

MỤC LỤC

	BÀI 4. KHOẢNG CÁCH.....	2
2	 (A). Tóm tắt kiến thức	
4	 (B). Phân dạng toán cơ bản	
	•Dạng ❶: Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng.....	4
	•Dạng ❷: Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song.....	6
	•Dạng ❸: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.....	7
	•Dạng ❹: Công thức tính thể tích của khối chóp, khối lăng trụ, khối hộp 9	
12	 (C). Dạng toán rèn luyện	
	•Dạng ❶: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	12
	•Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai.....	68
	•Dạng ❸: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	94

1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG, ĐẾN MỘT MẶT PHẪNG

Định nghĩa

- ✓ Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng a thì độ dài đoạn MH được gọi là khoảng cách từ M đến đường thẳng a , kí hiệu $d(M, a)$. Vậy $d(M, a) = MH$.
- ✓ Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (P) thì độ dài đoạn MH được gọi là khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) , kí hiệu $d(M, (P))$. Vậy $d(M, (P)) = MH$.

Chú ý:

- ✓ Ta quy ước: $d(M, a) = 0$ khi và chỉ khi M thuộc a ,
- ✓ $d(M, (P)) = 0$ khi và chỉ khi M thuộc (P) .

Nhận xét:

- ✓ a) Lấy điểm N tùy ý trên đường thẳng a , ta luôn có $d(M, a) \leq MN$.
- ✓ b) Lấy điểm N tùy ý trên mặt phẳng (P) , ta luôn có $d(M, (P)) \leq MN$.

2. KHOẢNG CÁCH GIỮA CÁC ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

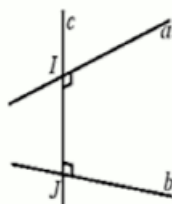
Định nghĩa

- ✓ Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song a và b là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến b , kí hiệu $d(a, b)$.
- ✓ Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P) , kí hiệu $d(a, (P))$.
- ✓ Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là khoảng cách từ một điểm bất kì trên (P) đến (Q) , kí hiệu $d((P), (Q))$.

3. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

✍ Định nghĩa

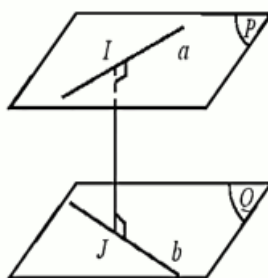
- ✓ Đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b được gọi là đường vuông góc chung của a và b .
- ✓ Nếu đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b cắt chúng lần lượt tại I và J thì đoạn IJ gọi là đoạn vuông góc chung của a và b .
- ✓ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó, kí hiệu $d(a, b)$.



Hình 7

✍ Chú ý:

- ✓ a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b bằng khoảng cách giữa một trong hai đường đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường còn lại.
- ✓ b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.



Hình 8

Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

• Dạng ①: Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

✍ Phương pháp

✍ Định nghĩa

- ✓ Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng a thì độ dài đoạn MH được gọi là khoảng cách từ M đến đường thẳng a , kí hiệu $d(M, a)$.

- ✓ Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (P) thì độ dài đoạn MH được gọi là khoảng cách từ M đến (P) , kí hiệu $d(M, (P))$.

✍ **Chú ý:**

- ✓ Ta quy ước:

- ✓ $d(M, a) = 0$ khi và chỉ khi M thuộc a ;
- ✓ $d(M, (P)) = 0$ khi và chỉ khi M thuộc (P) .

✍ **Nhận xét:**

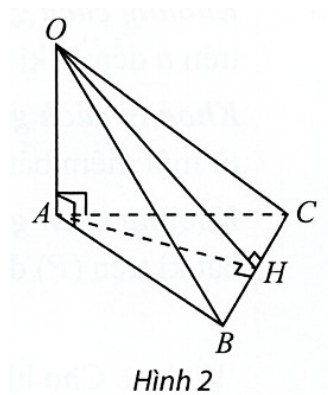
- ✓ Lấy điểm N tùy ý trên đường thẳng a , ta luôn có $d(M, a) \leq MN$.
- ✓ Lấy điểm N tùy ý trên mặt phẳng (P) , ta luôn có $d(M, (P)) \leq MN$.

📖 **Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Cho hình chóp $O \cdot ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $OA \perp (ABC)$. Cho biết $OA = a$.

- Tính khoảng cách từ điểm O đến (ABC) .
- Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng BC .

Lời giải



Hình 2

- Ta có $OA \perp (ABC)$, suy ra $d(O, (ABC)) = OA = a$.
- Vẽ $AH \perp BC$, ta có $OH \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc), suy ra $d(O, BC) = OH$.

Tam giác ABC đều có cạnh bằng a suy ra $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông OAH , ta có $OH = \sqrt{OA^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Vậy ta có $d(O, BC) = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

•Dạng ②: Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

✍ **Phương pháp**

✍ **Định nghĩa**

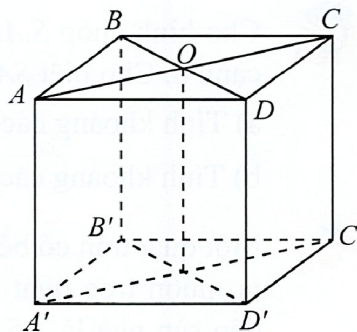
- ✓ Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song a và b là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến b , kí hiệu $d(a,b)$.
- ✓ Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P) , kí hiệu $d(a,(P))$.
- ✓ Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là khoảng cách từ một điểm bất kì trên (P) đến (Q) , kí hiệu $d((P),(Q))$.

📖 Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính theo a :

- a) Khoảng cách giữa đường thẳng DD' và $(AA'C'C)$;
- b) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AA'D'D)$ và $(BB'C'C)$.

Lời giải



Hình 5

$$DD' \parallel AA', d(DD', (AA'C'C)) = d(D, (AA'C'C))$$

a) Ta có .

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có $DO \perp AC$ và $DO \perp AA'$, suy ra $DO \perp (AA'C'C)$.

$$d(DD', (AA'C'C)) = d(D, (AA'C'C)) = DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy .

$$(AA'D'D) // (BB'C'C) \quad d((AA'D'D), (BB'C'C)) = d(A, (BB'C'C))$$

b) Ta có suy ra

Do $AB \perp BB'$ và $AB \perp BC$, suy ra $AB \perp (BB'C'C)$.

$$d((AA'D'D), (BB'C'C)) = AB = a$$

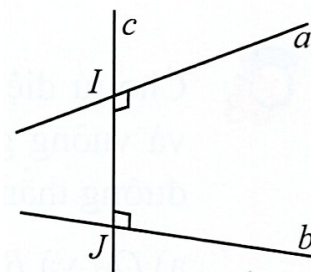
Vậy

•Dạng ③: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

✍ **Phương pháp**

✍ **Định nghĩa**

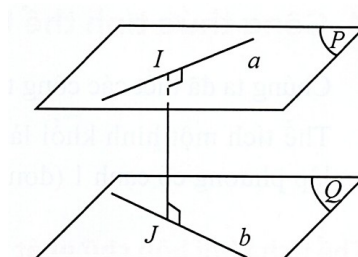
- ✓ Đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b được gọi là đường vuông góc chung của a và b .
- ✓ Nếu đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b cắt chúng lần lượt tại I và J thì đoạn IJ gọi là đoạn vuông góc chung của a và b .
- ✓ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó, kí hiệu $d(a, b)$.



Hình 7

✍ **Chú ý:**

- ✓ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b bằng khoảng cách giữa một trong hai đường đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường còn lại.
- ✓ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.



Hình 8

Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , cạnh $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

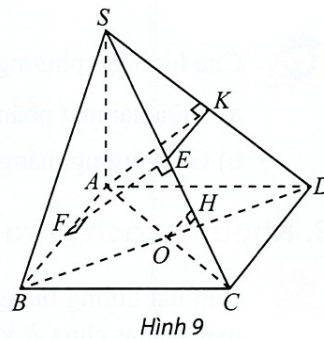
a) SB và CD ;

b) AB và SC .

Lời giải

a) Ta có $BC \perp SA$ và $BC \perp AB$, suy ra $BC \perp SB$.

Mặt khác $BC \perp CD$, suy ra BC là đoạn vuông góc chung của hai đường SB và CD . Ta có $d(SB, CD) = BC = a$.



b) Cách 1. Ta có $AB \perp (SAD)$ và SD là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAD) . Vẽ $AK \perp SD, KE \parallel AB, EF \parallel AK$. Ta có $AB \perp AK, AK \perp SD$, suy ra $AK \perp SC$. Do $EF \parallel AK$, suy ra ta cũng có $EF \perp AB$ và EF cắt AB tại $F, EF \perp SC$ và EF cắt SC tại E .

Các kết quả trên chứng tỏ EF là đoạn vuông góc chung của AB và SC .

Trong tam giác SAD vuông cân tại A ta có $AK = \frac{SD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$d(AB, SC) = EF = AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy

Cách 2. Ta có mặt phẳng (SCD) chứa SC và song song với AB , suy ra:

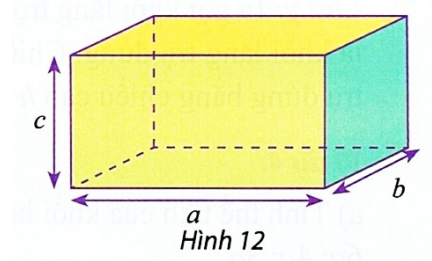
$$d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

•Dạng ④: Công thức tính thể tích của khối chóp, khối lăng trụ, khối hộp

✍ **Phương pháp**

✍ **Thể tích khối hộp chữ nhật**

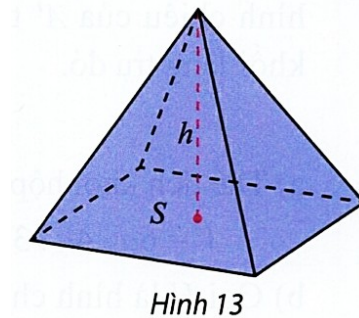
- ✓ Thể tích khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước $V = abc$.



✍ **Thể tích khối chóp**

- ✓ Khoảng cách h từ đỉnh đến mặt phẳng đáy của một hình chóp gọi là chiều cao của hình chóp đó. Người ta chứng minh được công thức sau đây:
- ✓ Thể tích khối chóp bằng một phần ba diện tích đáy nhân với chiều cao

$$V = \frac{1}{3}Sh$$



✍ **Thể tích khối chóp cụt đều**

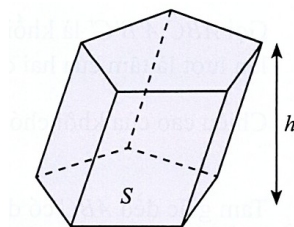
- ✓ Để tìm thể tích khối chóp cụt đều, ta sử dụng công thức sau đây:

$$V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S')$$

với h là chiều cao và S, S' là diện tích hai đáy.

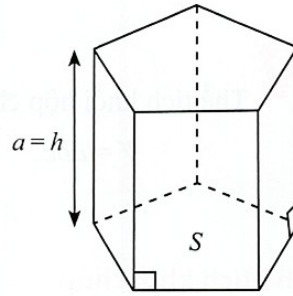
✍ **Thể tích khối lăng trụ**

- ✓ Khoảng cách h giữa hai mặt phẳng đáy của hình lăng trụ là chiều cao của hình lăng trụ đó.
- ✓ Thể tích khối lăng trụ bằng tích diện tích đáy và chiều cao $V = Sh$.



✍ **Chú ý:**

- ☑ Ta gọi khối lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy là khối lăng trụ đứng. Chiều dài cạnh bên a của khối lăng trụ đứng bằng chiều cao h và ta có công thức:
 $V = Sa$.



Hình 16

📖 Các ví dụ minh họa

Câu 1: a) Tính thể tích của khối hộp chữ nhật có ba kích thước là: $6a; 4a; 3a$.

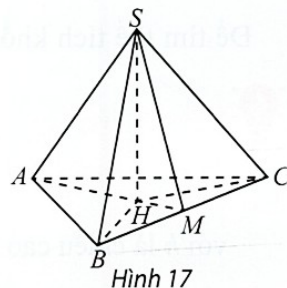
b) Tính thể tích khối tứ diện đều $SABC$ cạnh a .

c) Cho khối lăng trụ $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $AA' = 2a$, hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ trùng với giao điểm O của AC và BD . Tính thể tích khối lăng trụ đó.

Lời giải

a) Thể tích khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước: $V = 6a \cdot 4a \cdot 3a = 72a^3$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S xuống (ABC) . Ta có ba tam giác vuông SHA, SHB, SHC bằng nhau, suy ra $HA = HB = HC$. Vậy H là tâm của tam giác đều ABC .

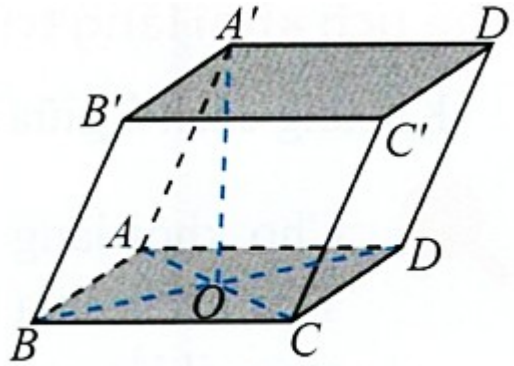


Hình 17

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AH = \frac{2}{3} AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}, SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Ta có:

Khối tứ diện đều $SABC$ có thể tích là $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a \sqrt{6}}{3} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$.



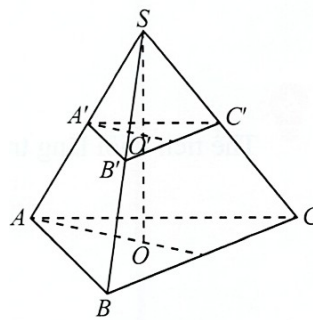
Hình 18

c) Chiều cao của khối lăng trụ: $h = A'O = \sqrt{A'A^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$.

Thể tích khối lăng trụ: $V = S \cdot h = 4a^2 \cdot a\sqrt{2} = 4a^3 \sqrt{2}$.

Câu 2: Cắt khối chóp tam giác đều $S.ABC$ với cạnh đáy bằng a và chiều cao $2a$ bởi một mặt phẳng song song với đáy và đi qua trung điểm các cạnh bên. Tính thể tích khối chóp cắt đều được tạo thành.

Lời giải



Hình 19

Gọi $ABC \cdot A'B'C'$ là khối chóp cắt đều được tạo thành, O và O' lần lượt là tâm của hai đáy ABC và $A'B'C'$ (Hình 19). Ta có:

$$h = OO' = \frac{SO}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

Chiều cao của khối chóp cắt đều là a ;

$$S = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Tam giác đều ABC có diện tích: $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$;

Tam giác đều $A'B'C'$ có cạnh $A'B' = \frac{AB}{2}$ nên có diện tích: $S' = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{16} = \frac{S}{4}$.

Do đó, thể tích khối chóp cắt đều được tạo thành là:

$$V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S') = \frac{1}{3}a\left(S + \frac{S}{2} + \frac{S}{4}\right) = \frac{7aS}{12} = \frac{7a}{12} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{7a^3 \sqrt{3}}{48}.$$

©. Dạng toán rèn luyện

• Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy là $a\sqrt{2}$ và tam giác SAC đều. Tính độ dài cạnh bên của hình chóp.

- A. $2a$. B. $a\sqrt{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. a .

Lời giải

Chọn A

Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nên $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng $a\sqrt{2}$ nên $AC = 2a$.

Tam giác SAC đều nên cạnh bên $SA = AC = 2a$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = 3a, BD = 4a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC . Biết AC vuông góc BD . Tính MN .

- A. $MN = \frac{5a}{2}$. B. $MN = \frac{7a}{2}$. C. $MN = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. D. $MN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

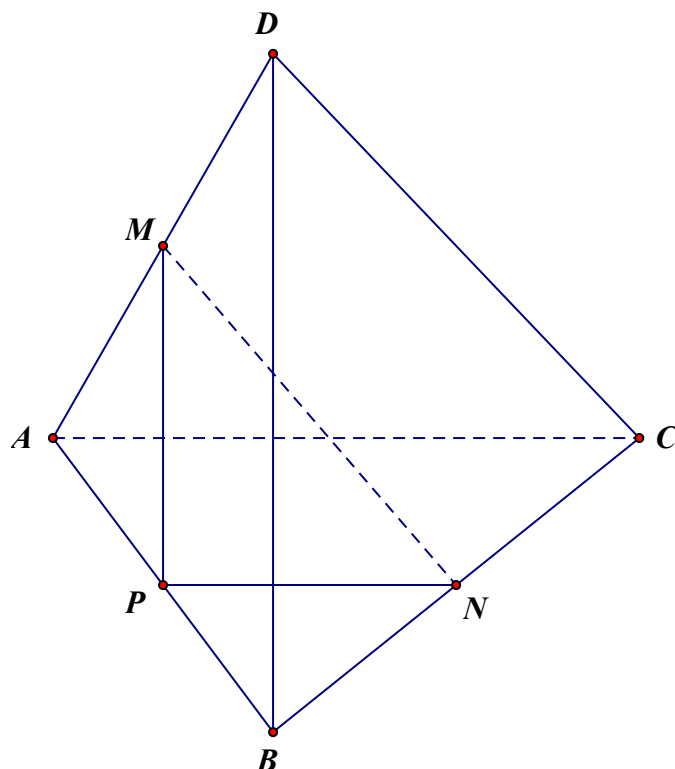
Lời giải

Chọn A

Gọi P là trung điểm AB

Ta có $\begin{cases} AC \parallel PN \\ BD \parallel PM \end{cases} \Rightarrow PN \perp PM$ và $PN = \frac{AC}{2} = \frac{3a}{2}; PM = \frac{BD}{2} = 2a$

$$MN = \sqrt{PM^2 + PN^2} = \frac{5a}{2}$$



Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$, góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) là 60° . Độ dài cạnh SA bằng

A. $\frac{3a}{2}$.

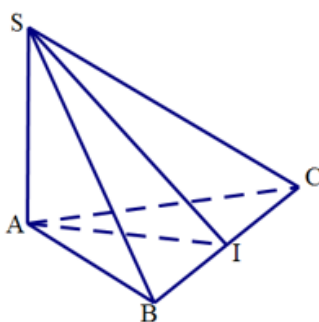
B. $\frac{a}{2}$.

C. $a\sqrt{3}$.

D. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm BC , khi đó $BC \perp AI$

Mặt khác $BC \perp AI, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SI$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) là $\angle SIA$.

Tam giác SIA vuông tại A nên $\tan \angle SIA = \frac{SA}{AI} \Leftrightarrow SA = AI \cdot \tan \angle SIA = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}$.

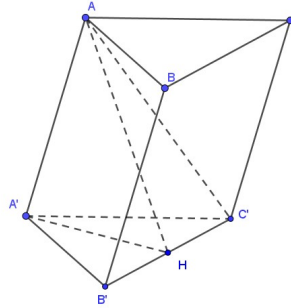
Câu 4: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu H của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm của $B'C'$. Tính theo a khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy của lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{a}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Lời giải

Chọn A

Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° nên $\angle AA'H = 30^\circ$.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $AH = AA' \cdot \sin \angle AA'H = AA' \cdot \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$.

Câu 5: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AD = 2a$, $CD = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Đường chéo AC' có độ dài bằng

A. $a\sqrt{5}$.

B. $a\sqrt{7}$.

C. $a\sqrt{6}$.

D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{7}.$$

Câu 6: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AD = 2a$, $CD = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Đường chéo AC' có độ dài bằng:

A. $a\sqrt{5}$.

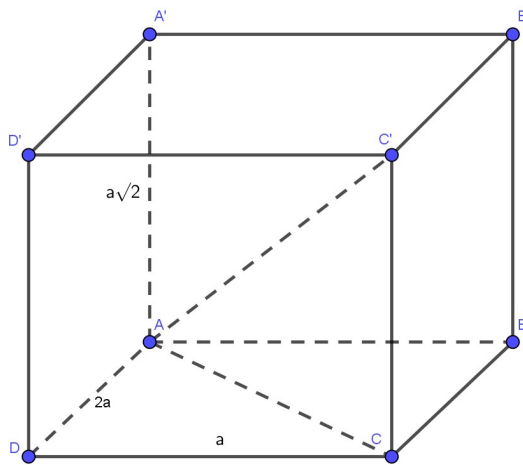
B. $a\sqrt{7}$.

C. $a\sqrt{6}$.

D. $a\sqrt{3}$.

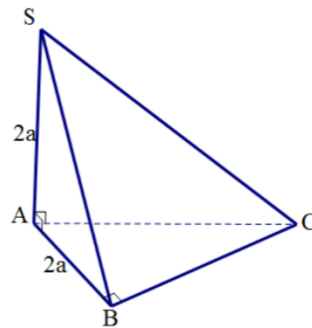
Lời giải

Chọn B



Ta có $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = a\sqrt{5}$. Nên $AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = \sqrt{5a^2 + 2a^2} = a\sqrt{7}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = AB = 2a$, tam giác ABC vuông tại B (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng



A. $a\sqrt{3}$.

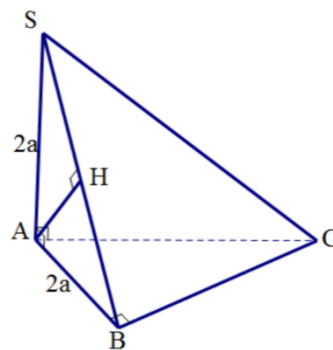
B. a .

