

Bài 1. (4,0 điểm)

Cho biểu thức :
$$P = \frac{2x^5 - x^4 - 2x + 1}{4x^2 - 1} + \frac{8x^2 - 4x + 2}{8x^3 + 1}$$

a) Rút gọn P

b) Tìm các giá trị của x để $P = 6$

Bài 2. (4,0 điểm)

a) Cho các số a, b, c, d nguyên dương đôi một khác nhau và thỏa mãn:

$$\frac{2a+b}{a+b} + \frac{2b+c}{b+c} + \frac{2c+d}{c+d} + \frac{2d+a}{d+a} = 6.$$

Chứng minh $A = abcd$ là số chính phương.

b) Tìm a nguyên để $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ chia hết cho $a^2 + 3$

Bài 3. (3,0 điểm)

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (x-1)(2x-1)(2x^2-3x-1) + 2017$

b) Tìm a nguyên để $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ chia hết cho $a^2 + 3$

Bài 4. (3,0 điểm)

a) Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.
Chứng minh tam giác đều

b) Cho x, y, z dương và $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{x^2 + 2yz} + \frac{1}{y^2 + 2xz} + \frac{1}{z^2 + 2xy} \geq 9$$

Bài 5. (5,0 điểm)

Cho O là trung điểm của đoạn AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là cạnh AB vẽ tia Ax, By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm C (khác A), qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By tại D

a) Chứng minh $AB^2 = 4AC \cdot BD$

b) Kẻ $OM \perp CD$ tại M . Chứng minh $AC = CM$.

c) Từ M kẻ MH vuông góc với AB tại H . Chứng minh BC đi qua trung điểm MH

d) Tìm vị trí của C trên tia Ax để diện tích tứ giác $ABDC$ nhỏ nhất

Bài 6. (1,0 điểm) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{2016}{x+y} + \frac{x}{y+2015} + \frac{y}{4031} + \frac{2015}{x+2016} = 2$$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$\begin{aligned} a) P &= \frac{2x^5 - x^4 - 2x + 1}{4x^2 - 1} + \frac{8x^2 - 4x + 2}{8x^3 + 1} \\ &= \frac{x^4 \cdot (2x - 1) - (2x - 1)}{(2x - 1)(2x + 1)} + \frac{2(4x^2 - 2x + 1)}{(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)} \\ &= \frac{(x^4 - 1)(2x - 1)}{(2x - 1)(2x + 1)} + \frac{2}{2x - 1} = \frac{x^4 - 1}{2x + 1} + \frac{2}{2x - 1} = \frac{x^4 + 1}{2x + 1} \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{x^4 + 1}{2x + 1}$

b) ĐK: $x \neq \pm \frac{1}{2}$

$$P = 6 \Leftrightarrow \frac{x^4 + 1}{2x + 1} = 6 \Leftrightarrow x^4 + 1 = 12x + 6$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 4x^2 + 4 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)^2 = (2x + 3)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 = 2x + 3 \quad (1) \quad \text{hoac} \quad x^2 + 2 = -2x - 3 \quad (2)$$

Ta có $(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2 \Rightarrow (x - 1)^2 = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \sqrt{2} \\ x - 1 = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \quad (tmdk)$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = -4 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = -4 \quad (VN)$$

Vậy $S = \{1 \pm \sqrt{2}\}$

Bài 2.

$$a) \frac{2a+b}{a+b} + \frac{2b+c}{b+c} + \frac{2c+d}{c+d} + \frac{2d+a}{d+a} = 6$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{a}{a+b} + 1 + \frac{b}{b+c} + 1 + \frac{c}{c+d} + 1 + \frac{d}{d+a} = 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a} = 2$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{a}{a+b} - \frac{b}{b+c} + 1 - \frac{c}{c+d} - \frac{d}{d+a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a+b} - \frac{b}{b+c} + \frac{d}{c+d} - \frac{d}{d+a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b(c-a)}{(a+b)(b+c)} + \frac{d(a-c)}{(c+d)(d+a)} = 0$$

$$\Leftrightarrow b(c+d)(d+a) - d(a+b)(b+c) = 0$$

$$\Leftrightarrow abc - acd + bd^2 - b^2d = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-d)(ac-bd) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-d)(ac-bd) = 0$$

$$\Leftrightarrow ac - bd = 0 \Leftrightarrow ac = bd$$

Vậy $A = abcd = (ac)^2$ là số chính phương

b) Thực hiện phép chia $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ cho $a^2 + 3$ được kết quả:

$$a^3 - 2a^2 + 7a - 7 = (a^2 + 3)(a - 2) + (4a - 1)$$

Để phép chia hết thì $4a - 1$ phải chia hết cho $a^2 + 3$

$$(4a - 1) : (a^2 + 3)$$

$$\Rightarrow (4a - 1)(4a + 1) : (a^2 + 3) (a \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4a + 1 \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow (16a^2 - 1) : (a^2 + 3)$$

$$\Rightarrow 49 : (a^2 + 3)$$

Tìm a , thử lại và kết luận $a \in \{-2; 2\}$

Bài 3.

