}$$

$$= \frac{m^2 - 2m + 1 - 6m^2 + 6m}{m^2} = \frac{-5m^2 + 4m + 1}{m^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{4}{m} - 5 = \left(\frac{1}{m} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{m} \right) \cdot 2 + 4 - 9$$

$$= \left(\frac{1}{m} + 2 \right)^2 - 9$$

CHUYÊN ĐỀ 9. HỆ THỨC VI-ÉT

$$\Rightarrow T+9 = \left(\frac{1}{m} + 2 \right)^2$$

$$\text{Đặt } u = \frac{1}{m} + 2 \Rightarrow u^2 = \left(\frac{1}{m} + 2 \right)^2 = f(u) \text{ với } \frac{-1}{11} \leq m \leq -1 \text{ và } m \neq 0$$

$$\text{TH1 } \frac{-1}{11} \leq m < 0 \Rightarrow \frac{1}{m} \leq -11 \Rightarrow \frac{1}{m} + 2 \leq -9 \Rightarrow u \leq -9 \text{ mà } f(u) = u^2 \text{ nghịch biến khi } u < 0$$

$$\Rightarrow f(u) \geq f(-9) = 81 \text{ khi } u \leq -9. (*)$$

$$\text{TH2 } 0 < m \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{m} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{m} + 2 \geq 3 \Rightarrow u \geq 3 \text{ mà } f(u) = u^2 \text{ đồng biến khi } u > 0$$

$$\Rightarrow f(u) \geq f(3) = 9 \text{ khi } u \geq 3. (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ ta có: } f(u) \geq 9 \Rightarrow T+9 \geq 9 \Rightarrow T \geq 0.$$

$$T_{\min} = 0 \Leftrightarrow f(u) = 9 \Leftrightarrow u = 3 \Leftrightarrow m = 1$$

4. Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt cùng âm ?

Với $\frac{-1}{11} < m < 1$ và $m \neq 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Để hai nghiệm phân biệt cùng âm

$$\text{thì: } \begin{cases} S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(m-1)}{m} < 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3m-3}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-1}{m} > 0 \\ 3\left(\frac{m-1}{m}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{m-1}{m} > 0$$

$$\text{TH1 } \begin{cases} m-1 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1 \text{ (loại).}$$

$$\text{TH2 } \begin{cases} m-1 < 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0. \text{ Kết hợp với điều kiện của } m \text{ ta có } \frac{-1}{11} < m < 0.$$

Vậy với $\frac{-1}{11} < m < 0$ thì phương trình có hai nghiệm âm.

5. Tìm tất cả các giá trị của m để (1) có hai nghiệm phân biệt nghịch đảo nhau.

Với $\frac{-1}{11} < m < 1$ và $m \neq 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Để hai nghiệm là

$$\text{nghịch đảo của nhau tức là } x_1 = \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow x_1 x_2 = 1 \Rightarrow \frac{3m-3}{m} = 1 \Leftrightarrow 3m-3=m \Leftrightarrow m = \frac{3}{2} \text{ (loại).}$$

Vậy không có giá trị của m để phương trình có hai nghiệm là nghịch đảo của nhau.