C. $2a$.

D. $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm cạnh SB .

$\left. \begin{array}{l} AH \perp BC \text{ (} BC \perp (SAB) \text{)} \\ AH \perp SB \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp (SBC)$

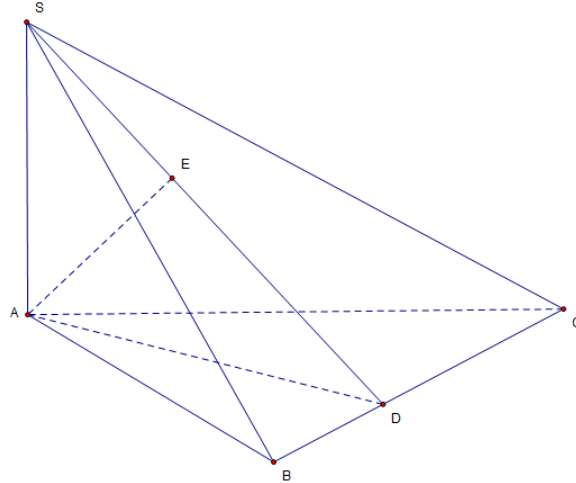
Do đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $AH = \frac{SB}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Câu 8: Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. B. $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. C. $\frac{2a\sqrt{3}}{19}$. D. $\frac{2a\sqrt{38}}{19}$.

Lời giải

Chọn B



Từ A kẻ $AD \perp BC$ mà $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$
 $\Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SBC)$ mà $(SAD) \cap (SBC) = SD$
 $\Rightarrow$ Từ A kẻ $AE \perp SD \Rightarrow AE \perp (SBC)$
 $\Rightarrow d(A; (SBC)) = AE$

Trong $\triangle ABC$ vuông tại A ta có: $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{4}{3a^2}$

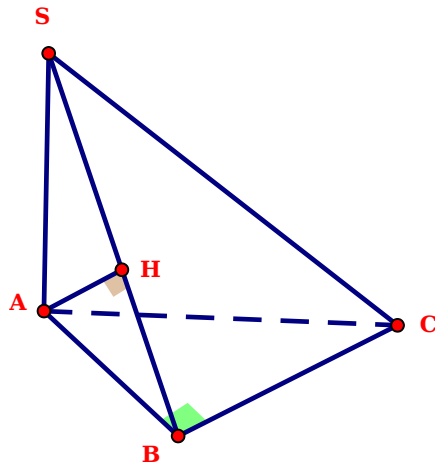
Trong $\triangle SAD$ vuông tại A ta có: $\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow AE = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $2SA = AC = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là

- A. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Kẻ $AH \perp SB (H \in SB)$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA (SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \subset (SAB)$.

Vì $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Do đó khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $d_{(A, (SBC))} = AH$.

Xét tam giác ABC vuông cân tại B , có $AC = 2a \Rightarrow AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a$.

Xét tam giác SAB vuông tại A , ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2}$
 $\Rightarrow AH^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{6}a}{3}$.

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $d_{(A, (SBC))} = AH = \frac{\sqrt{6}a}{3}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SB = 3a, AB = 4a, BC = 2a$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{12\sqrt{61}a}{61}$.

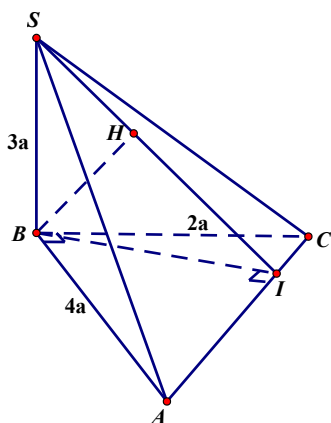
B. $\frac{3\sqrt{14}a}{14}$.

C. $\frac{4a}{5}$.

D. $\frac{12\sqrt{29}a}{29}$.

Lời giải

Chọn A



Từ B kẻ $BI \perp AC$ nối S với I và kẻ $BH \perp SI$ để thấy BH là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC)

Ta có $B.SAC$ là tam diện vuông tại B nên:

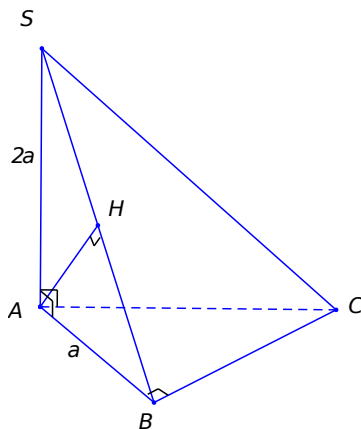
$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BS^2} + \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BA^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{16a^2} = \frac{61}{144a^2} \Rightarrow BH = \frac{12\sqrt{61}a}{61}$$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A.** $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}a}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}a}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Kẻ $AH \perp SB$. Khi đó $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH$ là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

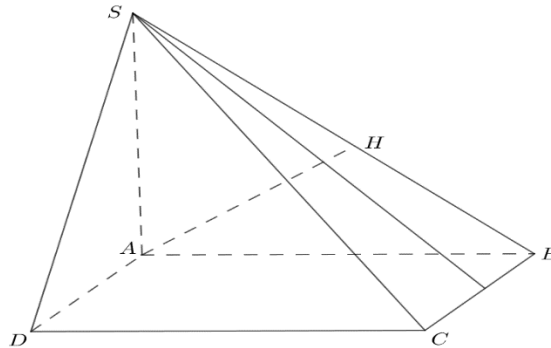
Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{4a^2}{5} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{5}a}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. C. $\frac{\sqrt{6}a}{6}$. D. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow \begin{cases} (SAB) \perp (SBC) \\ (SAB) \cap (SBC) = SB \end{cases}$

Trong mặt phẳng (SAB) : Kẻ $AH \perp SB \Rightarrow AH = d(A; (SBC))$

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2}$.

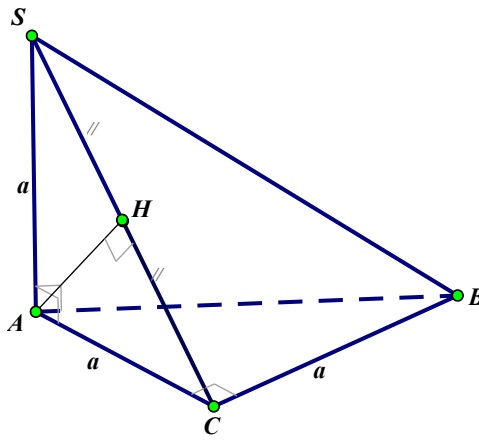
$\Rightarrow d(A; (SBC)) = AH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C , $BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\sqrt{2}a$. B. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Vì
$$\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$$

Khi đó $(SBC) \perp (SAC)$ theo giao tuyến là SC .

Trong (SAC) , kẻ $AH \perp SC$ tại H suy ra $AH \perp (SBC)$ tại H .

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng AH .

Ta có $AC = BC = a$, $SA = a$ nên tam giác SAC vuông cân tại A .

Suy ra
$$AH = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.$$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a}{2}$.

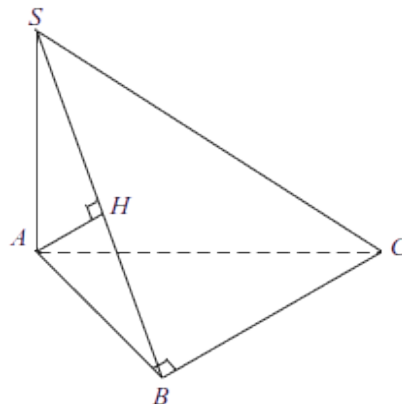
B. a .

C. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ $AH \perp SB$ trong mặt phẳng (SBC)

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

Vậy $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 15: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BDA') .

A. $d = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

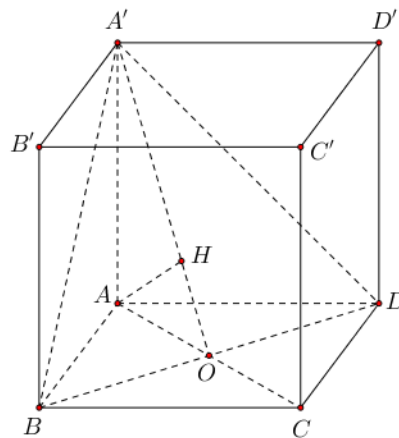
B. $d = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

C. $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D. $d = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp AA' \Rightarrow BD \perp (AA'O) \end{cases}$

Suy ra $(BDA') \perp (AA'O)$.

Kẻ $AH \perp A'O \Rightarrow AH \perp (BDA')$.

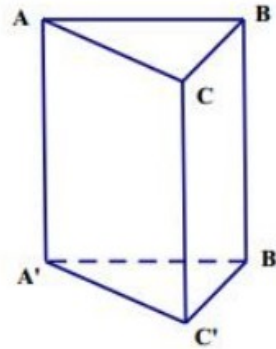
Suy ra $AH = d(A, (BDA'))$.

Xét tam giác $AA'O$ vuông tại A có $AA' = 1$, $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$AH = \frac{AA' \cdot AO}{\sqrt{AA'^2 + AO^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $d(A, (BDA')) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ đứng $ABCA'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$, (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ là



- A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{7}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn C

Vì lăng trụ $ABCA'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $(ABC) \perp (BCC'B')$.

Do đó kẻ $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (BCC'B')$.

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ là đoạn AH.

Ta có $AC = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$.

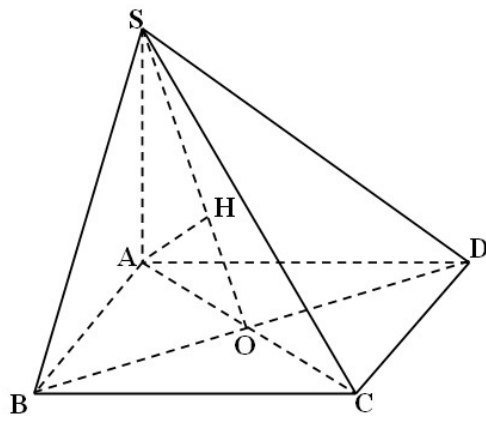
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, SA vuông góc với mặt đáy. Hỏi mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. $d(B, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$. B. $d(A, (SBD)) = d(B, (SAC))$.
C. $d(C, (SAB)) = d(C, (SAD))$. D. $d(S, (ABCD)) = SA$.

Lời giải

Chọn B



Vì O là trung điểm của BD nên $d(B, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$. Do đó câu A đúng.

- Kẻ AH vuông góc với SO mà hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) vuông góc với nhau theo giao tuyến SO , suy ra AH vuông góc với mặt phẳng (SBD) .

Ta có $d(A, (SBD)) = AH < OA$ và $d(B, (SAC)) = OB = OA$ nên $d(A, (SBD)) < d(B, (SAC))$. Do đó câu B sai.

Ta có $d(C, (SAB)) = CB$ và $d(C, (SAD)) = CD$ nên $d(C, (SAB)) = d(C, (SAD))$. Do đó câu C đúng.

Vì SA vuông góc với mặt đáy nên $d(S, (ABCD)) = SA$. Do đó câu D đúng.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC . Khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng nào?

A. IB .

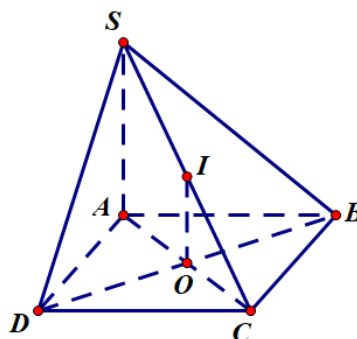
B. IC .

C. IA .

D. IO .

Lời giải

Chọn D



Từ giả thiết suy ra OI là đường trung bình của $\triangle SAC$, do đó $OI \parallel SA$.

Ta có $\begin{cases} IO \parallel SA \\ SA \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow IO \perp (ABCD)$.
 Vậy $d(I, (ABCD)) = OI$.

Câu 19: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Gọi M là trung điểm của SD . Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

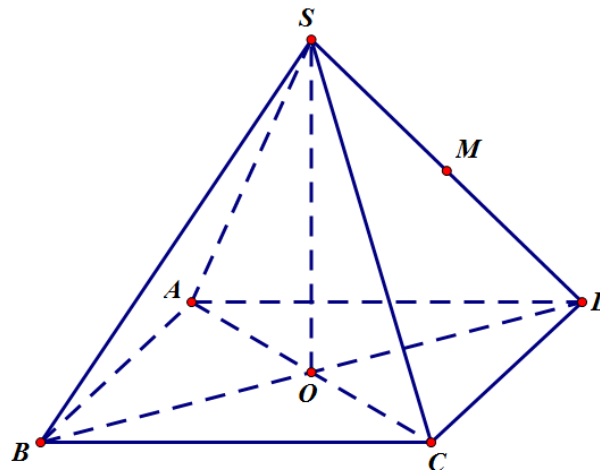
B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. $\frac{a}{4}$.

Lời giải

Chọn B



$$d(M, (SAC)) = \frac{1}{2} d(D, (SAC)) = \frac{1}{2} DO = \frac{1}{4} BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 20: Cho tứ diện đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng $2a$, gọi M là điểm thuộc cạnh AD sao cho $DM = 2MA$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (BCD)

A. $\frac{2a\sqrt{6}}{9}$.

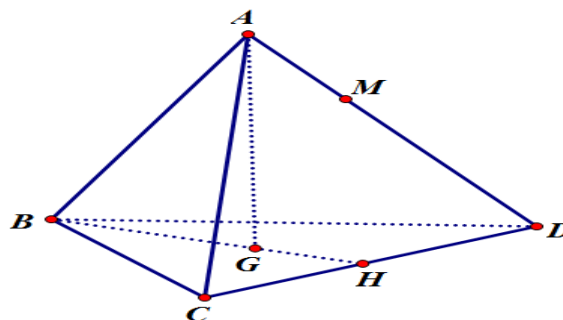
B. $a\sqrt{6}$.

C. $\frac{4a\sqrt{6}}{9}$.

D. $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm BC , G là trọng tâm tam giác BCD , AG là đường cao của tứ diện

Xét tam giác đều BCD có $BH = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow BG = \frac{2}{3}BH = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Xét tam giác vuông ABG có $AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}a}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Mà $d(M; (BCD)) = \frac{2}{3}d(A; (BCD)) = \frac{2}{3}AG = \frac{4\sqrt{6}}{9}a$.

Câu 21: Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 3, đáy ABC có diện tích bằng 10. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A.** 2. **B.** 15. **C.** 10. **D.** 30.

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 3 = 10$.

Câu 22: Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 3, đáy ABC có diện tích bằng 10. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A.** 15. **B.** 10. **C.** 2. **D.** 30.

Lời giải

Chọn B

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}hB = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 10 = 10$.

Câu 23: Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 5, đáy ABC có diện tích bằng 6. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A.** 11. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 30.

Lời giải

Chọn B

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot Sh = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 5 = 10$

Câu 24: Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 5, đáy ABC có diện tích bằng 6. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A.** 30. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 6 = 10$.

Câu 25: Cho khối chóp có diện tích đáy $B=7$ và chiều cao $h=6$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

- A. 42. B. 126. C. 14. D. 56.

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} \cdot 7 \cdot 6 = 14$.

Câu 26: Cho khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h . Thể tích V của khối lăng trụ đã cho được tính theo công thức nào dưới đây?

- A. $V = \frac{1}{3} Bh$. B. $V = \frac{4}{3} Bh$. C. $V = 6Bh$. D. $V = Bh$.

Lời giải

Chọn D

Định nghĩa thể tích khối lăng trụ là $V = Bh$.

Câu 27: Cho khối lăng trụ có diện tích đáy là $3a^2$ và chiều cao $2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- A. a^3 . B. $6a^3$. C. $3a^3$. D. $2a^3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $V = B \cdot h = 3a^2 \cdot 2a = 6a^3$.

Câu 28: Thể tích khối lập phương cạnh 2 bằng

- A. 6. B. 8. C. 4. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối lập phương cạnh a là $V = a^3$.

Vậy thể tích khối lập phương cạnh 2 là: $V = 2^3 = 8$.

Câu 29: Cho khối hộp chữ nhật có 3 kích thước $3; 4; 5$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng?

- A. 10. B. 20. C. 12. D. 60.

Lời giải

Chọn D

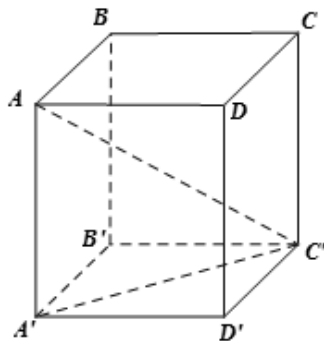
Thể tích của khối hộp đã cho bằng $V = 3.4.5 = 60$

Câu 30: Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$.

- A. $V = a^3$ B. $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$ C. $V = 3\sqrt{3}a^3$ D. $V = \frac{1}{3}a^3$

Lời giải

Chọn A



Giả sử khối lập phương có cạnh bằng $x; (x > 0)$

Xét tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại B' ta có:

$$A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow A'C' = x\sqrt{2}$$

Xét tam giác $A'AC'$ vuông tại A' ta có

$$AC'^2 = A'A^2 + A'C'^2 \Leftrightarrow 3a^2 = x^2 + 2x^2 \Leftrightarrow x = a$$

Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = a^3$.

Câu 31: Lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng:

- A. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ B. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{27\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn A

Đáy hình lăng trụ là tam giác đều cạnh bằng 3 nên $S = \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao của hình lăng trụ bằng $h = 3$

$$V = S.h = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot 3 = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$

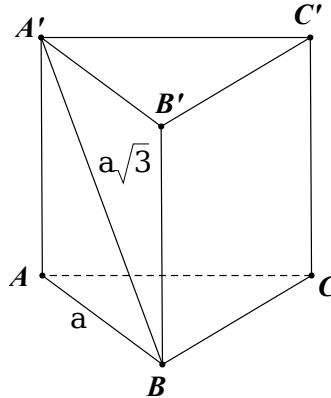
Thể tích

Câu 32: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a^3}{6}$ C. $\frac{a^3}{2}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{a^2}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = AA' \cdot S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 33: Một khối chóp có diện tích đáy bằng 6 và chiều cao bằng 5. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. 10. B. 30. C. 90. D. 15.

Lời giải

Chọn A

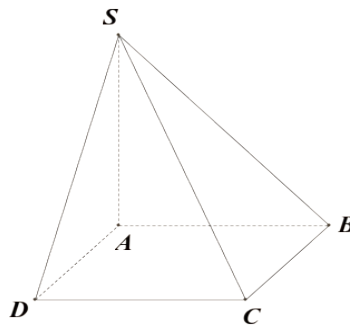
$$V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 5 = 10.$$

Câu 34: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$

- A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$ B. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{4}$ C. $V = \sqrt{2}a^3$ D. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA$ là đường cao của hình chóp

Thể tích khối chóp $S.ABCD$: $V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a \sqrt{2} \cdot a^2 = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$.

Câu 35: Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 4$, $AB = 6$, $BC = 10$ và $CA = 8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = 32$

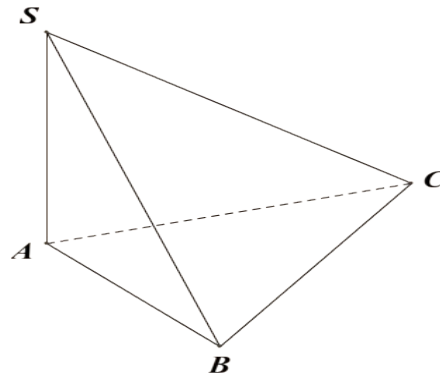
B. $V = 192$

C. $V = 40$

D. $V = 24$

Lời giải

Chọn A



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ suy ra $\triangle ABC$ vuông tại A . $S_{ABC} = 24$, $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = 32$

Câu 36: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$

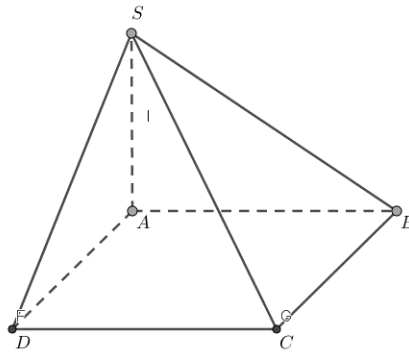
B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$

C. $\sqrt{2}a^3$

D. $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $S_{ABCD} = a^2$. $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy và thể tích của khối chóp đó bằng $\frac{a^3}{4}$. Tính cạnh bên SA .

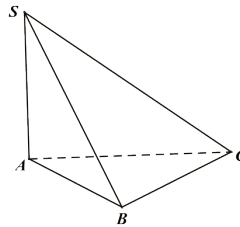
A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C. $a\sqrt{3}$.

