

BÀI TEST TOÁN ĐỢT 2

Ngày 27/01/2019

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;2)$, $B(3;5;-4)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của AB là:

A. $x + y - 3z + 9 = 0$ B. $x + y - 3z + 2 = 0$ C. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+4}{-3}$ D. $x + y - 3z - 9 = 0$

Câu 2: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3AD$. Quay hình chữ nhật $ABCD$ lần lượt quanh AD và AB ta thu được hai hình trụ tròn xoay tương ứng có thể tích V_1, V_2 . Hỏi hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $V_2 = 3V_1$. B. $V_2 = V_1$. C. $V_1 = 3V_2$. D. $V_1 = 9V_2$.

Câu 3: Tìm nguyên hàm của hàm của hàm số $f(x) = (2x-1)^2$.

A. $\int f(x)dx = \frac{(2x-1)^3}{6} + C$ B. $\int f(x)dx = \frac{(2x-1)^3}{3} + C$
C. $\int f(x)dx = 4(2x-1) + C$ D. $\int f(x)dx = 2(2x-1) + C$

Câu 4: Cho a, b, c là các số thực dương, $a \neq 1$. Xét các mệnh đề sau:

(I) $2^a = 3 \Leftrightarrow a = \log_2 3$

(II) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \log_3 x^2 = 2 \log_3 x$

(III) $\log_a(b.c) = \log_a b . \log_a c$

Trong ba mệnh đề (I), (II), (III), tổng số mệnh đề đúng là?

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

Câu 5: Cho $x = \log 2017$, $y = \ln 2017$. Hỏi quan hệ nào sau đây giữa x và y là đúng?

A. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{e}{10}$ B. $\frac{x}{y} = \frac{10}{e}$ C. $10^y = e^x$ D. $10^x = e^y$

Câu 6: Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$. Tính $T = |z_1 + z_2 + z_3 + z_4|$.

A. $T = 3$ B. $T = 0$ C. $T = 4 + \sqrt{2}$ D. $T = 4$

Câu 7: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$. Tính hiệu $M - m$.

- A. $M - m = \frac{1}{4}$ B. $M - m = \frac{15}{4}$ C. $M - m = 16$ D. $M - m = 4$

Câu 8: Biết $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x^4 - 2x^3 - 1}{x^2}$ và $F(1) + 2F(2) = 40$. Tính $F(-1)$.

- A. 8 B. 7 C. -8 D. 0

Câu 9: Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2 - 4|x| + 3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 10: Cho số thực x lớn hơn 1 và ba số thực dương a, b, c khác 1 thỏa mãn điều kiện $\log_a x > \log_b x > 0 > \log_c x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $c > a > b$ B. $b > a > c$ C. $c > b > a$ D. $a > b > c$

Câu 11: Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$. Nếu đặt $t = \cos 2x$ thì mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $I = \int_0^1 \frac{-dt}{t^2 + 1}$ B. $I = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1}$ C. $I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + 1}$ D. $I = \int_0^1 \frac{2dt}{t^2 + 1}$

Câu 12: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C): y = \frac{2x-1}{x+1}$, tiệm cận ngang của (C) , trục tung và đường thẳng $x = a$ ($a > 0$). Tìm a để $S = \ln 2017$.

- A. $a = \sqrt[3]{2017} - 1$ B. $a = \frac{2017}{3} - 1$ C. $a = 2016$ D. $a = \sqrt{2017} - 1$

Câu 13: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2x^2 - 3 + m = 0$ có đúng 2 nghiệm thực.

- A. $(-\infty; 3)$ B. $(-\infty; 3) \cup \{4\}$ C. $(-3; +\infty)$ D. $\{-4\} \cup (-3; +\infty)$

Câu 14: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, xét tam giác vuông OAB với A chạy trên trục hoành và có hoành độ dương; B chạy trên trục tung và có tung độ âm sao cho $OA + OB = 1$. Hỏi thể tích lớn nhất của vật thể tạo thành khi quay tam giác OAB quanh trục Oy bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{4\pi}{81}$ B. $\frac{25\pi}{27}$ C. $\frac{9\pi}{4}$ D. $\frac{17\pi}{9}$

Câu 15: Đặt $a = \log_3 5$, $b = \log_4 5$. Hãy biểu diễn $\log_{15} 10$ theo a và b .