$$\begin{aligned}
 a) A &= (x-1)(2x-1)(2x^2-3x-1)+2017 \\
 &= (2x^2-3x+1)(2x^2-3x-1)+2017 \\
 &= (2x^2-3x)^2 - 1 + 2017 = (2x^2-3x)^2 + 2016 \geq 2016
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Dấu "=" xảy ra

$$A_{\min} = 2016 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy

$$b) \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^2 + \frac{x+1}{x-4} - 12 \left(\frac{x-2}{x-4} \right)^2 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } \frac{x+1}{x-2} = a \text{ và } \frac{x-2}{x-4} = b \Rightarrow ab = \frac{x-1}{x-4}$$

Phương trình (*) trở thành:

$$a^2 + ab - 12b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 3b)(a + 4b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ a = -4b \end{cases}$$

$$+\text{Nếu } a = 3b \text{ thì } \frac{x+1}{x-2} = 3 \cdot \frac{x-2}{x-4} \Rightarrow (x+1)(x-4) = 3(x-2)^2 \text{ (VN)}$$

$$+\text{Nếu } a = -4b \text{ thì } \frac{x+1}{x-2} = -4 \cdot \frac{x-2}{x-4} \Rightarrow (x+1)(x-4) = -4(x-2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(tm) \\ x = \frac{4}{5}(tm) \end{cases}$$

$$S = \left\{ 3; \frac{4}{5} \right\}$$

Vậy

Bài 4.

$$a) \text{ C/m: } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$+)\text{Từ giả thiết suy ra: } (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \quad (a+b+c > 0)$$

$$\text{Biến đổi được kết quả: } (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = 0 \\ b - c = 0 \\ c - a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c \Rightarrow$$

Tam giác đó là đều (đpcm)

b) Đặt $a = x^2 + 2yz; b = y^2 + 2xz; c = z^2 + 2xy$

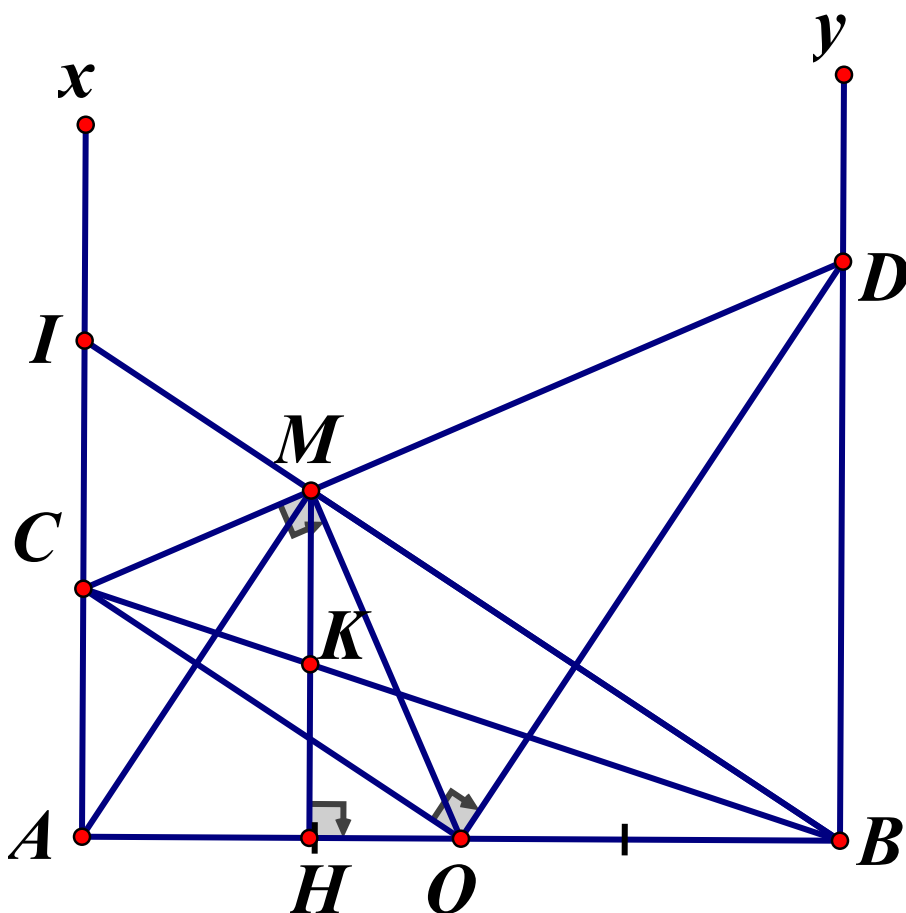
$$\Rightarrow a, b, c > 0 \text{ v\grave{a}} a + b + c = (x + y + z)^2 = 1$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$$