D. $2a\sqrt{3}$.

Lời giải



$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SA \Rightarrow SA = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = a\sqrt{3}$$

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a}{4}$

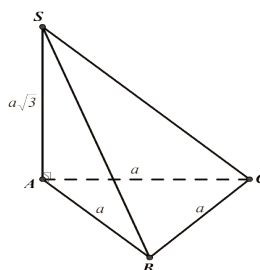
B. $\frac{a^3}{2}$

C. $\frac{a^3}{4}$

D. $\frac{3a^3}{4}$

Lời giải

Chọn C



Ta có SA là đường cao hình chóp

Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy thể tích cần tìm là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{4}$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên SC vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SC = a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

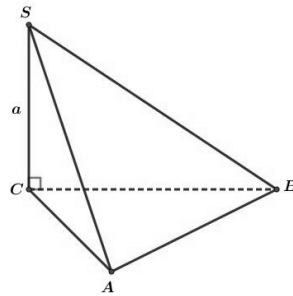
B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Lời giải

Chọn D



$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Câu 40: Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) biết đáy ABC là tam giác vuông tại B và $AD = 10, AB = 10, BC = 24$. Tính thể tích của tứ diện $ABCD$.

A. $V = 1200$

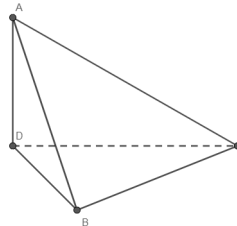
B. $V = 960$

C. $V = 400$

D. $V = \frac{1300}{3}$

Lời giải

Chọn C



Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3} AD \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{6} 10 \cdot 10 \cdot 24 = 400$

Câu 41: Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABD đều cạnh bằng 2, tam giác ABC vuông tại B , $BC = \sqrt{3}$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và CD bằng $\frac{\sqrt{11}}{2}$. Khi đó độ dài cạnh CD là

A. $\sqrt{2}$.

B. 2.

C. 1.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Dựng hình chữ nhật $ABCE$, gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CE , $MH \perp DN$ tại H

Ta có

$$\begin{cases} AB \perp DM \\ AB \perp MN \end{cases} \Rightarrow AB \perp (DMN) \Rightarrow CE \perp (DMN) \Rightarrow MH \perp CE$$

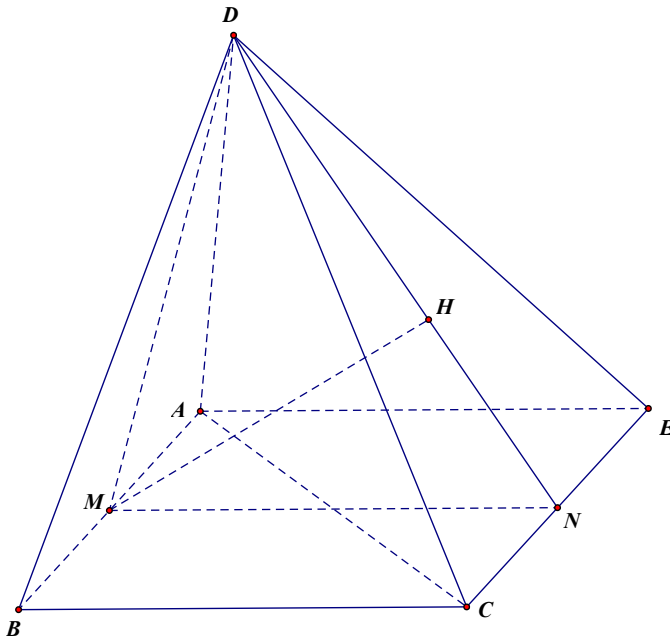
$$\begin{cases} MH \perp DN \\ MH \perp CE \end{cases} \Rightarrow MH \perp (CDE) \Rightarrow d(AB, CD) = d[M; (CDE)] = MH = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

tại H

Tam giác DMN có $DM = MN = \sqrt{3} \Rightarrow H$ là trung điểm DN , mà $HN = \sqrt{MN^2 - MH^2} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow DN = 1$$

Xét tam giác DNC vuông tại N $CD = \sqrt{DN^2 + CN^2} = \sqrt{2}$.



Câu 42: Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt cùng phía so với $(ABCD)$ song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng (β) lần lượt cắt các nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt tại A', B', C', D' thỏa mãn $AA' = 2, BB' = 3, CC' = 4$. Hãy tính DD' .

A. 3.

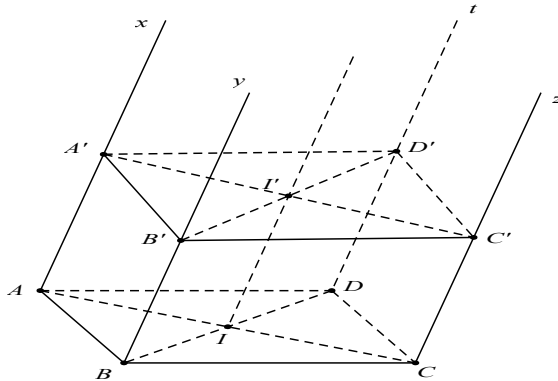
B. 7.

C. 2.

D. 5.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là giao của AC và BD . I' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Khi đó II' là đường trung

binh của các hình thang $ACC'A'$ và $BDD'B'$. Theo tính chất của hình thang ta có

$$2II' = BB' + DD' = AA' + CC' = 2 + 4 = 6 \Rightarrow DD' = 3.$$

Câu 43: Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABD đều cạnh bằng 2, tam giác ABC vuông tại B , $BC = \sqrt{3}$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và CD bằng $\frac{\sqrt{11}}{2}$. Khi đó độ dài cạnh CD là

A. $\sqrt{2}$.

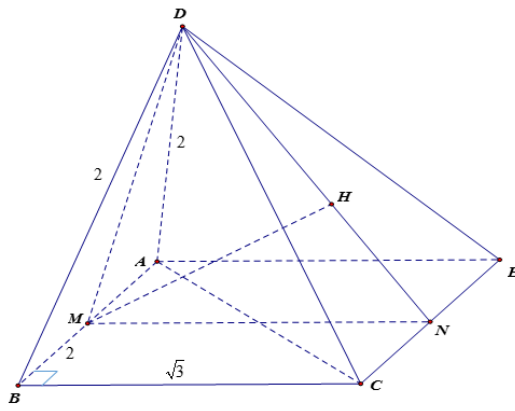
B. 2.

C. 1.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Dựng hình chữ nhật $ABCE$, gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CE , $MH \perp DN$ tại H

Ta có

$$\begin{cases} AB \perp DM \\ AB \perp MN \end{cases} \Rightarrow AB \perp (DMN) \Rightarrow CE \perp (DMN) \Rightarrow MH \perp CE$$

$$\begin{cases} MH \perp DN \\ MH \perp CE \end{cases} \Rightarrow MH \perp (CDE) \text{ tại } H \Rightarrow d(AB, CD) = d[M; (CDE)] = MH = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Tam giác DMN có $DM = MN = \sqrt{3} \Rightarrow H$ là trung điểm DN , mà $HN = \sqrt{MN^2 - MH^2} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow DN = 1$$

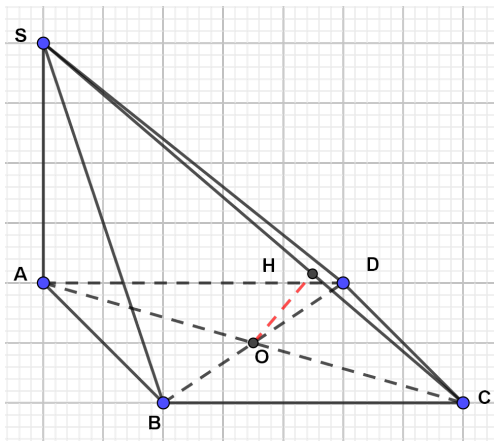
Xét tam giác DNC vuông tại N $CD = \sqrt{DN^2 + CN^2} = \sqrt{2}$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Gọi O là tâm của $ABCD$, tính khoảng cách từ O đến SC .

- A.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

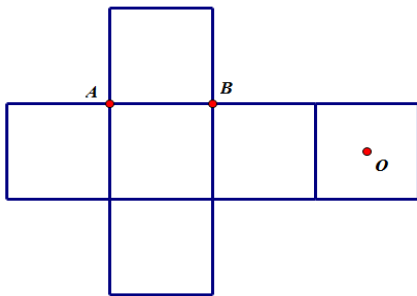


Kẻ $OH \perp SC \Rightarrow d(O, SC) = OH$.

$$OC = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{6}$$

$$\Delta OHC \approx \Delta SAC \Rightarrow \frac{OH}{OC} = \frac{SA}{SC} \Rightarrow OH = \frac{OC \cdot SA}{SC} = \frac{a\sqrt{2} \cdot 2a}{2a\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Câu 45: Một hình lập phương được tạo thành khi xếp miếng bìa carton như hình vẽ bên.

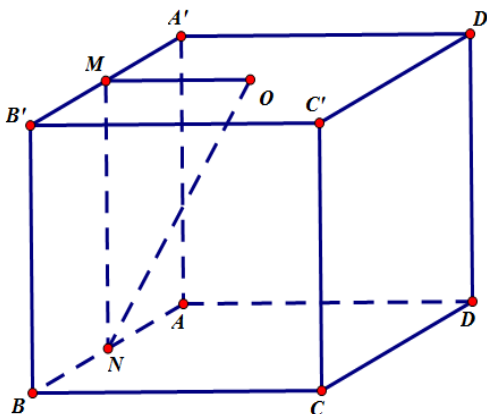


Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng AB sau khi xếp, biết rằng độ dài đoạn thẳng AB bằng $2a$.

- A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. D. $a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D



Sau khi xếp miếng bìa lại ta được hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $2a$, O là tâm của $A'B'C'D'$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, A'B$.

$$\Rightarrow MN = AA' = 2a, \quad OM = \frac{1}{2} A'D' = a.$$

Lại có: $\begin{cases} AB \perp OM \\ AB \perp MN \end{cases} \Rightarrow AB \perp ON \Rightarrow d(O, AB) = ON = \sqrt{OM^2 + MN^2} = a\sqrt{5}.$

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC là tam giác vuông tại A , $AC = a\sqrt{3}$, $\angle ABC = 30^\circ$. Góc giữa SC và mặt phẳng ABC bằng 60° . Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{35}}.$

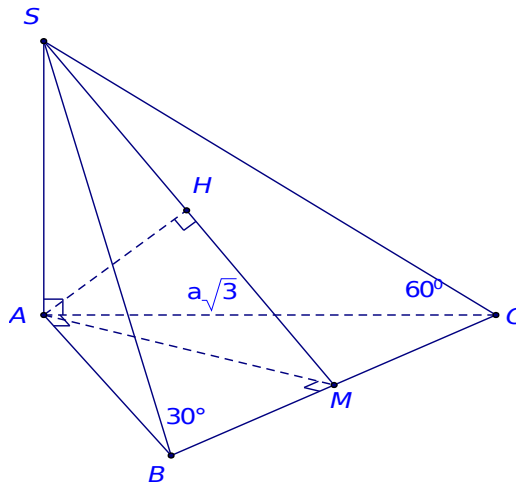
B. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{35}}.$

C. $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{35}}.$

D. $\frac{3a}{\sqrt{5}}.$

Lời giải

Chọn D



Dựng $AM \perp BC$; $AH \perp SM$

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} AM \perp BC \\ SA \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow AH \perp BC \text{ và } AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SBC)$$

$$\Rightarrow d(A; SBC) = AH$$

$$\text{Tam giác } SAC \text{ vuông tại } A \Rightarrow SA = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3a$$

$$\Delta SAC = \Delta BAC \text{ (g - c - g)} \Rightarrow SA = BA = 3a$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ vuông tại } A \Rightarrow \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{9a^2}$$

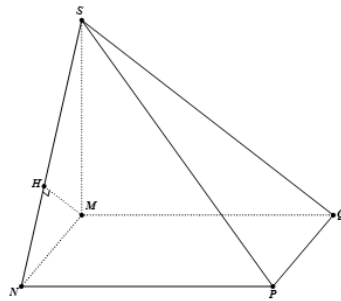
$$\text{Tam giác } SAM \text{ vuông tại } A \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{4}{9a^2} = \frac{5}{9a^2} \\ \Rightarrow AH = \frac{3a}{\sqrt{5}}$$

Câu 47: Cho hình chóp $S.MNPQ$ có đáy là hình vuông cạnh $MN = 3a\sqrt{2}$, SM vuông góc với mặt phẳng đáy, $SM = 3a$, với $0 < a \in \mathbb{R}$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SNP) bằng

- A.** $a\sqrt{3}$. **B.** $2a\sqrt{6}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu của M trên SN . Ta có:

$$\begin{cases} NP \perp MN \\ NP \perp SM \end{cases} \Rightarrow NP \perp (SMN) \quad \text{mà } SH \subset (SMN) \Rightarrow NP \perp SH.$$

$$\begin{cases} SH \perp NP \\ SH \perp SN \end{cases} \Rightarrow SH \perp (SNP) \quad \text{hay khoảng cách từ điểm } M \text{ đến mặt phẳng } (SNP) \text{ bằng } MH.$$

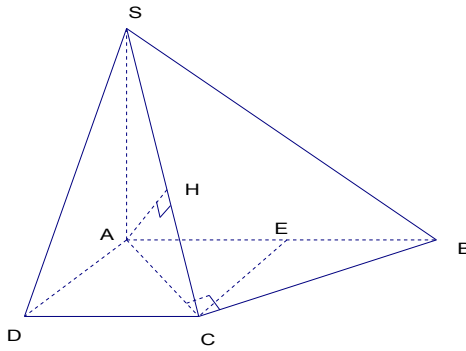
Trong tam giác vuông SMN có $MH = \frac{MN \cdot SM}{\sqrt{MN^2 + SM^2}} = \frac{3a \cdot 3a\sqrt{2}}{\sqrt{9a^2 + 18a^2}} = a\sqrt{6}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đường cao $SA = 2a$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông ở A và D , $AB = 2a$, $AD = CD = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A.** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{2a}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{2a}{3}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



+ Lấy E là trung điểm $AB \Rightarrow$ tứ giác $ADCE$ là hình vuông cạnh bằng a
 $\Rightarrow AC = a\sqrt{2}$

+ $\triangle BCE$ vuông cân $CE \perp EB, CE = EB = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$

$\triangle ACB$ có: $AC^2 + BC^2 = (a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{2})^2 = 4a^2 = AB^2 \Rightarrow \triangle ACB$ vuông tại C
 $\Rightarrow BC \perp AC$ (1)

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow BC \perp SA$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC \perp (SAC)$

+ Dựng $AH \perp SC$, có $AH \perp BC$ (vì $BC \perp (SAC), (SAC) \supset AH$)
 $\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A; (SBC)) = AH$

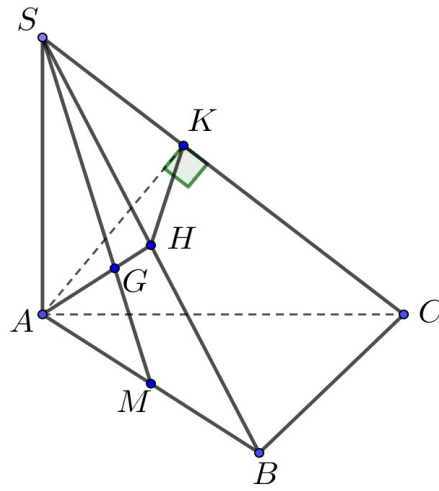
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{3}} = d(A; (SBC))$$

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB và K là hình chiếu của điểm A trên cạnh SC . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AGK) . Tính $\cos \alpha$, biết rằng khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (KBC) bằng $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

- A.** $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. **B.** $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Tam giác ABC vuông cân tại B mà $AC = a\sqrt{2}$ suy ra $AB = BC = a$.

Do $BC \perp BA$, $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$) nên $BC \perp (SAB)$.

Gọi H là hình chiếu của điểm A lên SB , thì $AH \perp SB$, $AH \perp BC$ (vì $BC \perp (SAB)$) nên $AH \perp (SAB)$ hay $AH = d(A, (SBC)) = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Áp dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông SAB với đường cao AH , ta được:

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow SA = a$ nên tam giác SAB vuông cân tại A do đó trọng tâm G thuộc AH .

Từ $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$ và $AK \perp SC$ nên $SC \perp (AHK)$ hay $SC \perp (AGK)$.

Vì $SC \perp (AGK)$ và $SA \perp (ABC)$ nên góc giữa hai mặt phẳng (AGK) và (ABC) chính là góc giữa hai đường thẳng SC và SA hay $\alpha = \angle CSA$.

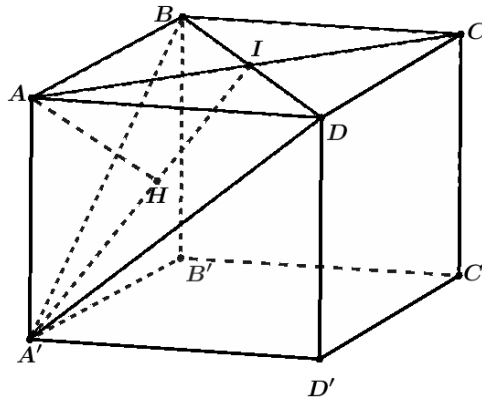
Theo trên ta có $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$ suy ra $\cos \alpha = \frac{SA}{SC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 50: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ theo a .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $2a\sqrt{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $I = AC \cap BD$ và H là hình chiếu của A lên đường thẳng $A'I$.

Ta có:
$$\begin{cases} BD \perp AI \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp AH$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AH \perp BD \\ AH \perp A'I \end{cases} \Rightarrow AH \perp (A'BD) \Rightarrow d(A, (A'BD)) = AH$$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Ta có:

Câu 51: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a .

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{12}}{7}$.

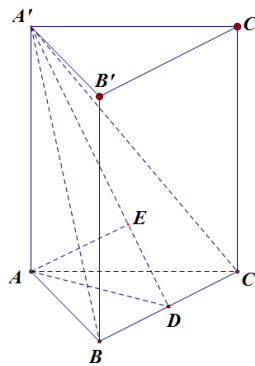
B. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi D là trung điểm cạnh BC , E là hình chiếu của A lên $A'D$.

Ta có:
$$\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADA') \Rightarrow BC \perp AE$$

$$\begin{cases} AE \perp BC \\ AE \perp A'D \end{cases} \Rightarrow AE \perp (A'BC)$$
, suy ra $d(A, (A'BC)) = AE$.

Trong tam giác $A'AD$ có: $AA' = a, AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 52: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AA' = AC = a$ và $AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

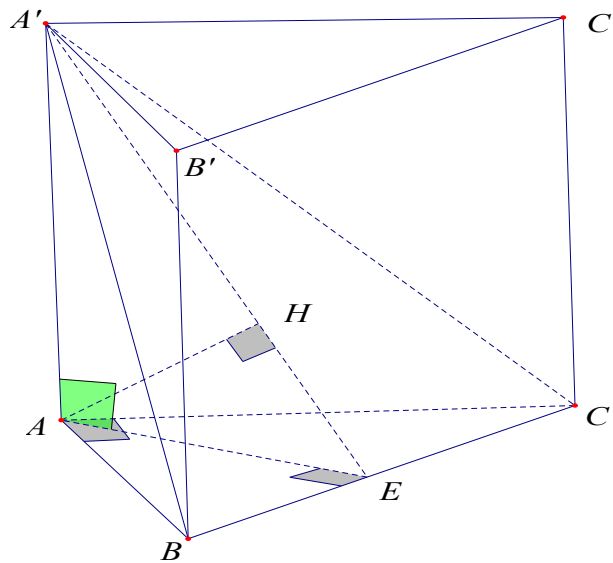
B. $\frac{a\sqrt{3}}{7}$.

C. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

D. $\frac{a\sqrt{7}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $AE \perp BC$ ($E \in BC$); $AH \perp A'E$ ($H \in A'E$).

Ta có: $\left. \begin{array}{l} BC \perp AE \\ BC \perp AA' \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (A'AE) \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $AH \perp A'E \Rightarrow AH \perp (A'BC)$.

Do đó khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng AH .

Xét tam giác ABC vuông tại A ta có $\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{4}{3a^2}$.

Xét tam giác $A'AE$ vuông tại A ta có

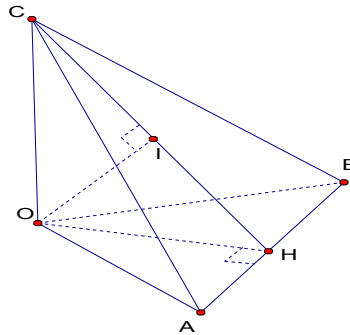
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{A'A^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 53: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Biết $OA = a, OB = 2a, OC = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. B. $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. C. $\frac{a\sqrt{17}}{\sqrt{19}}$. D. $\frac{a}{\sqrt{19}}$.

Lời giải

Chọn B



Trong tam giác OAB dựng đường cao OH , trong tam giác OCH dựng đường

cao $OI \Rightarrow OI \perp CH(1)$. Mặt khác ta có $\begin{cases} BC \perp OH \\ BC \perp OA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp OI(2)$. Từ

(1) và (2) suy ra $OI \perp (ABC) \Rightarrow d(O; (ABC)) = OI$.

Xét tam giác OAB vuông tại O có

$$OA = a, OB = 2a \Rightarrow OH = \sqrt{\frac{OA^2 \cdot OB^2}{OA^2 + OB^2}} = \sqrt{\frac{4a^4}{5a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

Xét tam giác OCH vuông tại O có

$$OC = a\sqrt{3}, OH = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow OI = \sqrt{\frac{OC^2 \cdot OH^2}{OC^2 + OH^2}} = \sqrt{\frac{12a^4}{19a^2}} = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}.$$

Vậy $d(O; (ABC)) = OI = \frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{19}}.$

Câu 54: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O ; mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD) . Biết khoảng cách từ O đến các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD)$ lần lượt là $1; 2; \sqrt{5}$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SAD) .