A. $\log_{15} 10 = \frac{a^2 - ab}{ab + b}$ B. $\log_{15} 10 = \frac{a + 2ab}{2ab + 2b}$ C. $\log_{15} 10 = \frac{a + 2ab}{2ab}$ D. $\log_{15} 10 = \frac{a^2 - ab}{ab}$

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;2)$, $D(1;3;-2)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều 5 điểm O, A, B, C, D (O là gốc tọa độ)?

A. 5 mặt phẳng B. 4 mặt phẳng C. Có vô số mặt phẳng D. 7 mặt phẳng

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số

$y = \frac{2x - \sqrt{(m-1)x^2 + 1}}{x-1}$ có đúng hai tiệm cận ngang?

A. $m = 1$ B. $m \in (1; 4) \cup (4; +\infty)$ C. $m < 1$ D. $m > 1$

Câu 18: Các giá trị của tham số m để phương trình $12^x + (4-m) \cdot 3^x - m = 0$ có nghiệm thực khoảng $(-1; 0)$ là:

A. $m \in \left(\frac{17}{16}; \frac{5}{2}\right)$ B. $m \in [2; 4]$ C. $m \in \left(\frac{5}{2}; 6\right)$ D. $m \in \left(1; \frac{5}{2}\right)$

Câu 19: Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 8$. Trên AB lấy 2 điểm M, N đối xứng nhau qua O sao cho $MN = 4$. Qua M, N kẻ 2 dây cung PQ và EF cùng vuông góc với AB . Tính diện tích S phần giới hạn bởi đường tròn và 2 dây cung PQ, EF (phần chứa điểm O).

A. $S = \frac{16}{3}\pi + 8\sqrt{3}$ B. $S = 8\pi + 5$ C. $S = 12\pi - 7$ D. $S = 6\pi + 8\sqrt{3}$

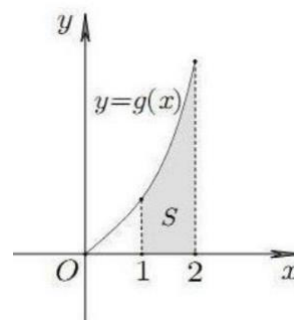
Câu 20: Gọi T là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z-i| \geq 3$ và $|z-1| \leq 5$. Gọi $z_1, z_2 \in T$ lần lượt là các số phức có môđun nhỏ nhất và lớn nhất. Tìm số phức $z_1 + 2z_2$.

A. $12 - 2i$ B. $-2 + 12i$ C. $6 - 4i$ D. $12 + 4i$

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\square$ và hàm số $y = g(x) = xf(x^2)$ có đồ thị trên đoạn $[0; 2]$ như hình vẽ bên. Biết

diện tích miền được tô màu là $S = \frac{5}{2}$, tính tích phân $I = \int_1^4 f(x) dx$

A. $I = \frac{5}{4}$ B. $I = \frac{5}{2}$ C. $I = 5$ D. $I = 10$



Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(0;1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(0;21;-19)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$. $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $T = 3MA^2 + 2MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a + b + c$.

- A. $a + b + c = 0$ B. $a + b + c = 12$ C. $a + b + c = \frac{12}{5}$ D. $a + b + c = \frac{15}{4}$

Câu 23: Cho $\int_{-1}^5 f(x) dx = 5$, $\int_4^5 f(t) dt = -2$ và $\int_{-1}^4 g(u) du = \frac{1}{3}$. Tính $\int_{-1}^4 (f(x) + g(x)) dx$ bằng.

- A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{22}{3}$ C. $\frac{-20}{3}$ D. $\frac{10}{3}$

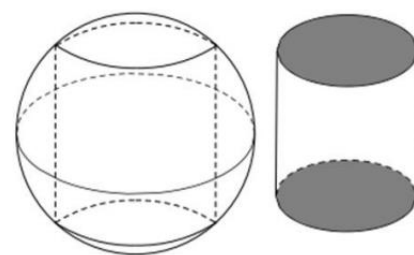
Câu 24: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\ln x}$, $y = 0$, $x = 1$ và $x = k$ ($k > 1$).