Chứng minh:

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} = 9 \quad \text{hay} \quad \frac{1}{x^2+2yz} + \frac{1}{y^2+2zx} + \frac{1}{z^2+2xy} \geq 9 (dfcm)$$

Bài 5.



$$\Delta OAC \sim \Delta DBO (g.g) \Rightarrow \frac{OA}{DB} = \frac{AC}{OB} \Rightarrow OA \cdot OB = AC \cdot BD$$

a) Chứng minh

$$\Rightarrow \frac{AB}{2} \cdot \frac{AB}{2} = AC \cdot BD \Rightarrow AB^2 = 4AC \cdot BD \quad (dfcm)$$

b) Theo câu a ta có:

$$\Delta OAC \sim \Delta DBO (g - g) \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{OB}$$

Mà $OA = OB \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{OA} \Rightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{OD}{OA}$

+) Chứng minh : $\Delta OAC \sim \Delta DOC (c.g.c) \Rightarrow \angle ACO = \angle OCM$

+) Chứng minh : $\Delta OAC = \Delta OMC (ch - gn) \Rightarrow AC = MC (dfcm)$

c) Ta có $\Delta OAC = \Delta OMC \Rightarrow OA = OM; CA = CM \Rightarrow OC$ là trung trực AM
 $\Rightarrow OC \perp AM,$

Mặt khác $OA = OM = OB \Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại M
 $\Rightarrow OC \parallel BM$ (vì cùng vuông góc với AM) hay $OC \parallel BI$

+) Xét ΔABI có OM đi qua trung điểm AB, song song BI suy ra OM đi qua trung điểm AI $\Rightarrow IC = AC$

$$\frac{MK}{IC} = \frac{BK}{BC} = \frac{KH}{AC}$$

+) $MH \parallel AI$ theo hệ quả định lý ta lại có:

Mà $IC = AC \Rightarrow MK = HK \Rightarrow BC$ đi qua trung điểm MH (dfcm)

d) Tứ giác ABCD là hình thang vuông

$$\Rightarrow S_{ABDC} = \frac{1}{2}(AC + BD) \cdot AB$$

Ta thấy $AC, BD > 0$, nên theo BĐT Cô si ta có:

$$AC + BD \geq 2\sqrt{AC \cdot BD} = 2\sqrt{\frac{AB^2}{4}} = AB \Rightarrow S_{ABDC} \geq \frac{1}{2}AB^2$$

$$\Leftrightarrow AC = BD = \frac{AB}{2} = OA$$

Dấu "=" xảy ra

Vậy C thuộc tia Ax và cách điểm A một đoạn bằng OA.

Bài 6.

+) Với a, b, c, d dương, ta có:

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \\
 &= \left(\frac{a}{b+c} + \frac{c}{d+a} \right) + \left(\frac{b}{c+d} + \frac{d}{a+b} \right) = \frac{a(d+a) + c(b+c)}{(b+c)(d+a)} + \frac{b(a+b) + d(c+d)}{(c+d)(a+b)} \geq \\
 &\geq \frac{a^2 + c^2 + ad + bc}{\frac{1}{4}(b+c+d+a)^2} + \frac{b^2 + d^2 + ab + cd}{\frac{1}{4}(c+d+a+b)^2} = \frac{4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ad + bc + cd)}{(a+b+c+d)^2}
 \end{aligned}$$

(theo bất đẳng thức $xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2$)

Mặt khác:

$$\begin{aligned}
 &2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ad + bc + cd) - (a+b+c+d)^2 \\
 &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ac - 2bd = (a-c)^2 + (b-d)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Suy ra $F \geq 2$ và đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=c; b=d$

+) Áp dụng $F \geq 2$ với $a=2016, b=x, c=y, d=2015$ ta có:

$$\frac{2016}{x+y} + \frac{x}{y+2015} + \frac{y}{4031} + \frac{2015}{x+2016} \geq 2$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow y=2016, x=2015$