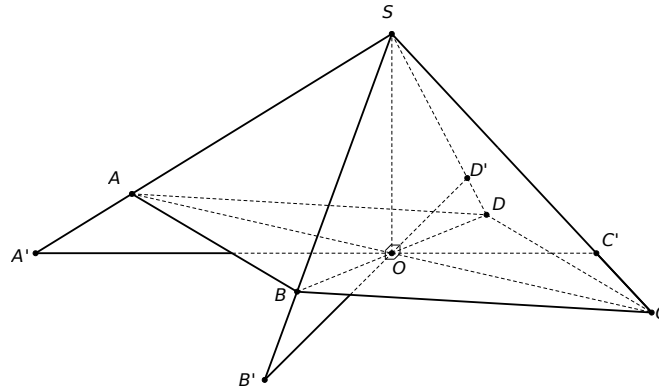
A. $d = \sqrt{\frac{19}{20}}$.

- B. $d = \sqrt{\frac{20}{19}}$.
- C. $d = \sqrt{2}$.
- D. $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:



Gọi p, q, u, v lần lượt là các khoảng cách từ O đến các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCD), (SDA)$.

Trong mặt phẳng (SAC) dựng đường thẳng qua O vuông góc với đường thẳng SO cắt hai đường thẳng SA, SC lần lượt tại A', C'

Trong mặt phẳng (SBD) dựng đường thẳng qua O vuông góc với đường thẳng SO cắt hai đường thẳng SB, SD lần lượt tại B', D' .

Do $(SAC) \perp (SBD), (SAC) \cap (SBD) = SO, A'C' \perp SO$ nên $A'C' \perp (SBD)$

$\Rightarrow A'C' \perp B'D'$.

Khi đó tứ diện $OSA'B'$ có OS, OA', OB' đôi một vuông góc nên ta chứng minh được

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OA'^2} + \frac{1}{OB'^2} \quad (1)$$

Chứng minh tương tự: $\frac{1}{q^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OB'^2} + \frac{1}{OC'^2} \quad (2)$;

$$\frac{1}{u^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OC'^2} + \frac{1}{OD'^2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OD'^2} + \frac{1}{OA'^2} \quad (4)$$

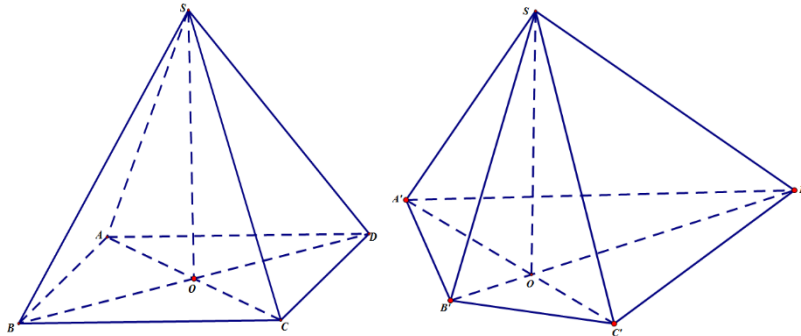
$$(1), (2), (3), (4) \text{ ta có } \frac{1}{p^2} + \frac{1}{u^2} = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{v^2}.$$

Từ

$$p=1; q=2; u=\sqrt{5} \Rightarrow \frac{1}{1^2} + \frac{1}{(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{v^2} \Rightarrow \frac{1}{v^2} = \frac{19}{20} \Rightarrow d=v=\sqrt{\frac{20}{19}}$$

Với

Cách 2:



Dựng mặt phẳng qua O , vuông góc với SO , cắt các đường thẳng SA, SB, SC, SD lần lượt tại $A', B', C', D' \Rightarrow SO \perp (A'B'C'D')$.

Vì $(SAC) \perp (SBD) \Rightarrow A'C' \perp B'D'$.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OA'^2} + \frac{1}{OB'^2} = \frac{1}{d(O, (SA'B'))} = 1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OB'^2} + \frac{1}{OC'^2} = \frac{1}{d(O, (SB'C'))} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OC'^2} + \frac{1}{OD'^2} = \frac{1}{d(O, (SC'D'))} = \frac{1}{5} \quad (3)$$

$$\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OD'^2} + \frac{1}{OA'^2} = \frac{1}{d(O, (SD'A'))} = \frac{1}{d^2} \quad (4)$$

$$(1), (2), (3), (4) \Rightarrow 1 + \frac{1}{5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{d^2} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{20}{19}}$$

Câu 55: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, cạnh $AB = 2AD = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

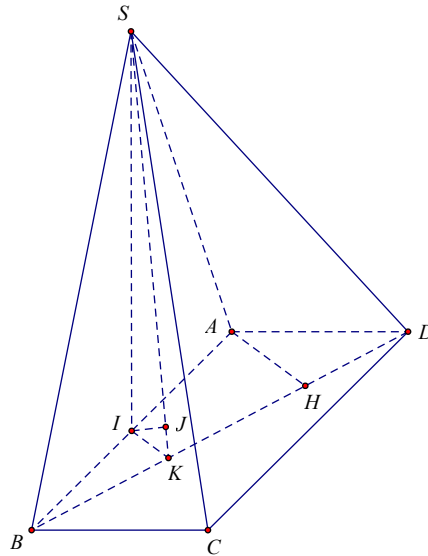
B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. a .

Lời giải

Chọn B



Kẻ $SI \perp AB$.

Do tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$.

$\Rightarrow I$ là trung điểm của AB và $SI \perp (ABCD)$.

ΔSAB đều cạnh $2a \Rightarrow SI = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

$$IK \perp BD \ (K \in BD), \ AH \perp BD \ (H \in BD) \Rightarrow IK = \frac{1}{2}AH$$

Kẻ

Kẻ $IJ \perp SK, (J \in SK)$ (1).

Ta có $\begin{cases} IK \perp BD \\ SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp BD \Rightarrow BD \perp (SIK) \Rightarrow BD \perp IJ \end{cases}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $IJ \perp (SBD) \Rightarrow d(I, (SBD)) = IJ$.

Ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow IK = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

$$\frac{1}{IJ^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} \Rightarrow \frac{1}{IJ^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow IJ = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d(I, (SBD)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

I là trung điểm $AB \Rightarrow d(A, (SBD)) = 2d(I, (SBD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

A. $\frac{5a}{6}$.

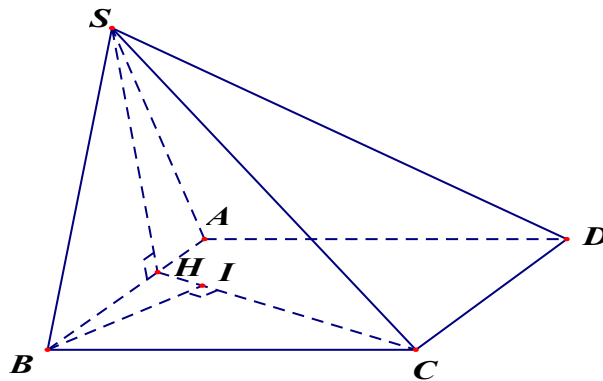
B. $\frac{12a}{5}$.

C. $\frac{6a}{5}$.

D. $\frac{5a}{12}$.

Lời giải

Chọn B



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ dựng $BI \perp HC$.

Ta có: $\begin{cases} (SAB) \cap (SHC) = SH \\ (SAB) \perp (ABCD); (SHC) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Khi đó: $\begin{cases} BI \perp HC \\ BI \perp SH \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SHC) \Rightarrow d(B, (SHC)) = BI$.

Xét trong tam giác BHC vuông tại B ta có:

$$\frac{1}{BI^2} = \frac{1}{BH^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{(3a)^2} + \frac{1}{(4a)^2} = \frac{25}{144a^2} \Rightarrow BI = \frac{12a}{5}$$

Suy ra: Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SHC) bằng $\frac{12a}{5}$.

Câu 58: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi F là trung điểm của cạnh SA . Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (FCD) ?

A. $\frac{1}{2}a$.

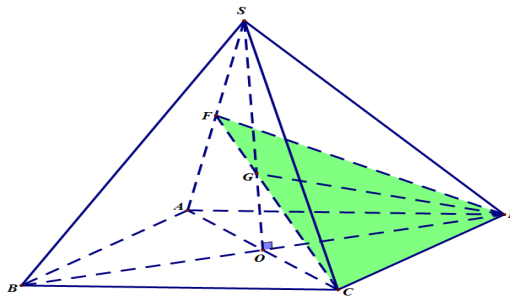
B. $\sqrt{\frac{1}{5}}a$.

C. $\sqrt{\frac{2}{11}}a$.

D. $\sqrt{\frac{2}{9}}a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$, $G = SO \cap FC \Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác SAC .

$$\text{Do đó: } \frac{d(S, (FCD))}{d(O, (FCD))} = \frac{SG}{OG} = 2 \Rightarrow d(S, (FCD)) = 2d(O, (FCD)) = 2h.$$

Lại có: $ABCD$ là hình thoi nên O là trung điểm của AC, BD và $OC \perp OD$.

$$\text{Mà: } SA = SB = SC = SD \Rightarrow \begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ OA = OB = OC = OD \end{cases} \Rightarrow ABCD \text{ là hình vuông.}$$

$$\Rightarrow OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OS = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OG = \frac{1}{3}OS = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{Khi đó: } O.GCD \text{ là tứ diện vuông đỉnh } O \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OD^2} + \frac{1}{OG^2} = \frac{22}{a^2}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{1}{22}}a.$$

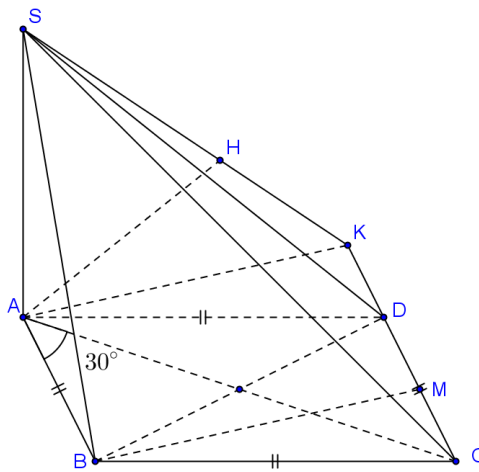
$$\text{Vậy } \Rightarrow d(S, (FCD)) = 2h = \sqrt{\frac{2}{11}}a.$$

Câu 59: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc $\angle BAC = 30^\circ$, $SA = a$ và $BA = BC = a$. Gọi D là điểm đối xứng với B qua AC . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

- A.** $\frac{\sqrt{21}}{7}a$. **B.** $\frac{2\sqrt{21}}{7}a$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{14}a$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Lời giải

Chọn A



Do D là điểm đối xứng với B qua AC và $\triangle ABC$ cân tại B nên tứ giác $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Suy ra $\triangle BCD$ là tam giác đều cạnh a .

Gọi M là trung điểm của CD , suy ra $BM \perp CD$ và $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
Qua điểm A , dựng đường thẳng song song với BM và cắt CD tại K .

Khi đó $AK \perp CD$ và $AK = BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AK \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAK) \Rightarrow (SCD) \perp (SAK)$.

Trong mặt phẳng (SAK) , dựng $AH \perp SK$, với $H \in SK$. Suy ra $AH \perp (SCD)$ tại H .

Do AB song song với mặt phẳng (SCD) nên $d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AH$.
Xét $\triangle SAK$ vuông tại A , ta có

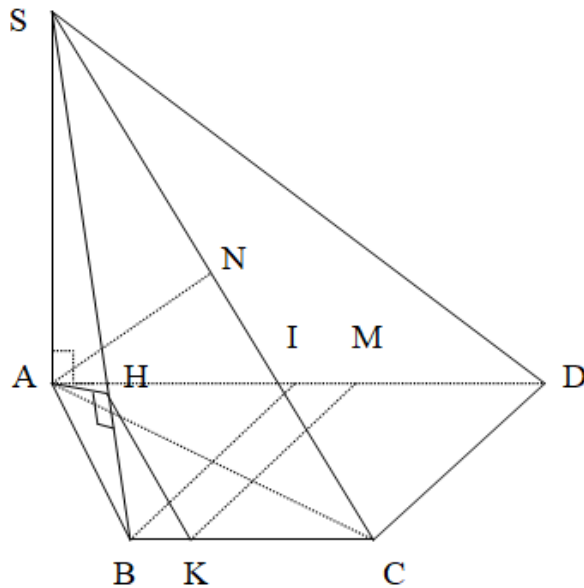
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{21}}{7}a.$$

Câu 60: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính $AD = 2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi H là hình chiếu của A lên SB . Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{3a\sqrt{6}}{8}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{3a\sqrt{6}}{16}$.

Lời giải

Chọn D



Do $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính AD nên tứ giác $ABCD$ cũng nội tiếp đường tròn đường kính AD . Gọi I là trung điểm AD thì các tam giác $\triangle IAB, \triangle IBC, \triangle ICD$ đều cạnh a và $AC \perp CD$ nên $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3}$. Lấy $K \in BC; M \in AD$ sao cho $HK \parallel SC; KM \parallel CD \Rightarrow d(H; (SCD)) = d(K; (SCD)) = d(M; (SCD))$

$\triangle SAB$ vuông tại A có $SB = 2a$ và

$$SH \cdot SB = SA^2 \Leftrightarrow SH = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2} \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{3}{4} = \frac{KC}{CB} = \frac{MD}{DI}$$

Vậy $\frac{MD}{AD} = \frac{MD}{2DI} = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{d(M;(SCD))}{d(A;(SCD))} = \frac{3}{8}$. Do $\begin{cases} AC \perp CD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$

Trong $mp(SAC)$ kẻ $AN \perp SC$ tại N thì $AN \perp (SCD) \Rightarrow d(A; (SCD)) = AN$

$\triangle SAC$ vuông cân tại A (Do $SA = AC = a\sqrt{3}$) nên $AN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

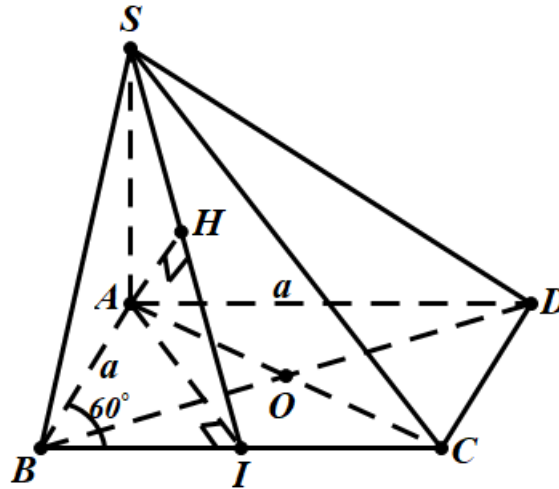
Vậy $d(H;(SCD))=d(M;(SCD))=\frac{3}{8}.AN=\frac{3a\sqrt{6}}{16}$

Câu 61: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi tâm O cạnh a , $\angle ABC = 60^\circ$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = \frac{3a}{2}$. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{3a}{8}$ B. $\frac{5a}{8}$ C. $\frac{3a}{4}$ D. $\frac{5a}{4}$

Lời giải

Chọn A



Cách 1:

Xét $\triangle ABC$ đều do $\angle ABC = 60^\circ$ và $AB = BC$.

Lấy I là trung điểm BC , kẻ $AH \perp SI$ tại H .

Ta có: $AI \perp BC$, mà $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAI)$, $AH \subset (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$.

Từ và $\Rightarrow AH \perp (SBC)$ tại $H \Rightarrow AH = d(A, (SBC))$.

Ta có: $\triangle ABC$ đều cạnh $a \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle SAI$ vuông tại A có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{4}{9a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{16}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{4} = d(A, (SBC))$$

Ta có:

$$\frac{d(O, (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{OC}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(O, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC)) = \frac{3a}{8}$$

Câu 62: Cho một chậu nước hình chóp cụt đều (hình vẽ) có chiều cao bằng $3dm$, đáy là lục giác đều, độ dài cạnh đáy lớn bằng $2dm$ và độ dài cạnh đáy nhỏ bằng $1dm$. Tính thể tích của chậu nước

A. $\frac{21\sqrt{3}}{2} dm^3$.

B. $\frac{21\sqrt{2}}{4} dm^3$.

C. $\frac{21}{2} dm^3$.

D. $\frac{21\sqrt{6}}{4} dm^3$.

Lời giải

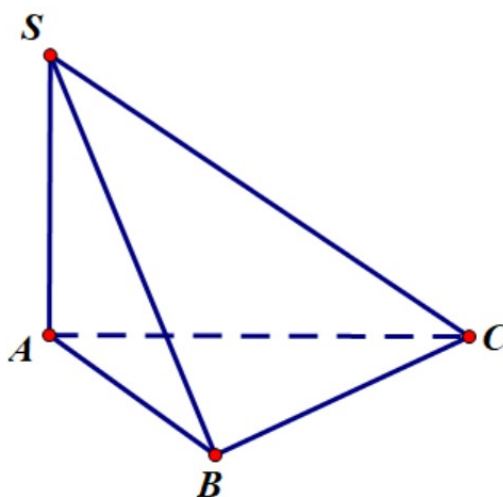
Diện tích đáy của chậu bằng $S_1 = 6 \left(\frac{2^2 \sqrt{3}}{4} \right) = 6\sqrt{3}, S_2 = 6 \left(\frac{1^2 \sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Chiều cao của chậu bằng $h = 3$.

Thể tích của chậu bằng

$$V_0 = \frac{h}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{3}{3} \left(6\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{6\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}} \right) = \frac{21\sqrt{3}}{2} dm^3.$$

Câu 63: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng 45° (tham khảo hình bên). Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng



A. $\frac{a^3}{8}$.

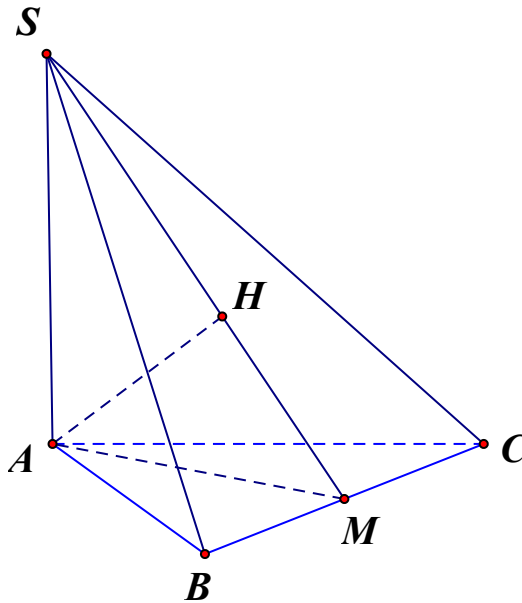
B. $\frac{3a^3}{8}$.

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

D. $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm BC thì $AM \perp BC$ và $SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAM)$.

Kẻ $AH \perp SM$ tại H thì $AH \perp (SBC)$. Suy ra góc giữa SA và mặt phẳng (SBC)

bằng $\angle ASH = \angle ASM = 45^\circ$. Do đó, $\triangle SAM$ vuông cân ở A và $SA = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}.$$

Câu 64: Cho khối chóp $SABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

A. $\frac{a^3}{3}$

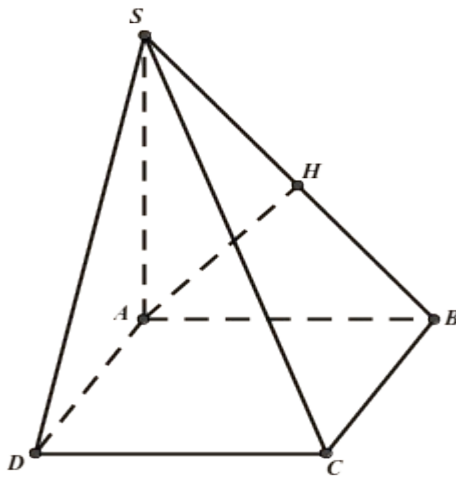
B. a^3

C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$

D. $\frac{a^3}{2}$

Lời giải

Chọn A



Ta có $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp AH$. Kê $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Suy ra $d(A; (SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow SA = a$.

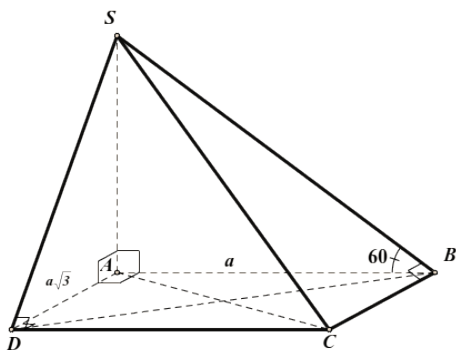
Vậy $V_{SABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}$.