Gọi V_k là thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) quanh trục Ox. Biết rằng $V_k = \pi$, hãy chọn khẳng định đúng?

- A. $3 < k < 4$ B. $1 < k < 2$ C. $2 < k < 3$ D. $4 < k < 5$

Câu 25: Một khối đá có hình một khối cầu có bán kính R, người thợ thủ công mỹ nghệ cần cắt và gọt viên đá đó thành một viên đá cảnh có hình dạng là một khối trụ. Tính thể tích lớn nhất có thể của viên đá cảnh sau khi đã hoàn thiện.

- A. $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{3}$ B. $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{9}$
C. $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{6}$ D. $\frac{4\sqrt{3}\pi R^3}{12}$



LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đáp án D

$\overline{AB} = (2; 2; -6)$ và $I(2; 4; -1)$ là trung điểm của AB. Phương trình mặt phẳng trung trực của AB nhận véc tơ $\vec{n} = (1; 1; -3)$ và đi qua điểm I là

$$1(x-2) + 1(y-4) - 3(z+1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 3z - 9 = 0.$$

Câu 2: Đáp án C

Quay hình chữ nhật ABCD quanh cạnh AD. Khi đó hình trụ có $h = AD$ và $r = AB$ nên $V_1 = \pi r^2 h = \pi AB^2 \cdot AD$.

Quay hình chữ nhật ABCD quanh cạnh AB. Khi đó hình trụ có $h = AB$ và $r = AD$ nên $V_2 = \pi r^2 h = \pi AD^2 \cdot AB$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi AB^2 \cdot AD}{\pi AD^2 \cdot AB} = \frac{AB}{AD} = 3 \text{ nên } V_1 = 3V_2.$$

Câu 3: Đáp án A

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-1)^3}{3} + C = \frac{(2x-1)^3}{6} + C.$$

Câu 4: Đáp án C

Mệnh đề (I) đúng.

Mệnh đề (II) sai vì $\log_3 x^2 = 2 \log_3 x$ khi $x > 0$ nên điều kiện $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ là chưa đủ.

Mệnh đề (III) sai vì $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

Số mệnh đề đúng là 1.

Câu 5: Đáp án D

$$10^x = 10^{\log 2017} = 2017, e^y = e^{\ln 2017} = 2017 \rightarrow 10^x = e^y.$$

Câu 6: Đáp án B

$$z^4 - 3z^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = -1 = i^2 \\ z^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow z_1 = -i, z_2 = i, z_3 = -2, z_4 = 2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0 \Rightarrow T = 0.$$

Câu 7: Đáp án D

$$f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} = 0 \xrightarrow{x \in [1;4]} x = 3. \text{ So sánh các } f(1) = 10 = M, f(3) = 6 = m, f(4) = \frac{25}{4}.$$

$$\text{Vậy } M - m = 10 - 6 = 4.$$

Câu 8: Đáp án B

$$\text{Ta có: } \int f(x) dx = \int \left(3x^2 - 2x - \frac{1}{x^2} \right) dx = x^3 - x^2 + \frac{1}{x} + C = F(x)$$

$$\text{Lại có } F(1) + 2F(2) = C + 1 + 2 \left(C + \frac{9}{2} \right) = 3C + 10 = 40 \Rightarrow C = 10$$

$$\text{Do đó } F(-1) = -3 + 10 = 7.$$

Câu 9: Đáp án C

$$\text{Ta có: } y = \frac{x+1}{x^2 - 4|x| + 3} = \frac{x+1}{|x|^2 - 4|x| + 3} = \frac{x+1}{(|x|-1)(|x|-3)}$$

$$\text{Với } x \geq 0 \Rightarrow y = \frac{x+1}{(x-1)(x-3)} \text{ đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng.}$$

$$\text{Với } x < 0 \Rightarrow y = \frac{x+1}{(-x-1)(-x-3)} = \frac{1}{x+3} \text{ đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.}$$

Do đó đồ thị hàm số có 3 tiệm cận đứng.