Câu 65: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

- A.** $V = 3a^3$ **B.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$ **C.** $V = a^3$ **D.** $V = \frac{a^3}{3}$

Lời giải

Chọn C



Ta có $S_{ABCD} = \sqrt{3}a^2$.

$$\left\{ \begin{array}{l} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ BC \perp SB \subset (SBC) \\ BC \perp AB \subset (ABCD) \end{array} \right. \Rightarrow ((SBC), (ABCD)) = (\overline{SB}, \overline{AB}) = \widehat{SBA}$$

Vì

$$\widehat{SBA} = 60^\circ$$

Xét tam giác vuông SAB có: $\tan 60^\circ = \frac{SA}{AB} \Rightarrow SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

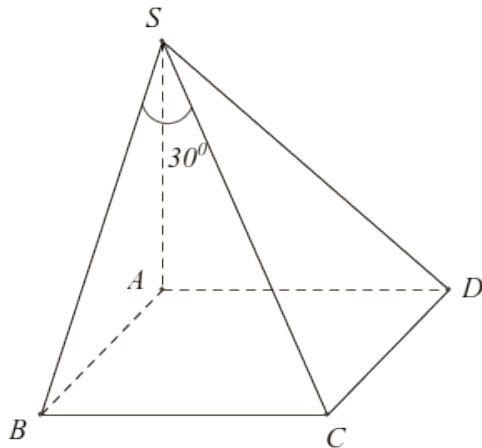
$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} a^2 \sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = a^3$$

Câu 66: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $\frac{2a^3}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$ **D.** $\sqrt{2}a^3$

Lời giải

Chọn B



+) Do ABCD là hình vuông cạnh a nên: $S_{ABCD} = a^2$

+) Chứng minh được $BC \perp (SAB) \Rightarrow$ góc giữa SC và (SAB) là $\widehat{CSB} = 30^\circ$.

+) Đặt $SA = x \Rightarrow SB = \sqrt{x^2 + a^2}$. Tam giác SBC vuông tại B nên $\tan \widehat{CSA} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{SB}$

Ta được: $SB = BC\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + a^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow x = a\sqrt{2}$.

$$\text{Vậy } V_{SABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{2}a^3}{3} \quad (\text{Đvtt})$$

Câu 67: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, biết $AB = 4a, SB = 6a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V .

Tỷ số $\frac{a^3}{3V}$ là

A. $\frac{\sqrt{5}}{80}$

B. $\frac{\sqrt{5}}{40}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{20}$

D. $\frac{3\sqrt{5}}{80}$

Lời giải

Chọn B

Ta có:

+ $\triangle ABC$ vuông cân tại $C, AB = 4a$ suy ra

$$AC = BC = 2a\sqrt{2}.$$

Do đó: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BC = 4a^2$.

+ $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB \Rightarrow \triangle SAB$ vuông tại A

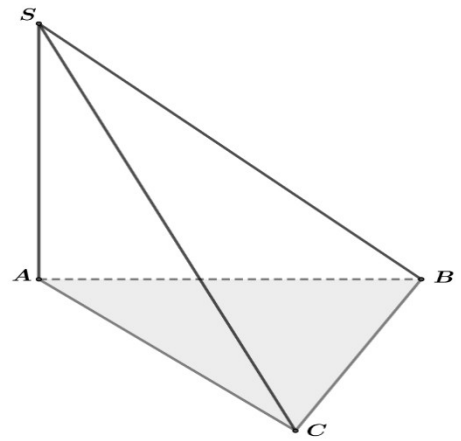
$$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{(6a)^2 - (4a)^2} = 2a\sqrt{5}.$$

+ Khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}4a^2.2a\sqrt{5} = \frac{8a^3\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{a^3}{3V} = \frac{a^3}{\frac{8a^3\sqrt{5}}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{40}.$$

Vậy tỷ số:



Câu 68: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $\angle ACB = 60^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và SB hợp với mặt đáy một góc 45° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

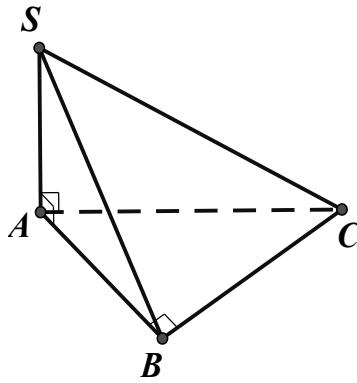
B. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

C. $V = \frac{a^3}{2\sqrt{3}}$

D. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$

Lời giải

Chọn A



ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $\angle ACB = 60^\circ \Rightarrow BC = \frac{AB}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

$(\angle SB, (ABC)) = (\angle SB, AB) = 45^\circ$ nên tam giác SAB vuông cân tại $S \Rightarrow SA = AB = a$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot SA = \frac{1}{6} a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{18}$$

Câu 69: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$ và $AD = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60° .

A. $V = \frac{a^3 \sqrt{15}}{15}$

B. $V = \frac{a^3 \sqrt{15}}{6}$

C. $V = \frac{4a^3 \sqrt{15}}{15}$

D. $V = \frac{a^3 \sqrt{15}}{3}$

Lời giải

Chọn C

Kẻ $AE \perp BD$

$$(\angle SBD), (ABCD)) = \angle SEA = 60^\circ$$

Xét ΔABD vuông tại A

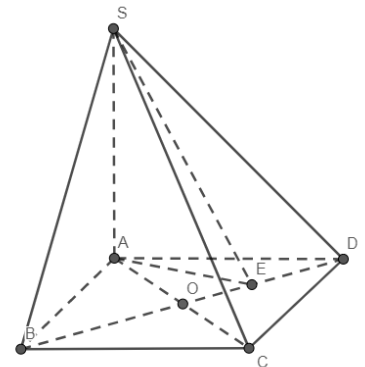
$$AE = \frac{AD \cdot AB}{\sqrt{AD^2 + AB^2}} = \frac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

Xét ΔSAE vuông tại A

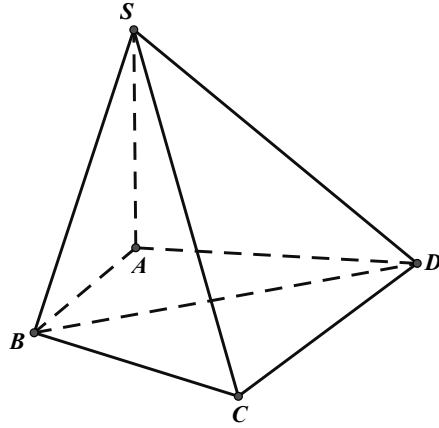
$$SA = AE \cdot \tan 60^\circ = \frac{2a\sqrt{5}}{5} \cdot \sqrt{3} = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$$

Khi đó thể tích $S.ABCD$

$$V = \frac{1}{3} SA S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{15}}{5} \cdot 2a^2 = \frac{4a^3 \sqrt{15}}{15}$$



Câu 70: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB = 5\sqrt{3}, BC = 3\sqrt{3}$, góc $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$, $SA = 9$ và SA vuông góc với đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $66\sqrt{3}$, tính cotang của góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt đáy.



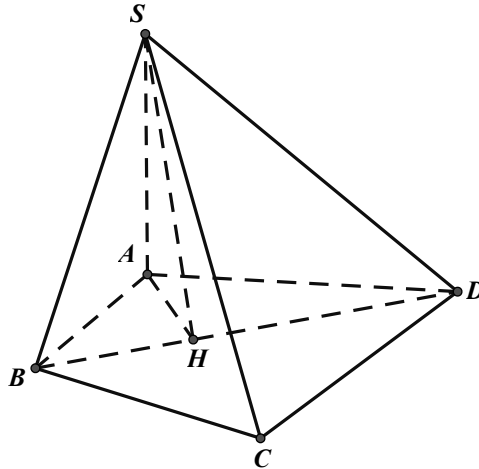
A. $\frac{20\sqrt{273}}{819}$.

B. $\frac{\sqrt{91}}{9}$.

C. $\frac{3\sqrt{273}}{20}$.

D. $\frac{9\sqrt{91}}{9}$.

Lời giải



Có: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} \Leftrightarrow 66\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot S_{ABCD} \Rightarrow S_{ABCD} = 44\sqrt{3}$

Suy ra $\frac{1}{2} AB \cdot AD + \frac{1}{2} BC \cdot CD = 44\sqrt{3} \Leftrightarrow 5AD + 3CD = 44$. (1)

Áp dụng định lí Pitago trong 2 tam giác vuông $\triangle ABD; \triangle BCD$, ta có:

$AB^2 + AD^2 = BD^2 = BC^2 + CD^2 \Leftrightarrow CD^2 - AD^2 = 48$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} AD = 4 \\ AD = \frac{47}{2} \end{cases}$

$$AD = \frac{47}{2} \text{ không thỏa mãn do từ (1) ta có: } AD < \frac{44}{5} \Rightarrow AD = 4$$

Trong tam giác ABD , dựng $AH \perp BD$ lại có $SA \perp BD \Rightarrow BD \perp SH$.

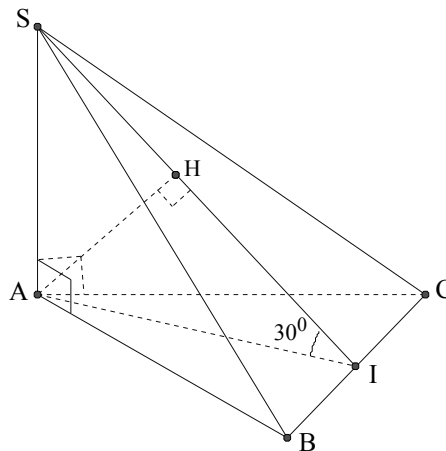
Vậy góc giữa (SBD) và đáy là góc $\widehat{SHA}$.

Để tính $BD = \sqrt{91}, AH = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{20\sqrt{273}}{91}, \cot \widehat{SHA} = \frac{AH}{SA} = \frac{20\sqrt{273}}{819}$.

Câu 71: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA \perp (ABC)$. Mặt phẳng (SBC) cách A một khoảng bằng a và hợp với mặt phẳng (ABC) góc 30° . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{8a^3}{9}$. B. $\frac{8a^3}{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. D. $\frac{4a^3}{9}$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC suy ra góc giữa mp (SBC) và mp (ABC) là $\widehat{SIA} = 30^\circ$.

H là hình chiếu vuông góc của A trên SI suy ra $d(A, (SBC)) = AH = a$.

Xét tam giác AHI vuông tại H suy ra $AI = \frac{AH}{\sin 30^\circ} = 2a$.

Giả sử tam giác đều ABC có cạnh bằng x , mà AI là đường cao suy ra

$$2a = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{4a}{\sqrt{3}}$$

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC} = \left(\frac{4a}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4a^2\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác SAI vuông tại A suy ra $SA = AI \cdot \tan 30^\circ = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

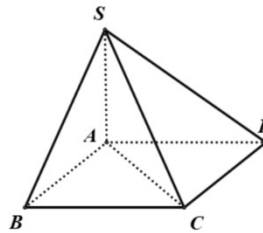
Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{4a^2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{8a^3}{9}$.

Câu 72: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết rằng $SC = a\sqrt{3}$.

- A. $V_{S.ABCD} = a^3$ B. $V_{S.ABCD} = \frac{a^3}{3}$ C. $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Mà $(SAB) \cap (SAD) = SA$ nên $SA \perp (ABCD)$.

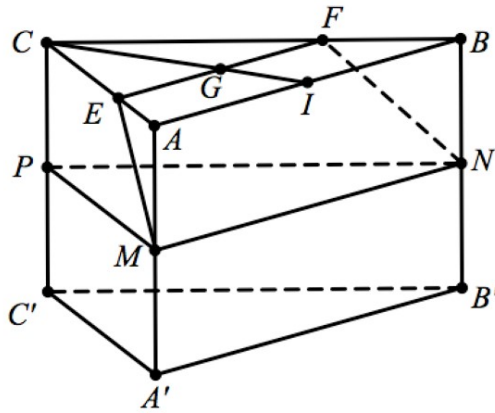
Ta có: $AC = a\sqrt{2}$; $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 - (a\sqrt{2})^2} = a$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} a \cdot a^2 = \frac{a^3}{3}$.

Câu 73: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $AA' = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AA', BB' và G là trọng tâm tam giác ABC . Mặt phẳng (MNG) cắt CA, CB lần lượt tại E, F . Thể tích của khối đa diện có sáu đỉnh A, B, M, N, E, F bằng

- A. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{27}$ B. $\frac{\sqrt{3}a^3}{27}$ C. $\frac{2a^3}{27}$ D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{7}$

Lời giải



Do $MN \parallel (ABC) \Rightarrow (MNG) \cap (ABC) = EF \parallel AB$. Gọi P là trung điểm CC' . Ta có $MNP.EFC$ là một chóp cắt.

$$V_{ABNMEF} = V_{ABC.MNP} - V_{MNP.EFC} = \frac{1}{2} V_{ABC.A'B'C'} - \frac{CP}{3} (S_{MNP} + S_{EFC} + \sqrt{S_{MNP} S_{EFC}})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}a^2}{4} \right) (2a) - \frac{a}{3} \left(\frac{\sqrt{3}a^2}{4} + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \frac{\sqrt{3}a^2}{4} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}a^2}{4} \left(\frac{2}{3} \right)^2 \frac{\sqrt{3}a^2}{4}} \right) = \frac{2\sqrt{3}a^3}{27}$$

Trong đó $S_{MNP} = S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$; $\frac{CE}{CA} = \frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CI} = \frac{2}{3} \Rightarrow \Delta CEF \sim \Delta CAB$

tỉ số $\frac{2}{3} \Rightarrow S_{CEF} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 S_{CAB} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

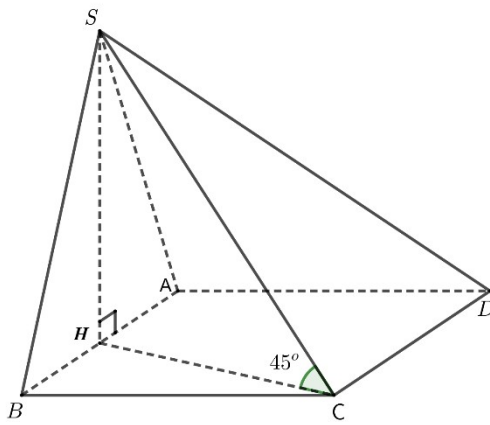
Hoặc $S_{CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot CF \cdot \sin \angle ECF = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{9}$

Câu 74: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

- A.** $\frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{a^3 \sqrt{3}}{9}$ **C.** $\frac{a^3 \sqrt{5}}{24}$ **D.** $\frac{a^3 \sqrt{5}}{6}$

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm của AB , $\triangle SAB$ cân tại $S \Rightarrow SH \perp AB$

$$\left. \begin{array}{l} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SH \subset (SAB); SH \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

$$(\angle SC; (ABCD)) = \angle SCH = 45^\circ \Rightarrow \triangle SHC \text{ vuông cân tại } H$$

$$\Rightarrow SH = HC = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}; S_{ABCD} = AB \cdot BC = a^2$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^3\sqrt{5}}{6}$$

Câu 75: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SCD) tạo với đáy góc 30° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là?

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

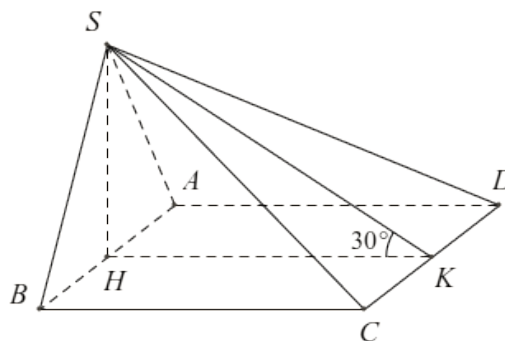
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$

D. $\frac{5a^3\sqrt{3}}{36}$

Lời giải

Chọn A



Gọi H , K lần lượt là trung điểm AB và CD .

Suy ra $SH \perp (ABCD)$ và $((SCD), (ABCD)) = \angle SKH = 30^\circ$.

Xét $\triangle SHK$ vuông tại H , có $HK = \frac{SH}{\tan 30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3a}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \frac{3a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 76: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD) .

A. $h = \frac{4}{3}a$

B. $h = \frac{3}{2}a$

C. $h = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$

D. $h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$

Lời giải

Chọn A

Gọi H là trung điểm của AD . Nên $SH \perp AD$

$$\begin{cases} (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \Rightarrow SH \perp (ABCD) \\ AD \perp SH \end{cases}$$

Ta có: $S_{ABCD} = 2a^2$

$$\Rightarrow SH = \frac{3V}{S_{ABCD}} = \frac{3 \cdot \frac{4a^3}{3}}{2a^2} = 2a$$

Gọi I là hình chiếu của H lên SD

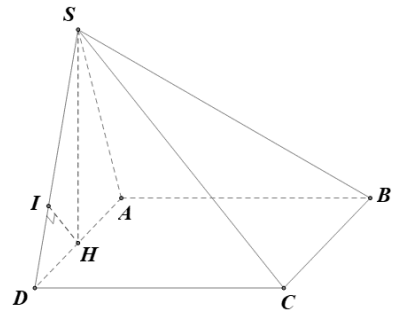
$$d(B; (SCD)) = d(A; (SCD)) = 2d(H; (SCD)) = 2IH$$

$$IH = \frac{SH \cdot HD}{SD} = \frac{SH \cdot HD}{\sqrt{SH^2 + HD^2}} = \frac{2a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{2}{3}a$$

Mà

$$d(B; (SCD)) = \frac{4}{3}a$$

Vậy



Câu 77: 111Equation Chapter 1 Section 1 Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD)

vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$.
 Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD)

- A. $h = \frac{3}{4}a$ B. $h = \frac{2}{3}a$ C. $h = \frac{4}{3}a$ D. $h = \frac{8}{3}a$

Lời giải

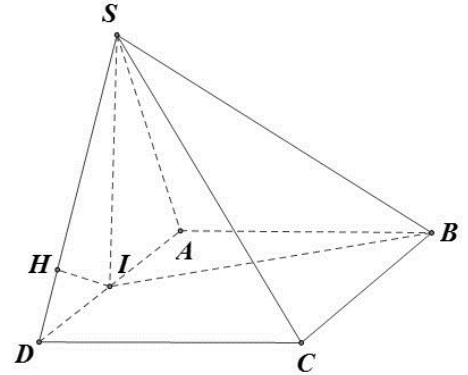
Chọn C

Gọi I là trung điểm của AD . Tam giác SAD cân tại S

$$\Rightarrow SI \perp AD$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} SI \perp AD \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$$

$\Rightarrow SI$ là đường cao của hình chóp.



$$\text{Theo giả thiết } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SI \cdot S_{ABCD} \Leftrightarrow \frac{4}{3}a^3 = \frac{1}{3}SI \cdot 2a^2 \Leftrightarrow SI = 2a$$

Vì AB song song với (SCD)

$$\Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 2d(I, (SCD))$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên SD .

$$\begin{array}{llll} \text{Mặt} & & \text{khác} & \\ \begin{cases} SI \perp DC \\ ID \perp DC \end{cases} & \Rightarrow & IH \perp DC & \\ \text{Ta} & & & \text{có} \\ \begin{cases} IH \perp SD \\ IH \perp DC \end{cases} & \Rightarrow & IH \perp (SCD) & \Rightarrow d(I, (SCD)) = IH \end{array}$$

$$\text{Xét tam giác } SID \text{ vuông tại } I: \frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{ID^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{2a^2} \Rightarrow IH = \frac{2a}{3}$$

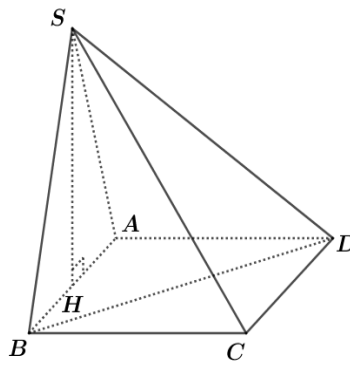
$$\Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 2d(I, (SCD)) = \frac{4}{3}a$$

Câu 78: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD bằng $\sqrt{21}$. Hãy cho biết cạnh đáy bằng bao nhiêu?

- A. $\sqrt{21}$ B. 21 C. $7\sqrt{3}$ D. 7

Lời giải

Chọn D



Giả sử $AB = a$. Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$$\vec{SA} \cdot \vec{BD} = (\vec{SH} + \vec{HA}) \cdot (\vec{BA} + \vec{BC}) = \vec{HA} \cdot \vec{BA} = \frac{1}{2}a^2$$

Ta có

$$\Leftrightarrow a^2 \sqrt{2} \cdot \cos(\vec{SA}, \vec{BD}) = \frac{1}{2}a^2 \Leftrightarrow \cos(\vec{SA}, \vec{BD}) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \sin(\vec{SA}, \vec{BD}) = \sqrt{\frac{7}{8}}$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}}{6} a^3 \Rightarrow V_{S.ABD} = \frac{\sqrt{3}}{12} a^3$$

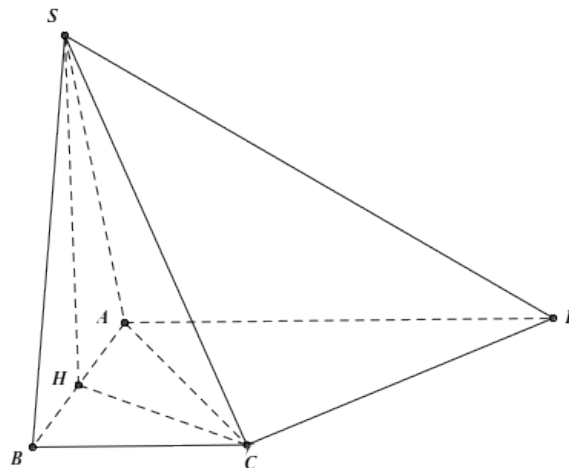
$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} SA \cdot BD \cdot d_{(SA, BD)} \cdot \sin(\vec{SA}, \vec{BD}) = \frac{\sqrt{3}}{12} a^3 \Leftrightarrow \frac{1}{6} a \cdot a \sqrt{2} \cdot \sqrt{21} \cdot \sqrt{\frac{7}{8}} = \frac{\sqrt{3}}{12} a^3 \Leftrightarrow a = 7$$

Câu 79: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $BC = \frac{1}{2}AD = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với

đáy, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng α sao cho $\tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ACD$ theo a .

- A.** $V_{S.ACD} = \frac{a^3}{2}$. **B.** $V_{S.ACD} = \frac{a^3}{3}$. **C.** $V_{S.ACD} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$. **D.** $V_{S.ACD} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm AB , từ giả thiết ta có: $SH \perp (ABCD)$,
 $(SC, (ABCD)) = \angle SCH = \alpha$

Đặt $AB = x$, ta có: $HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + a^2}$, $SH = HC \cdot \tan \alpha = \sqrt{\frac{x^2}{4} + a^2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{5}$.

Mặt khác $SH = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Vậy ta có: $\sqrt{\frac{x^2}{4} + a^2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = a$.

$$S_{ABCD} = \frac{(AD + BC) \cdot AB}{2} = \frac{3a^2}{2}; \quad S_{ACD} = \frac{2}{3} S_{ABCD} = a^2; \quad V_{S.ACD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ACD} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}.$$

Câu 80: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật; $AB = a; AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mp $(ABCD)$ bằng 45° . Gọi M là trung điểm của SD . Tính theo a khoảng cách d từ điểm M đến (SAC) .

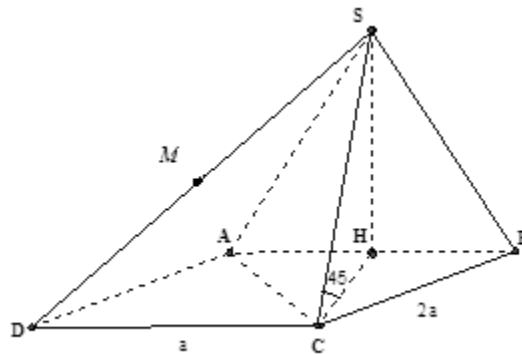
A. $d = \frac{a\sqrt{1513}}{89}$

B. $d = \frac{2a\sqrt{1315}}{89}$

C. $d = \frac{a\sqrt{1315}}{89}$

D. $d = \frac{2a\sqrt{1513}}{89}$

Lời giải



Gọi H là trung điểm đoạn $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Xét $\triangle BCH$ vuông tại B , có: $CH = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$.

Xét $\triangle SHC$ vuông cân tại H , có: $SH = \frac{a\sqrt{17}}{2}; SC = \frac{a\sqrt{34}}{2}$.

Xét $\triangle SAH$ vuông tại H , có: $SA = \sqrt{\frac{17a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B , có: $AC = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$.

$$\Rightarrow S_{\triangle SAC} = \frac{\sqrt{89}}{4} a^2$$

Ta có: $V_{S.ABCD} = V = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{a^3 \sqrt{17}}{3}$; $V_{S.ACD} = \frac{1}{2} V = \frac{a^3 \sqrt{17}}{6}$

$$V_{S.ACM} = \frac{1}{2} V_{S.ACD} = \frac{a^3 \sqrt{17}}{12} \quad \text{Mà} \quad V_{S.MAC} = \frac{1}{3} \cdot d \cdot S_{\triangle SAC} = \frac{\sqrt{89}}{12} a^2 \cdot d \Rightarrow d = \frac{a \sqrt{1513}}{89}$$

Câu 81: Cho lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có thể tích bằng 24. Gọi M, N và P lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh $A'B', B'C'$ và BC sao cho M là trung điểm của $A'B', B'N = \frac{3}{4} B'C'$ và $BP = \frac{1}{4} BC$. Đường thẳng NP cắt đường thẳng BB' tại E và đường thẳng EM cắt đường thẳng AB tại Q . Thể tích của khối đa diện lồi $AQPCAMNC'$ bằng

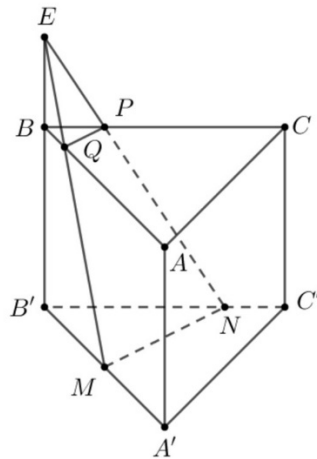
A. $\frac{59}{3}$

B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{49}{3}$

D. $\frac{29}{3}$

Lời giải.



Đặt S, h lần lượt là diện tích đáy và chiều cao của lăng trụ đã cho ta có $S \cdot h = 24$ và

$$V_{AQPCAMNC'} = V_{ABC \cdot A'B'C'} - V_{BPQ \cdot B'NM} \quad \text{Trong đó } BPQ \cdot B'NM \text{ là chóp cụt có chiều cao } h.$$

Ta có $\frac{EB}{EB'} = \frac{EP}{EN} = \frac{EQ}{EM} = \frac{BP}{B'N} = \frac{BQ}{B'M} = \frac{PQ}{NM} = \frac{1}{3}$. Do đó hai tam giác

$$\triangle BPQ \sim \triangle B'NM \text{ theo tỷ số } k = \frac{1}{3}$$

Suy ra $S_{B'NM} = \frac{B'N}{B'C'} \times \frac{B'M}{B'A'} S = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} S = \frac{3}{8} S$; $S_{BPQ} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 S_{B'NM} = \frac{1}{24} S$.

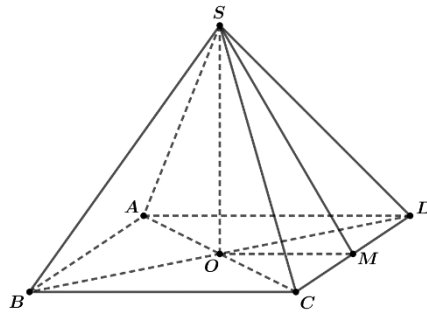
Vì vậy

$$V_{BPQ.B'NM} = \frac{h}{3} \left(\frac{3}{8}S + \frac{1}{24}S + \sqrt{\frac{3}{8}S \times \frac{1}{24}S} \right) = \frac{13}{72}S.h = \frac{13}{72} \times 24 = \frac{13}{3} \Rightarrow V_{AQPC.A'MNC} = 24 - \frac{13}{3} = \frac{59}{3}$$

Câu 82: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ B. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ C. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ D. $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Lời giải



Gọi O là tâm của đáy, gọi M là trung điểm của BC .

Ta có $\begin{cases} SO \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases}$ nên $(SOM) \perp BC$, suy ra $[(SCD), (ABCD)] = (SM, OM) = \angle SMO = 60^\circ$

Có $OM = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, $SO = OM \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

•Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là vuông cạnh a . Biết SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Vẽ đường cao AH của tam giác SAB . Vẽ đường cao AK của tam giác SAD . Khi đó:

a) $BC \perp AH$

b) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng: $\frac{a\sqrt{2}}{7}$

d) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AHK) bằng: $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Sai

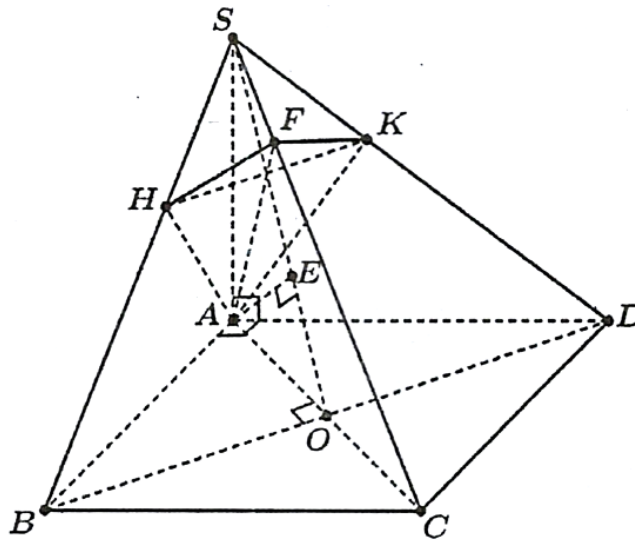
Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA (\text{do } SA \perp (ABCD)) \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$,

mà $SB \perp AH$ nên $AH \perp (SBC)$ hay $d(A, (SBC)) = AH$.

Tam giác SAB vuông tại A có đường cao AH nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot SA}{\sqrt{AB^2 + SA^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $d(A, (SBC)) = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ thì $AO \perp BD$, ta lại có $SA \perp BD$ nên $BD \perp (SAC)$. (*)

Kẻ đường cao AE của $\triangle SAO$ thì $AE \perp BD$ (do (*)).

Vậy $AE \perp (SBD)$ hay $d(A, (SBD)) = AE$.

Ta có: $AC = a\sqrt{2}$ (đường chéo hình vuông), suy ra $OA = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$AE = \frac{SA \cdot AO}{\sqrt{SA^2 + AO^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3a^2 + \frac{2a^2}{4}}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Tam giác SAO vuông tại A có:

Vậy $d(A, (SBD)) = AE = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Ta chứng minh được $AK \perp (SCD)$. Khi đó: $\begin{cases} SC \perp AH \\ SC \perp AK \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK)$.

Gọi $F = SC \cap (AHK)$ thì $SC \perp AF$.

Khi đó: $d(C, (AHK)) = CF$.

Ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{3a^2 + 2a^2} = a\sqrt{5}$.

Tam giác SAC vuông tại A có đường cao AF nên:

$$CF \cdot CS = AC^2 \Rightarrow CF = \frac{AC^2}{CS} = \frac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $d(C, (AHK)) = CF = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Khi đó:

a) $AD \parallel (SBC)$

b) Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng: $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD, AB bằng: $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

d) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng: $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Sai

a) Ta có: $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(D, (SBC)) = d(A, (SBC))$.

Trong mặt phẳng (SAB) , kẻ $AH \perp SB$ tại H . (1)

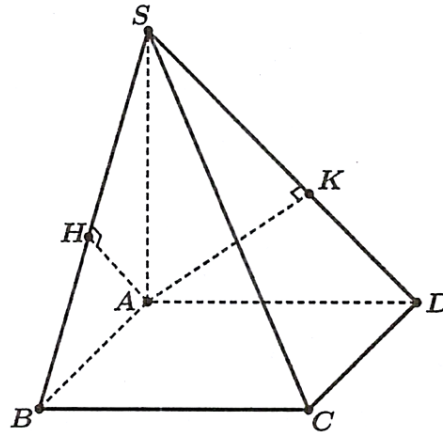
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow AH \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC)$ hay $d(A, (SBC)) = AH$.

Tam giác SAB vuông tại A có đường cao AH nên:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{4a^2 + 2a^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $d(D, (SBC)) = d(A, (SBC)) = AH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$



b) Trong mặt phẳng (SAD) , kẻ $AK \perp SD$ tại K . (3)

Ta có: $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AK$.(4)

Từ (3) và (4) suy ra AK là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau AB, SD .

Tam giác ACD vuông tại D nên $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{3a^2 - 2a^2} = a$.

Tam giác SAD vuông tại A có đường cao AK nên

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AK = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a \cdot a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $d(AB, SD) = AK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$

c) Diện tích đáy hình chóp là: $S_{ABCD} = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}.$

Thể tích khối chóp cần tìm là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot a^2\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}a^3}{3} \quad (\text{đơn vị thể tích}).$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy và tam giác SAB đều cạnh $2a$. Biết tam giác ABC vuông tại C và cạnh $AC = a\sqrt{3}$. Khi đó:

a) $SH \perp (ABC)$

b) $d(S, (ABC)) = a\sqrt{3}$

c) $d(C, (SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

d) Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{6}$

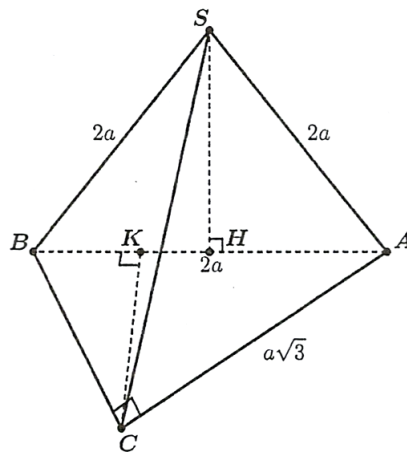
Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Sai

a) Gọi H là trung điểm AB , mà tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$.

Ngoài ra $(SAB) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.

Ta có: $d(S, (ABC)) = SH = \frac{2a \cdot \sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ do tam giác SAB đều cạnh $2a$.



Kẻ đường cao CK của tam giác ABC .

Ta có: $\begin{cases} CK \perp AB \\ CK \perp SH \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SAB) \Rightarrow d(C, (SAB)) = CK$.

Xét tam giác ABC vuông tại C có:

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a; CK = \frac{CA \cdot CB}{AB} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $d(C, (SAB)) = CK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích đáy hình chóp là: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} a\sqrt{3} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{2}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AD = a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AB và $\angle SCH = 45^\circ$. Khi đó:

a) $BC \perp (SAB)$

b) $d(H, (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

c) Gọi K là trung điểm CD khi đó: $CD \perp (SHK)$

d) $d(H, (SCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai

a) Kẻ đường cao HE trong tam giác SBH . (1)

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SH \text{ (do } SH \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp HE$. (2)

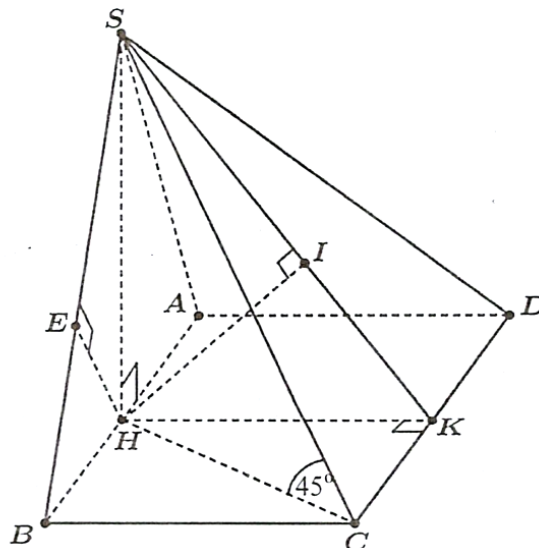
Từ (1) và (2) suy ra $HE \perp (SBC)$ hay $d(H, (SBC)) = HE$.

Tam giác BCH vuông tại B có:

$$\begin{aligned} CH &= \sqrt{BC^2 + BH^2} \\ &= \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Tam giác SCH vuông tại H có:

$$\tan \angle SCH = \frac{SH}{CH} \Rightarrow SH = a\sqrt{2}.$$



Tam giác SBH vuông tại H có đường cao HE nên

$$\begin{aligned}\frac{1}{HE^2} &= \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{BH^2} \\ \Rightarrow HE &= \frac{SH \cdot BH}{\sqrt{SH^2 + BH^2}} \\ &= \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.\end{aligned}$$

Vậy $d(H, (SBC)) = HE = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

b) Gọi K là trung điểm CD thì HK là đường trung bình của hình chữ nhật $ABCD$ nên $HK \parallel BC \parallel AD \Rightarrow HK \perp CD$.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK)$.

Kẻ đường cao HI của tam giác SHK .

Ta có: $\begin{cases} HI \perp SK \\ HI \perp CD \text{ (do } CD \perp (SHK), HI \subset (SHK)) \end{cases} \Rightarrow HI \perp (SCD)$.

Tam giác SHK vuông tại H có đường cao HI nên

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} \Rightarrow HI = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy $d(H, (SCD)) = HI = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 5: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = b, AA' = c$. Khi đó:

a) $AB \perp (ADD'A')$

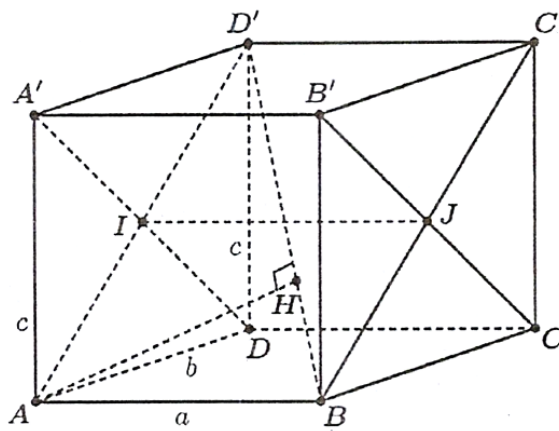
b) Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BD' bằng: $\frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

c) Gọi I, J theo thứ tự là tâm của các hình chữ nhật $ADD'A', BCC'B'$. Khi đó IJ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD' và $B'C$.

d) Khoảng cách hai đường thẳng AD' và $B'C$ bằng $2a$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Sai



Kẻ đường cao AH trong tam giác ABD , suy ra $d(A, BD) = AH$.

Vì $ABCD.A'B'C'$ là hình hộp chữ nhật nên $AB \perp (ADD'A')$,

suy ra $AB \perp AD$ hay tam giác ABD vuông tại A .

Tam giác ADD' vuông tại D có: $AD' = \sqrt{AD^2 + DD'^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$.

Tam giác ABD' vuông tại A có đường cao AH nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD'^2} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AD'}{\sqrt{AB^2 + AD'^2}} = \frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Vậy
$$d(A, BD') = \frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $\begin{cases} AB \parallel C'D' \\ AB = C'D' \end{cases}$

$\Rightarrow ABC'D'$ là hình bình hành.

Dễ thấy I, J lần lượt là trung điểm của AD' và BC' suy ra IJ là đường trung bình của hình bình hành $ABC'D' \Rightarrow IJ \parallel AB$, mà $AB \perp AD'$ nên $IJ \perp AD'$. (1)

Ta có: $AB \perp (BCC'B') \Rightarrow AB \perp B'C \Rightarrow IJ \perp B'C$. (2)

Mặt khác IJ cắt cả hai đường thẳng $AD', B'C$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra IJ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD' và $B'C$. Ta có $IJ = AB = a$.

Câu 6: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , gọi O là tâm của đáy và

$$SO = \frac{a\sqrt{3}}{3}. \text{ Khi đó:}$$

a) $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

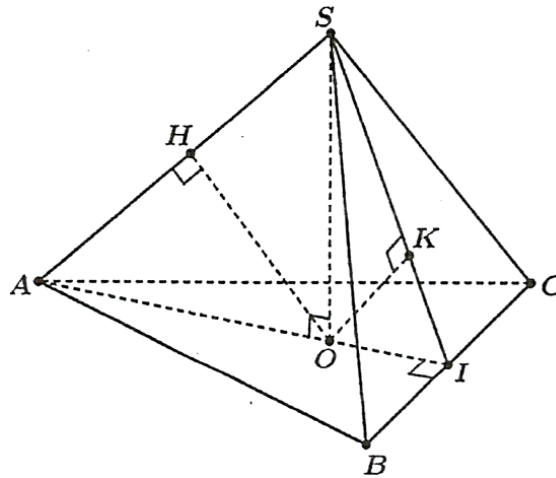
b) $d(O, SA) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

c) Kẻ đường cao AI của tam giác ABC , khi đó: $OI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

d) $d(O, (SBC)) = \frac{a\sqrt{15}}{12}$

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Sai



Kẻ đường cao AI của tam giác ABC , ta có O thuộc AI .

Trong mặt phẳng (SAI) , dựng $OH \perp SA$ tại $H \Rightarrow d(O, SA) = OH$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AO = \frac{2}{3} AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = SO$.

Tam giác SAO vuông cân tại O nên $OH = \frac{SA}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

$$d(O, SA) = OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Vậy

Ta xét khoảng cách từ O đến mặt bên (SBC) .

Kẻ đường cao OK của tam giác SOI . (1)

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SO \text{ (do } SO \perp (ABC)) \\ BC \perp AI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp OK$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $OK \perp (SBC)$ hay $OK = d(O, (SBC))$.

Ta có:
$$OI = \frac{AI}{3} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Tam giác SOI vuông tại O có đường cao OK nên

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow OK = \frac{SO \cdot OI}{\sqrt{SO^2 + OI^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{\frac{3a^2}{9} + \frac{3a^2}{36}}} = \frac{a\sqrt{15}}{15}$$

Vậy $d(O, (SBC)) = OK = \frac{a\sqrt{15}}{15}.$

Câu 7: Cho lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có $AC = a, BC = 2a, \angle C = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của BB' . Khi đó:

a) $d(CC', (ABB'A')) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

b) $d(CC', AM) = \frac{a\sqrt{21}}{12}$

c) $AA' \perp (ABC), AA' \perp (A'B'C')$

d) Biết khoảng cách giữa hai mặt đáy lăng trụ bằng $2a$. Khi đó thể tích khối lăng trụ là: $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

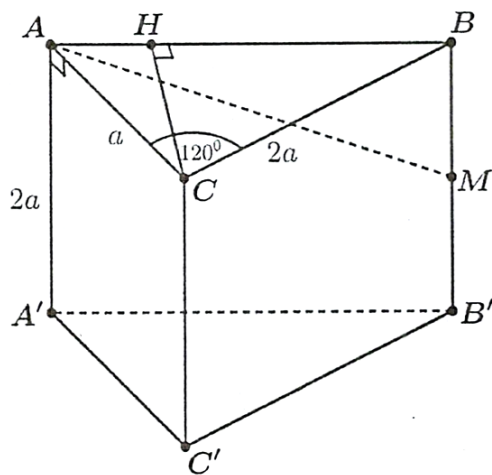
Ta có: $CC' \parallel BB' \Rightarrow CC' \parallel (ABB'A')$ nên $d(CC', (ABB'A')) = d(C, (ABB'A'))$.