Câu 10: Đáp án B

Ta có:

$$\log_a x > \log_b x > 0 > \log_c x \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\log_x a} > \frac{1}{\log_x b} > 0 \\ \log_x c < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x b > \log_x c > 0 \\ c < 1 \end{cases} \Leftrightarrow b > a > 1 > c.$$

Câu 11: Đáp án B

$$\text{Ta có: } \sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}(2\sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$= 1 - \frac{1}{2(1 - \cos^2 2x)} = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 2x)$$

$$\text{Khi đó đặt } t = \cos 2x \Rightarrow dt = -2\sin 2x dx. \text{ Đổi cận } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } I = \int_0^1 \frac{dt}{2 \cdot \frac{1}{2}(1+t^2)} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1}.$$

Câu 12: Đáp án A

Tiệm cận ngang của (C) là $y = 2$. Khi đó

$$S = \int_0^a \left| 2 - \frac{2x-1}{x+1} \right| dx = \int_0^a \left| \frac{3}{x+1} \right| dx = \int_0^a \frac{3dx}{x+1} = 3\ln|x+1| \Big|_0^a = 3\ln(a+1) = \ln 2017 \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{2017} - 1.$$

Câu 13: Đáp án B

$$\text{Ta có: } PT \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 - 3 = -m$$

$$\text{Xét hàm số } y = x^4 - 2x^2 - 3 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1; x = 1 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } y(0) = -3; y(\pm 1) = -4$$

$$\text{Phương trình có 3 nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} -m = -4 \\ -m > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m < 3 \end{cases}.$$

Câu 14: Đáp án A

Khi quay ΔOAB quanh trục Oy , ta được hình nón có bán kính đáy $r = OA$ và chiều cao $h = OB$. Theo bài ra, ta có $OA + OB = r + h = 1$ với $(0 < r, h < 1)$.

$$\text{Khi đó, thể tích khối nón là } V_{(N)} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 (1-r).$$

$$\text{Ta có } r^2(1-r^2) = 4 \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot (1-r) \leq 4 \cdot \frac{\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2} + 1-r\right)^3}{27} = \frac{4}{27} \Rightarrow V_{(N)} \leq \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{4}{27} = \frac{4\pi}{81}.$$

Tham khảo: Ta có thể đưa điểm B có tung độ âm về tung độ dương thì thể tích của khối nón không đổi.

$$\text{Gọi } \begin{cases} A(a;0) \\ B(0;b) \end{cases} (a,b > 0) \text{ suy ra phương trình đường thẳng } (AB): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow x = a - \frac{a}{b}y.$$

$$\text{Khi đó } V_{Oy} = \pi \int_a^b \left(a - \frac{a}{b}y\right)^2 dy = \frac{\pi a^2 b}{3}.$$

$$\text{Ta có } \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot b \leq \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + b\right)^3}{27} = \frac{4\pi}{81} \Rightarrow V_{\text{Max}} = \frac{4\pi}{81}.$$

Câu 15: Đáp án B

$$\text{Ta có } \log_{15} 10 = \frac{\log_5 10}{\log_5 15} = \frac{\log_5 (2.5)}{\log_5 (3.5)} = \frac{\log_5 2 + 1}{\log_5 3 + 1} \text{ mà } \log_5 3 = \frac{1}{a}; \log_5 2 = \frac{\log_5 4}{2} = \frac{1}{2b}.$$

$$\text{Khi đó } \log_{15} 10 = \frac{\frac{1}{2b} + 1}{\frac{1}{a} + 1} = \frac{\frac{2b+1}{2b}}{\frac{a+1}{a}} = \frac{a(2b+1)}{2b(a+1)} = \frac{a+2ab}{2b+2ab}.$$

Câu 16: Đáp án A

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (ABC) \text{ là } \frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1 \text{ mà } D(1;3;-2) \Rightarrow D \in (ABC).$$

Và ta thấy rằng $\overline{AC} = (-1;0;2)$ và $\overline{BD} = (-1;0;2)$ suy ra ABCD là hình bình hành.