Trong mặt phẳng (ABC) , kẻ $CH \perp AB$ tại H . (1)

Vì $ABC \cdot A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng nên $AA' \perp (ABC) \Rightarrow CH \perp AA'$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CH \perp (ABB'A') \Rightarrow d(C, (ABB'A')) = CH$.

Xét tam giác ABC , có $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cos 120^\circ = 7a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{7}$.



Diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \sin C = \frac{1}{2} AB \cdot CH$

$$\Rightarrow CH = \frac{CA \cdot CB \cdot \sin 120^\circ}{AB} = \frac{a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Vậy $d(CC', (ABB'A')) = CH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

AM và CC' là hai đường thẳng chéo nhau mà $\begin{cases} CC' \parallel (ABB'A') \\ AM \subset (ABB'A') \end{cases}$

Ta có

nên $d(CC', AM) = d(CC', (ABB'A')) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

Vì $ABC \cdot A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng nên $AA' \perp (ABC), AA' \perp (A'B'C')$

Do vậy $d((ABC), (A'B'C')) = AA' = 2a$

Khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có chiều cao $h = AA' = 2a$, diện tích đáy là:

$$S = S_{ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} a \cdot 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

Thể tích khối lăng trụ là: $V = Sh = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot 2a = a^3 \sqrt{3}$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD), SA = a\sqrt{3}, ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Khi đó:

a) $d(A, (SBC)) = \frac{\sqrt{3}}{3} a$

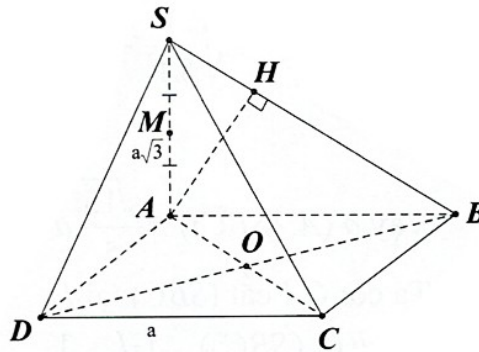
b) $AD \parallel (SBC)$

c) $d(D, (SBC)) = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

d) Gọi M là trung điểm SA . Khi đó: $d(M, (SBC)) = \frac{\sqrt{3}}{4}a$

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng



Kẻ $AH \perp SB$ tại H

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

Ta lại có: $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$

$$AH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{3}a)^2} + \frac{1}{a^2}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Ta có:

Vậy $d(A, (SBC)) = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Ta có: $AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(D, (SBC)) = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Ta có: MA cắt (SBC) tại S

$$\Rightarrow \frac{d(M, (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{MS}{AS} = \frac{1}{2} \Rightarrow d(M, (SBC)) = \frac{1}{2}d(A, (SBC)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a.$$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B có $AB = 1, \angle ACB = 30^\circ$. Biết SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2$. Gọi H là hình chiếu của A trên SB . Khi đó:

a) $d(A, SB) = AH$

b) $d(B, (SAC)) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $BC = \sqrt{3}$

d) Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng: $\frac{\sqrt{3}}{6}$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Sai

Vì $AH \perp SB$ nên $d(A, SB) = AH$.

Tam giác SAB vuông tại A , đường cao AH nên $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2}$

$$\Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

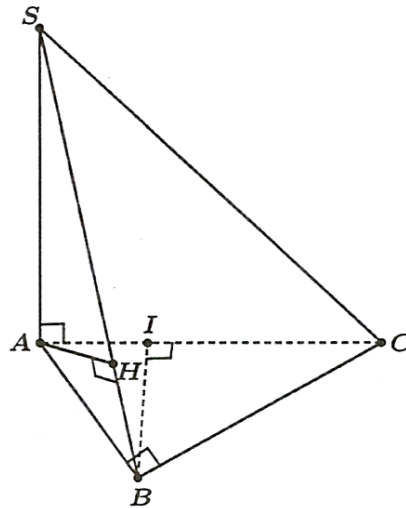
Trong mặt phẳng (ABC) , kẻ $BI \perp AC$ tại I .

Mặt khác $BI \perp SA$ (do $SA \perp (ABC), BI \subset (ABC)$).

Vì vậy $BI \perp (SAC)$ hay $d(B, (SAC)) = BI$.

Tam giác ABI vuông tại I có: $\sin \angle BAC = \frac{BI}{AB} \Rightarrow BI = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(B, (SAC)) = BI = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Tam giác ABC vuông tại B có: $\tan \angle ACB = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$.

Diện tích đáy hình chóp là: $S = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Chiều cao hình chóp $h = SA = 2$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (đơn vị thể tích).

Câu 10: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC \cdot A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó:

a) Trong mặt phẳng $(A'B'C')$, kẻ $A'H \perp B'C'$ tại H . Khi đó: $B'C' \perp (AA'H)$

b) $d((ABC), (A'B'C')) = a.$

c) Diện tích đáy của lăng trụ là: $a^2\sqrt{5}$

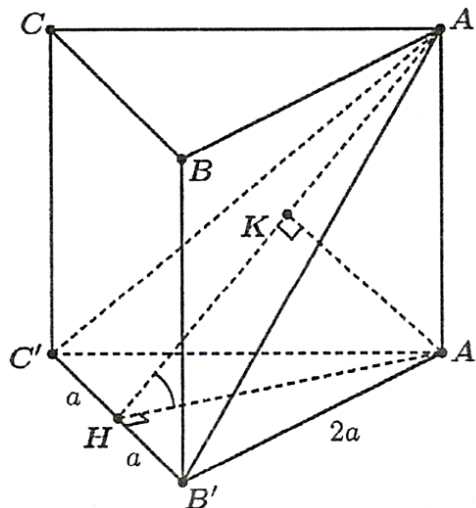
d) Thể tích khối lăng trụ là: $a^3 \sqrt{3}$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

Trong mặt phẳng $(A'B'C')$, kẻ $A'H \perp B'C'$ tại H .

Trong mặt phẳng $(AA'H)$, kẻ $A'K \perp AH$ tại K . (1)



Ta có: $\begin{cases} B'C' \perp A'H \\ B'C' \perp AA' (\text{do } AA' \perp (A'B'C')) \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AA'H) \Rightarrow A'K \perp B'C' (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $A'K \perp (AB'C')$ hay $d(A', (AB'C')) = A'K = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác $A'B'C'$ đều có đường cao $A'H = \frac{2a \cdot \sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Tam giác $AA'H$ vuông tại A' có đường cao $A'K$ nên

$$\frac{1}{A'K^2} = \frac{1}{A'H^2} + \frac{1}{A'A^2} \Rightarrow \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{A'A^2} \Rightarrow A'A = a.$$

Hai mặt đáy lăng trụ song song với nhau và có khoảng cách là:

$$d((ABC), (A'B'C')) = AA' = a.$$

Diện tích đáy của lăng trụ (đáy là tam giác đều) là: $S_{\Delta A'B'C'} = \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \sqrt{3}$

Thể tích khối lăng trụ là: $V = AA' \cdot S_{\Delta A'B'C'} = a \cdot a^2 \sqrt{3} = a^3 \sqrt{3}$ (đơn vị thể tích).

Câu 11: Cho hình tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b ($a \neq b$). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đoạn thẳng MN là đường vuông góc chung của AB và SC (M và N lần lượt là trung điểm của AB và SC).

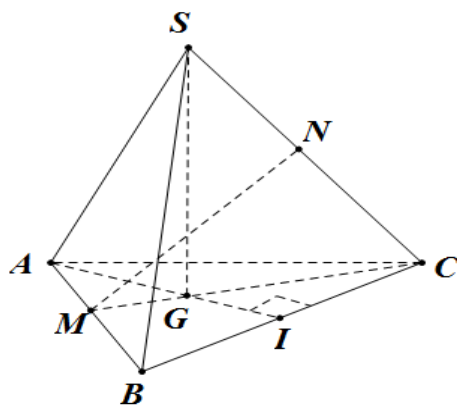
b) Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy bằng nhau.

c) Hình chiếu vuông góc của S lên trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC .

d) SA vuông góc với BC .

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng



□ $\Delta SAG = \Delta SBG = \Delta SCG$. Suy ra góc giữa các cạnh bên và đáy bằng nhau.

□ $\begin{cases} SA = SB = SC \\ AB = AC = BC \end{cases}$, suy ra hình chiếu vuông góc của S lên trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC .

□ $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp SA$.

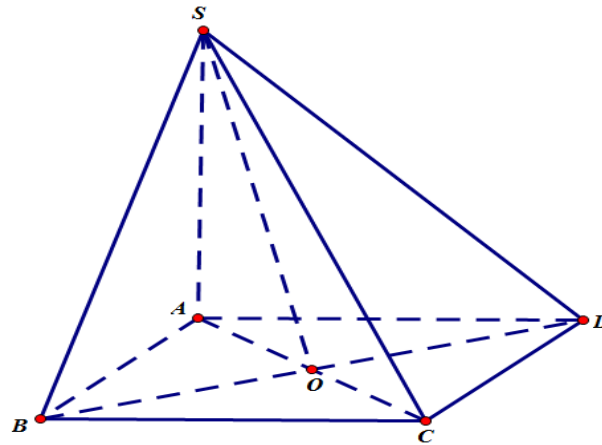
Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $((SBC), (ABCD)) = \angle SBA$
- b) $d(D, (SAC)) = DO$
- c) $(SC, (SAD)) = \angle CSD$
- d) $d(CD, SB) = BD$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai

d: sai vì BD không vuông góc với CD .

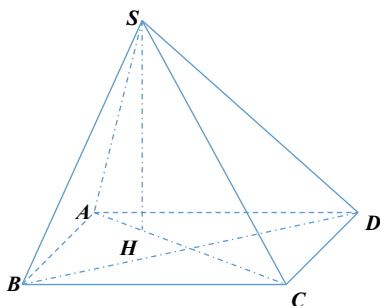


Câu 13: Cho hình chóp $SABCD$ có $SA = x$ và tất cả các cạnh đều bằng nhau và bằng a . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $(SAC) \perp (ABCD)$
- b) Tam giác SAC là tam giác vuông.
- c) $(SAC) \perp (SBD)$
- d) Chiều cao của hình chóp $S.ABCD$ là $h = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{2}$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai



Tứ giác $ABCD$ có 4 cạnh bằng nhau $\Rightarrow ABCD$ là hình thoi.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$

Vì $SB = SC = SD \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABCD$

Vì $\Delta ABCD$ cân nên H thuộc trung tuyến kẻ từ C .

$\Rightarrow H \in AC$.

Nên đáp án A, C đúng.

Mà ta có: $\Rightarrow H \in AC$.

Mà ta có: $\Delta ABD = \Delta CBD = \Delta SBD$ ($c - c - c$) $\Rightarrow AD = CO = SO \Rightarrow SO = \frac{1}{2} AC$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S . Do đó đáp án b đúng.

Trong tam giác SAC , kẻ $SH \perp AC$.

Khi đó ta có: $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SH \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Suy ra: $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow SH = h = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Do đó đáp án d sai.

Câu 14: Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh AB, CD thỏa mãn $AB^2 + CD^2 = 18$ và các cạnh còn lại đều bằng 5. Biết thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất có

dạng $V_{\max} = \frac{x\sqrt{y}}{4}$; $x, y \in \mathbb{N}^*$; $(x; y) = 1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $x + y^2 - xy > 4550$.

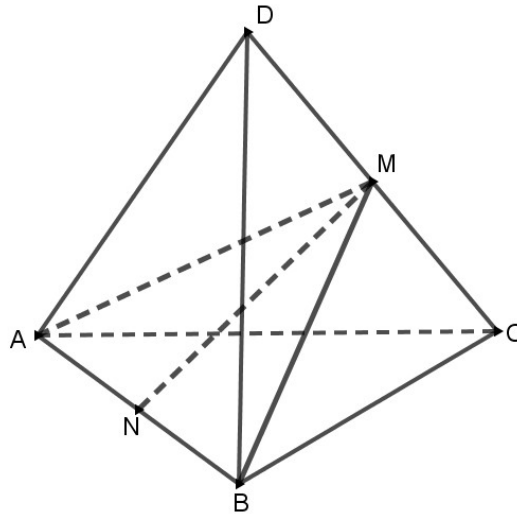
b) $xy + 2x + y > 2550$.

c) $x^2 - xy + y^2 < 5240$.

d) $x^3 - y > 19602$.

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Sai d) Sai



Đặt $AB = a$.

Gọi M là trung điểm $CD \Rightarrow CD \perp AM, CD \perp BM \Rightarrow CD \perp (ABM)$.

Khi đó $V_{ABCD} = V_{ABMC} + V_{ABMD} = \frac{1}{3} S_{ABM} \cdot CM + \frac{1}{3} S_{ABM} \cdot DM = \frac{1}{3} S_{ABM} \cdot CD$.

Do AM là trung tuyến của tam giác ACD nên:

$$AM^2 = \frac{2(AC^2 + AD^2) - CD^2}{4} = \frac{2(5^2 + 5^2) - (18 - a^2)}{4} = \frac{82 + a^2}{4}$$

Tam giác ABM cân tại M (vì $AM = BM$) nên:

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \sqrt{AM^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{\frac{82}{4}} = \frac{a\sqrt{82}}{4}$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{82}}{4} \cdot \sqrt{18 - a^2} = \frac{\sqrt{82}}{12} \cdot \sqrt{a^2(18 - a^2)} \leq \frac{\sqrt{82}}{12} \cdot \frac{a^2 + 18 - a^2}{2} = \frac{3\sqrt{82}}{4} \Rightarrow x = 3, y = 82$$

Câu 15: Nếu ba kích thước của hình hộp chữ nhật được tăng lên hoặc giảm đi lần lượt k_1, k_2, k_3 lần, nhưng thể tích vẫn không thay đổi. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $k_1 k_2 k_3 = 1$.
- b) $k_1 + k_2 + k_3 = k_1 k_2 k_3$.
- c) $k_1 + k_2 + k_3 = 1$.
- d) $k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 = 1$.

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Sai d) Sai

Gọi a, b, c lần lượt là ba kích thước của hình hộp chữ nhật.

Khi tăng (giảm) ba kích thước này lên k_1, k_2, k_3 lần thì hình hộp chữ nhật mới có ba kích thước là k_1a, k_2b, k_3c . Theo giả thiết, ta có

$$a.b.c = (k_1a).(k_2b).(k_3c) = (k_1k_2k_3)abc \Leftrightarrow k_1k_2k_3 = 1 \quad (\text{do } a, b, c \text{ là các số dương}).$$

Câu 16: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của đáy ABC , d_1 là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) và d_2 là khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $SO \perp (ABC)$

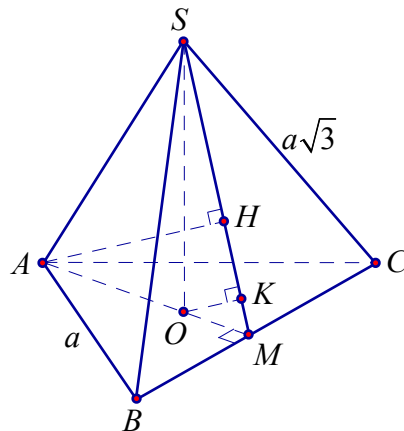
b) $d_1 = d_2$

c) $d_1 = 3d_2$

d) $d = d_1 + d_2 = \frac{8a\sqrt{2}}{33}$.

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng



Do tam giác ABC đều tâm O suy ra $AO \perp BC$ tại M là trung điểm của BC .

Ta có: $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, MO = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}, OA = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Từ giả thiết hình chóp đều suy ra $SO \perp (ABC)$,

$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}.$$

Dựng $OK \perp SM, AH \perp SM \Rightarrow AH \parallel OK; \frac{OK}{AH} = \frac{OM}{AM} = \frac{1}{3}$.

$$\text{Có } \begin{cases} BC \perp SO \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp OK$$

$$\text{Có } \begin{cases} OK \perp SM \\ OK \perp BC \end{cases} \Rightarrow OK \perp (SBC), AH \perp (SBC) \text{ (do } AH \parallel OK \text{)}$$

$$\text{Từ đó có } d_1 = d(A, (SBC)) = AH = 3OK; d_2 = d(O, (SBC)) = OK$$

Trong tam giác vuông OSM có đường cao OK nên:

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{36}{3a^2} + \frac{9}{24a^2} = \frac{99}{8a^2} \Rightarrow OK = \frac{2a\sqrt{2}}{33}$$

$$\text{Vậy } d = d_1 + d_2 = 4OK = \frac{8a\sqrt{2}}{33}$$

Câu 17: Xét khối tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$, các cạnh còn lại đều bằng $2\sqrt{3}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Diện tích tam giác BCD bằng $S_{BCD} = 3\sqrt{3}$

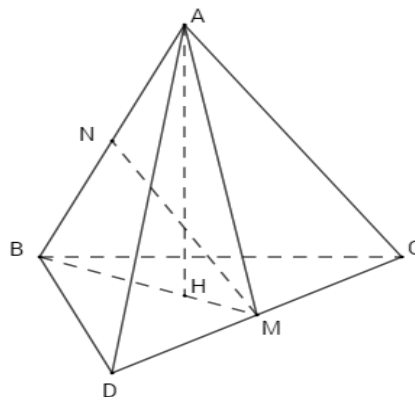
$$\text{b) } V_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{3} x \sqrt{36 - x^2}$$

$$\text{c) Khi } x = 3 \text{ thì } V = \frac{9}{4}$$

d) Khi $x = 3\sqrt{2}$ thì thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Sai d) Đúng



Gọi M, N lần lượt là trung điểm CD và AB ; H là hình chiếu vuông góc của A lên BM .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} CD \perp BM \\ CD \perp AM \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABM) \Rightarrow (ABM) \perp (ABC)$$

Mà $AH \perp BM$; $BM = (ABM) \cap (ABC) \Rightarrow AH \perp (ABC)$.

Do ACD và BCD là hai tam giác đều cạnh $2\sqrt{3} \Rightarrow AM = BM = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 3$.

Tam giác AMN vuông tại N , có: $MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}}$.

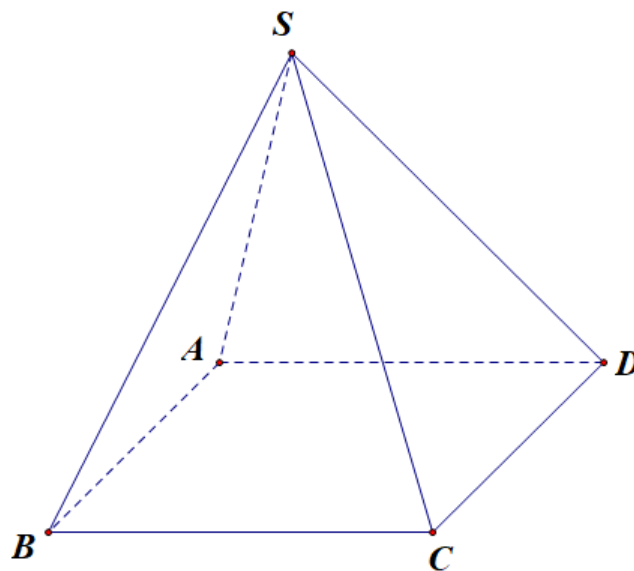
Lại có: $S_{BCD} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2\sqrt{3})^2 = 3\sqrt{3}$.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} AH \cdot S_{BCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x\sqrt{36-x^2}}{6} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} x\sqrt{36-x^2}$$

$$\text{Ta có: } V_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{6} x\sqrt{36-x^2} \leq \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{x^2 + 36 - x^2}{2} = 3\sqrt{3}$$

Suy ra V_{ABCD} lớn nhất bằng $3\sqrt{3}$ khi $x^2 = 36 - x^2 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SC = x$ ($0 < x < \sqrt{3}$), các cạnh còn lại đều bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Biết rằng thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất khi và chỉ khi $x = \frac{\sqrt{a}}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}^+$). Các mệnh đề sau đúng hay sai?



a) $a^2 - 2b < 30$.

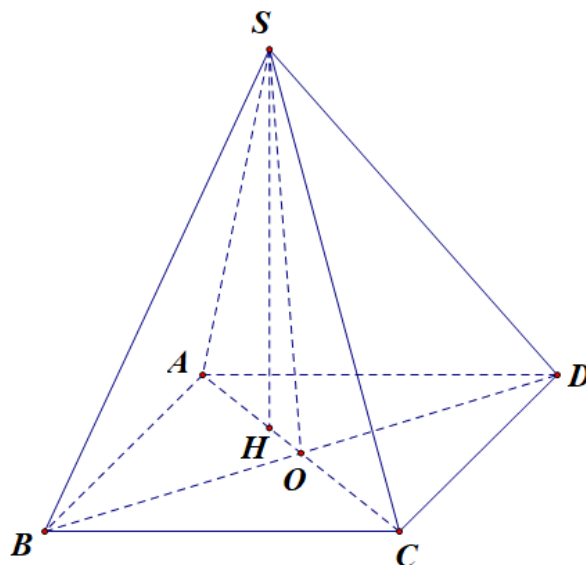
b) $a^2 - 8b = 20$.

c) $b^2 - a < -2$.

d) $2a - 3b^2 = -1$.