Vậy O.ABCD là một hình chóp có đáy là hình bình hành, do đó có 5 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu gồm:

- Mặt phẳng đi qua trung điểm của AC, BD và song song với (SAD) hoặc (SBC).
- Mặt phẳng đi qua trung điểm của AD, BC đồng thời song song với (SAC) hoặc (SBD).
- Mặt phẳng đi qua trung điểm của OA, OB, OC, OD.

Câu 17: Đáp án D

$$\text{Ta có } y = \frac{2x - \sqrt{(m-1)x^2 + 1}}{x-1} = \frac{2x - |x| \sqrt{m-1 + \frac{1}{x^2}}}{x-1} = \frac{2 = \frac{|x|}{x} \cdot \sqrt{m-1 + \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{1}{x}}$$

Đồ thị hàm số đã cho có hai đường TCN $\Leftrightarrow m-1+\frac{1}{x^2} > 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1-m < 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Câu 18: Đáp án A

Phương trình $12^x + (4-m) \cdot 3^x - m = 0 \Leftrightarrow 12^x + 4 \cdot 3^x = m(3^x + 1) \Leftrightarrow m = \frac{12^x + 4 \cdot 3^x}{3^x + 1} (*)$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{12^x + 4 \cdot 3^x}{3^x + 1}$ trên khoảng $(-1; 0)$, có

$$f'(x) = \frac{12^x \cdot (3^x + 1) \cdot \ln 12 - (12^x - 4) \cdot \ln 3}{(3^x + 1)^2}.$$

Ta có $12^x \cdot (3^x + 1) \cdot \ln 12 - (12^x - 4) \cdot \ln 3 = 12^x \cdot (3^x \cdot \ln 12 - \ln 3) + 12^x \cdot \ln 2 + 4 \cdot \ln 3 > 0; \forall x \in (-1; 0)$.

Khi đó $f'(x) > 0; \forall x \in (-1; 0)$ suy ra $f(x)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Tính các giá trị $f(-1) = \frac{17}{16}; f(0) = \frac{5}{2}$ suy ra $\min f(x) = \frac{17}{16}$ và $\max f(x) = \frac{5}{2}$.

Nên để phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \min f(x) < m < \max f(x) \Rightarrow m \in \left(\frac{17}{16}; \frac{5}{2}\right)$.

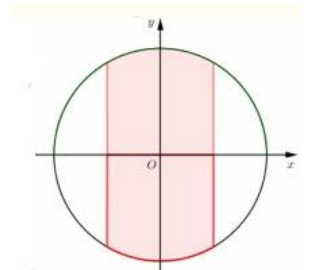
Câu 19: Đáp án A

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ với O là gốc tọa độ. Phương trình đường tròn tâm O, đường kính $AB = 8$ là $x^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow y^2 = 16 - x^2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{16 - x^2}$.

Diện tích hình phẳng cần tính gấp 2 lần diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi

đồ thị hàm số $y = \sqrt{16 - x^2}, y = 0, x = -2, x = 2$.

Khi đó $S = 2 \cdot S_{(H)} = 2 \cdot \int_{-2}^2 \sqrt{16 - x^2} dx \Rightarrow S = \frac{16}{3} \pi + 8\sqrt{3}$.

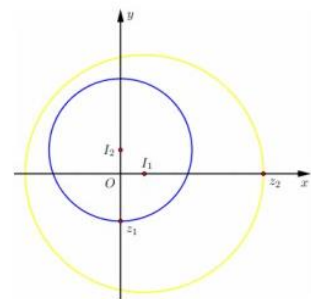


Câu 20: Đáp án A

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó, ta có

- $|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq 5 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \leq 25 \rightarrow$
- Tập hợp các số phức nằm trong hoặc trên đường tròn
- tâm $I_1(1; 0)$ bán kính $R_1 = 5$.

$|z-i| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \geq 3 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 \geq 9 \rightarrow$ Tập hợp các số phức nằm ngoài hoặc trên đường tròn tâm , bán kính $R_2 = 3$.



Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng $\begin{cases} z_{\min} = z_1 = 0 - 2i = -2i \\ z_{\max} = z_2 = 6 + 0i = 6 \end{cases} \Rightarrow z_1 + 2z_2 = 12 - 2i.$

Câu 21: Đáp án C

$$S = \int_1^2 x f(x^2) dx = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x^2) d(x^2) = \frac{1}{2} \int_1^4 f(u) d(u) = \frac{I}{2} \Rightarrow I = 5.$$

Câu 22: Đáp án D

Gọi điểm $I(x; y; z)$ sao cho $3\overline{IA} + 2\overline{IB} + \overline{IC} = \vec{0}$ suy ra điểm $I(1; 4; -3).$

Xét mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ có tâm $E(1; 1; 1)$ và bán kính $R = 1.$

Suy ra $\overline{IE} = (0; -3; 4) \Rightarrow IE = 5 > R = 1.$ Ta có

$$\begin{aligned} T &= 3\overline{MA}^2 + 2\overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = 3(\overline{MI} + \overline{IA})^2 + 2(\overline{MI} + \overline{IB})^2 + (\overline{MI} + \overline{IC})^2 \\ &= 6MI^2 + 2\overline{MI} \cdot (3\overline{IA} + 2\overline{IB} + \overline{IC}) + 3IA^2 + 2IB^2 + IC^2 = 6MI^2 + 3IA^2 + 2IB^2 + IC^2. \end{aligned}$$

Để tổng T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất vì tổng $3IA^2 + 2IB^2 + IC^2$ không đổi.

Suy ra M, E, I thẳng hàng mà $IE = 5$ và $EM = 1$ nên $\Rightarrow 5\overline{EM} = \overline{EI}.$

$$\text{Lại có } \overline{EI} = (0; 3; -4) \text{ và } \overline{EM} = (a-1; b-1; c-1) \text{ suy ra } \begin{cases} a=1 \\ 5(b-1)=3 \Rightarrow a+b+c=\frac{14}{5} \\ 5(c-1)=-4 \end{cases}$$

Câu 23: Đáp án B

$$\text{Ta có } \int_5^4 f(t) dt = -\int_5^4 f(t) dt = -2 \Rightarrow \int_5^4 f(t) dt = \int_5^4 f(x) dx = 2.$$

$$\text{Suy ra } \int_{-1}^5 f(x) dx + \int_4^5 f(t) dt = \int_{-1}^5 f(x) dx + \int_5^4 f(x) dx = \int_{-1}^4 f(x) dx = 7.$$

Khi đó

$$\int_{-1}^4 (f(x) + g(x)) dx + \int_{-1}^4 f(x) dx + \int_{-1}^4 g(x) dx = \int_{-1}^4 f(x) dx + \int_5^4 f(x) dx + \int_{-1}^4 g(u) du = 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}.$$

Câu 24: Đáp án C

$$\text{Thể tích khối tròn xoay cần tính là } V_{(H)} = \pi \cdot \int_1^k \ln x dx \Rightarrow I = \int_1^k \ln x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{cases} \text{ suy ra } I = x \cdot \ln x \Big|_1^k - \int_1^k dx = x \cdot (\ln x - 1) \Big|_1^k = k \cdot (\ln k - 1) + 1.$$

Mặt khác $V_{(H)} = \pi \cdot I = \pi \Rightarrow I = 1$ suy ra $k \cdot (\ln k - 1) + 1 = 1 \Leftrightarrow k \cdot (\ln k - 1) = 0 \Leftrightarrow k = e$.

Câu 25: Đáp án B

Gọi h và r ($0 < h, r < 2R$) lần lượt là chiều cao và bán kính mặt đáy của viên đá cảnh hình trụ

$\Rightarrow r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$ và áp dụng bất đẳng thức với 3 số $x, y, z > 0$ là:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \Leftrightarrow xyz \leq \sqrt{\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\right)^3}.$$

Thể tích viên đá là:

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h \Rightarrow \frac{V}{\pi\sqrt{2}} \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} \leq \sqrt{\left(\frac{\frac{h^2}{2} + R^2 - \frac{h^2}{4} + R^2 - \frac{h^2}{4}}{3} \right)^3} \\ &\Rightarrow \frac{V}{\pi\sqrt{2}} \leq \pi \frac{2R^3\sqrt{6}}{9} \Rightarrow V \leq \frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$