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Sai



Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$, vì $SA = SB = SD$ nên $H \in AO$ với O là trung điểm của BD

Ta xét hai tam giác SBD và ABD có cạnh BD chung, $SB = AB$, $SD = AD$ nên $\triangle SBD = \triangle ABD$ suy ra $AO = SO = OC$ do đó $\triangle SAC$ vuông tại S .

Ta có
$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2} \Rightarrow BO = \frac{\sqrt{3-x^2}}{2} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{\sqrt{(1+x^2)(3-x^2)}}{2} \quad (0 < x < \sqrt{3})$$

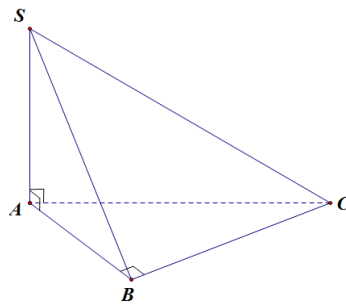
Mặt khác
$$SH = \frac{SA \cdot SC}{\sqrt{SA^2 + SC^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Vậy
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \frac{\sqrt{x^2(3-x^2)}}{6} \leq \frac{1}{4}.$$

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ lớn nhất khi và chỉ khi $x^2 = 3 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Vậy
$$\begin{cases} a=6 \\ b=2 \end{cases}. \text{ Suy ra } a^2 - 8b = 20.$$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B (tham khảo hình vẽ).



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) là đoạn BC .
- b) $BC \perp (SAB)$.
- c) Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) là đoạn AB .
- d) $SB \perp BC$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

$$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$$

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \text{Đáp án } B, D \text{ đúng.}$$

Suy ra khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) là đoạn BC . Đáp án A đúng.

$\triangle ABC$ vuông tại B nên AB không vuông góc với (SAC) . Vậy đáp án sai là C.

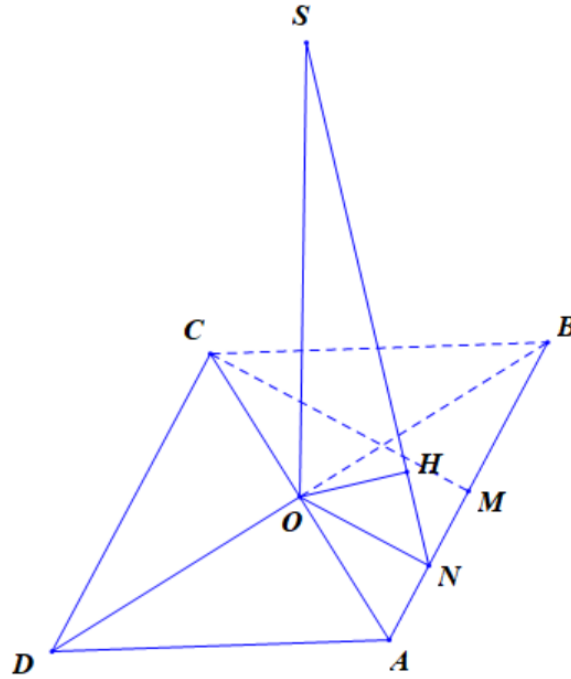
Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh a ,

$\angle ABC = 60^\circ$, $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \frac{3a}{4}$, đặt $x = d(O, (SAB))$, $y = d(D, (SAB))$, $z = d(CD, SA)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $x = \frac{3a}{4}$.
- b) $y = 2x$.
- c) $y = z + x$.
- d) $x + y + z = \frac{15a}{8}$.

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Đúng



Tam giác ABC đều cạnh a nên đường cao $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi N là trung điểm của $AM \Rightarrow ON \perp AB; ON = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Kẻ $OH \perp SN \Rightarrow d(O, (SAB)) = OH$.

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{ON^2}; \quad ON = \frac{1}{2}CM = \frac{a\sqrt{3}}{4}; \quad SO = \frac{3a}{4} \Rightarrow OH = \frac{3a}{8}.$$

$$x = d(O, (SAB)) = \frac{3a}{8}, \quad y = d(D, (SAB)) = 2 \cdot d(O, (SAB)) = 2x, \quad z = d(CD, SA) = d(D, (SAB)) = 2x.$$

$$\text{Vậy } x + y + z = 5x = \frac{15a}{8}.$$

Câu 21: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có ba kích thước $AB = a, AD = b, AA_1 = c$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC_1 bằng b .

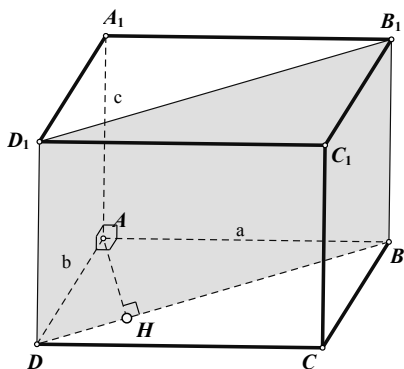
b) khoảng cách từ A đến mặt phẳng (B_1BD) bằng $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

c) khoảng cách từ A đến mặt phẳng (B_1BD) bằng $\frac{abc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

d) $BD_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng



$d(AB, CC_1) = BC = b \Rightarrow$ Câu A đúng.

$$d(A, (B_1BD)) = AH; \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{(ab)^2} \Rightarrow AH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \text{ Câu B đúng.}$$

Suy ra câu c sai.

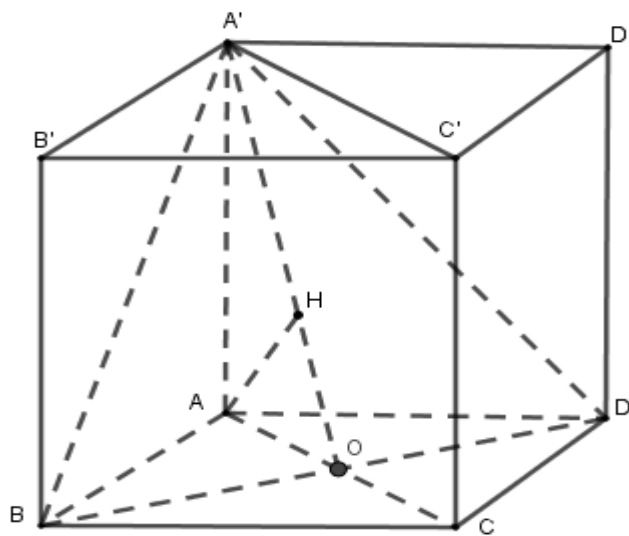
Suy ra câu d đúng, đường chéo hình chữ nhật bằng $BD_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Khoảng cách từ điểm A đến $(A'BD)$ bằng $\frac{a}{3}$.
- b) Độ dài đoạn $AC' = a\sqrt{3}$.
- c) Khoảng cách từ điểm A đến $(CDD'C')$ bằng $a\sqrt{2}$.
- d) Khoảng cách từ điểm A đến $(BCC'B')$ bằng $\frac{3a}{2}$.

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Sai



Ta có
$$d(A; (A'BD)) = AH = \frac{AO \cdot AA'}{\sqrt{AO^2 + AA'^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} = a\sqrt{3}$$

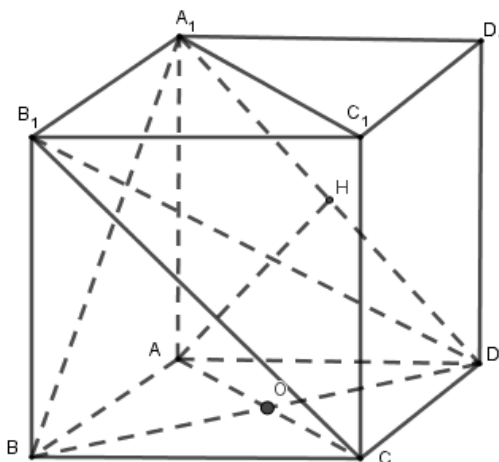
$$d(A; (CDD'C')) = AD = a; d(A; (BCC'B')) = AB = a$$

Câu 23: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh bằng a . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Khoảng cách từ điểm A đến (B_1BD) bằng $\frac{a}{3}$.
- b) Khoảng cách từ AB đến B_1D bằng $\frac{a}{\sqrt{2}}$.
- c) Khoảng cách từ điểm A đến (CDD_1C_1) bằng $a\sqrt{2}$.
- d) $AC_1 = a\sqrt{2}$.

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Sai



Ta dựng $AH \perp A_1D \Rightarrow AH \perp (A_1B_1CD)$

Do $AB \parallel A_1B_1 \Rightarrow d(AB; B_1D) = d(AB; (A_1B_1CD)) = AH = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Lại có $d(A; (CDD_1C_1)) = AD = a$ và $AC_1 = a\sqrt{3}$.

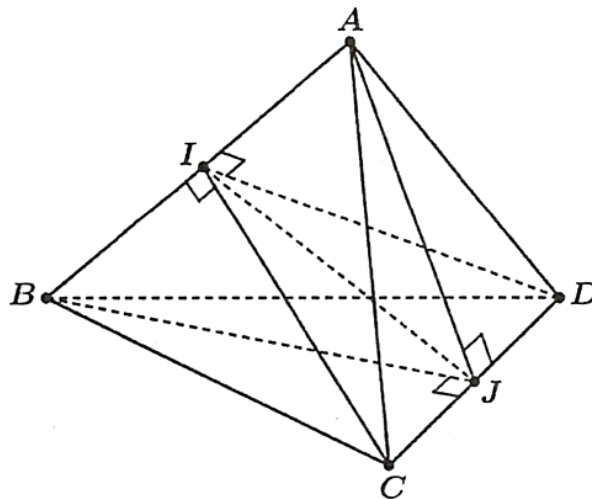
•Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh $2a$. Tìm đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau AB, CD và tính độ dài của nó theo a .

Trả lời: $a\sqrt{2}$

Lời giải

Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB, CD .



Các tam giác ABC, ABD đều có I là trung điểm AB nên

$$\begin{cases} AB \perp CI \\ AB \perp DI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ICD), \quad \text{mà } IJ \subset (ICD) \Rightarrow AB \perp IJ \quad (1)$$

Tương tự, các tam giác ACD, BCD đều có J là trung điểm CD nên

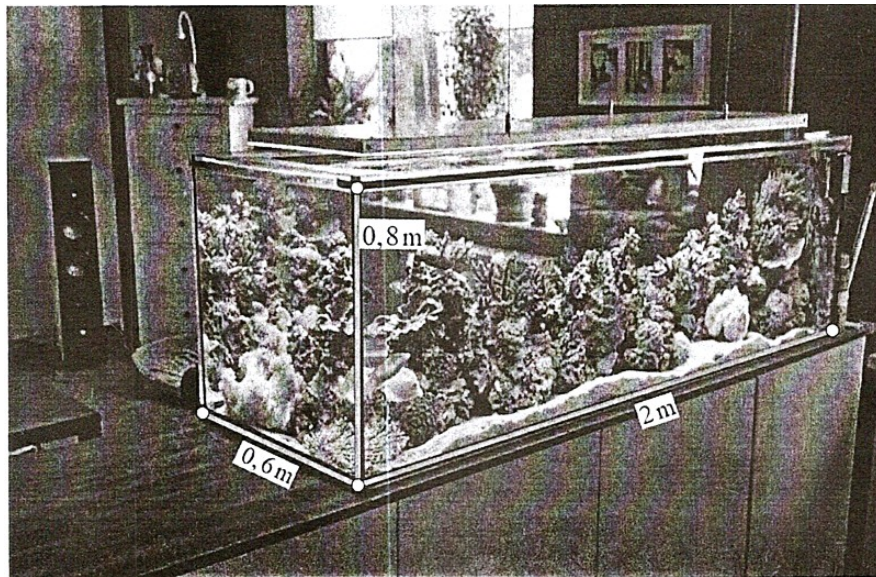
$$\begin{cases} CD \perp AJ \\ CD \perp BJ \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABJ), \quad \text{mà } IJ \subset (ABJ) \Rightarrow CD \perp IJ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra IJ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB, CD .

$$CI = \frac{2a \cdot \sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}; IJ = \sqrt{CI^2 - CJ^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$$

Ta có:

Câu 2: Một bể cá được làm bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $0,6m; 2m; 0,8m$. Tìm thể tích và độ dài đường chéo của bể cá đó.



Trả lời: $0,96(m^3)$ và $2,236(m)$

Lời giải

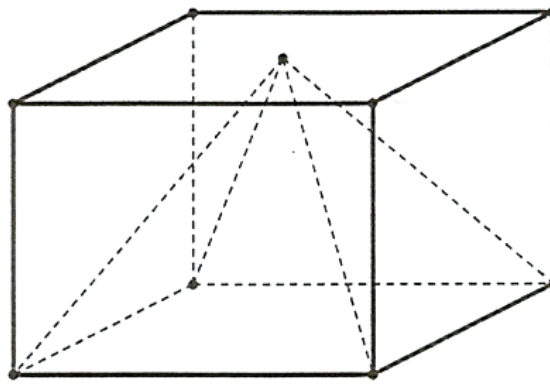
Thể tích của bể cá hình hộp chữ nhật có ba kích thước $a = 0,6m; b = 2m; c = 0,8m$ là:

$$V = abc = 0,6 \cdot 2 \cdot 0,8 = 0,96(m^3)$$

Độ dài đường chéo bể kính hình hộp chữ nhật là:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{0,6^2 + 2^2 + 0,8^2} = \sqrt{5} \approx 2,236(m).$$

Câu 3: Một cái hộp hình lập phương, bên trong nó đựng một mô hình đồ chơi có dạng hình chóp tứ giác đều mà đỉnh của hình chóp đó trùng với tâm của một mặt chiếc hộp, giả sử hình vuông đáy của hình chóp trùng với một mặt của chiếc hộp (mặt này cùng với mặt chứa đỉnh hình chóp là hai mặt đối nhau). Biết cạnh của chiếc hộp bằng $30cm$, hãy tính thể tích phần không gian bên trong chiếc hộp không bị chiếm bởi mô hình đồ chơi dạng hình chóp (mô hình đồ chơi được làm bởi chất liệu nhựa đặc bên trong).



$$18000(\text{cm}^3)$$

Trả lời:

Lời giải

$$V_1 = 30^3 = 27000(\text{cm}^3)$$

Thể tích cái hộp (khối lập phương) là:

Xét đồ chơi có dạng hình chóp tứ giác đều, chiều cao của hình chóp bằng với một cạnh của hình lập phương, hay $h = 30\text{cm}$, đáy của hình chóp có diện tích $S = 30^2 = 900\text{cm}^2$.

Thể tích khối đồ chơi (khối chóp tứ giác đều) là:

$$V_2 = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot 900 \cdot 30 = 9000(\text{cm}^3).$$

Thể tích phần không gian bên trong chiếc hộp không bị chiếm bởi mô hình

$$V = V_1 - V_2 = 27000 - 9000 = 18000(\text{cm}^3)$$

đồ chơi dạng hình chóp:

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tìm thể tích khối chóp $S.ABCD$.

$$\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$$

Trả lời:

Lời giải

Gọi H là trung điểm AB , suy ra $SH \perp AB$ (do tam giác SAB đều).

Mặt khác $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

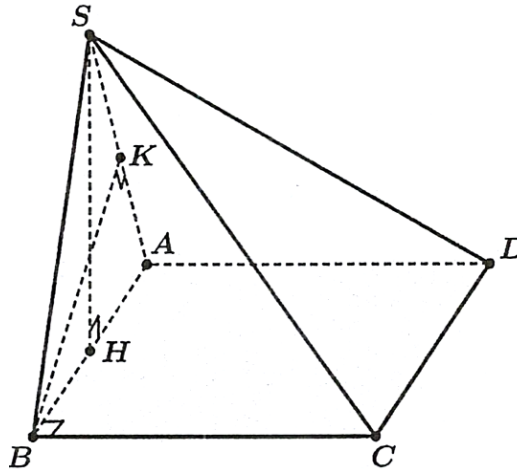
$$SH = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

Đường cao hình chóp là

diện tích đáy hình chóp $S_{ABCD} = a^2$.

Thể tích khối chóp là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6} \quad (\text{đơn vị thể tích}).$$



Câu 5: Một hình chóp cắt đều $ABC \cdot A'B'C'$ có cạnh đáy lớn bằng $4a$, cạnh đáy nhỏ bằng $2a$ và chiều cao của nó bằng $\frac{3a}{2}$. Tìm thể tích của khối chóp cắt đều đó.

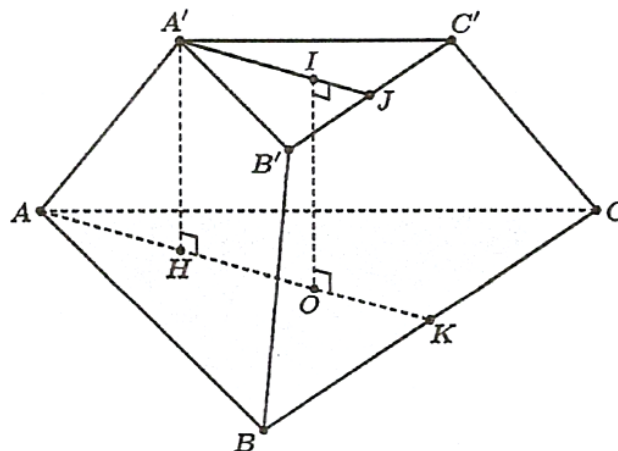
$$\frac{7a^3\sqrt{3}}{2}$$

Trả lời:

Lời giải

Gọi O, I theo thứ tự là tâm của đáy lớn ABC và đáy bé $A'B'C'$; K, J theo thứ tự là trung điểm của BC và $B'C'$.

Ta có $h = IO = \frac{3a}{2}$ là chiều cao của hình chóp cắt đều $ABC \cdot A'B'C'$.



Diện tích hai đáy hình chóp cắt đều là:

$$S_1 = S_{\Delta ABC} = \frac{(4a)^2 \sqrt{3}}{4} = 4a^2 \sqrt{3}; S_2 = S_{\Delta A'B'C'} = \frac{(2a)^2 \sqrt{3}}{4} = a^2 \sqrt{3}$$

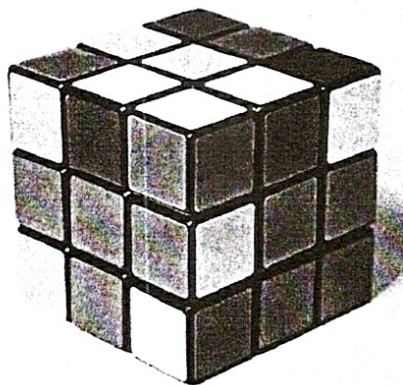
Thể tích khối chóp cắt đều là:

$$V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} (4a^2 \sqrt{3} + \sqrt{4a^2 \sqrt{3} \cdot a^2 \sqrt{3}} + a^2 \sqrt{3}) = \frac{7a^3 \sqrt{3}}{2} \quad (\text{đơn vị thể tích})$$

Câu 6: Một khối rubik 3×3 (được chia làm 27 khối lập phương nhỏ) có dạng một hình lập phương với kích thước cạnh bằng 6 cm .

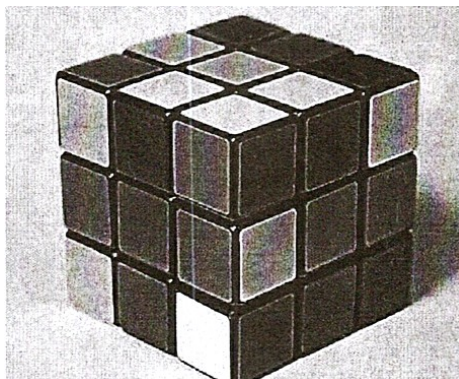
Tìm thể tích của khối rubik đó, biết khoảng hở giữa các khối lập phương nhỏ không đáng kể.



$$116(\text{cm}^3).$$

Trả lời:

Lời giải



Thể tích khối rubik là:

$$V = 6^3 = 116(\text{cm}^3).$$

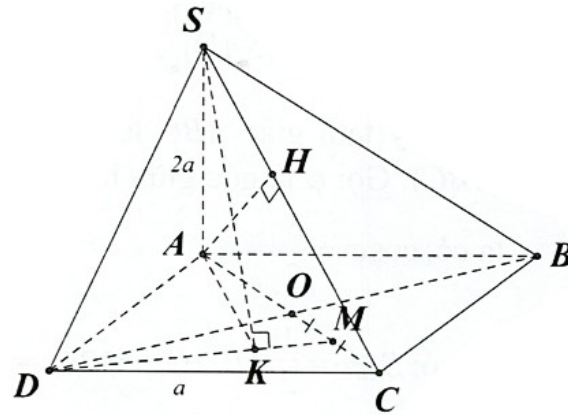
Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD), SA = 2a, ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Gọi O là tâm của $ABCD$.

Tính khoảng cách từ S đến DM với M là trung điểm OC .

$$d(S, DM) = \frac{\sqrt{190}}{5}a$$

Trả lời:

Lời giải



Kẻ $SK \perp DM$ tại $K \Rightarrow d(S, DM) = SK$.

$$\begin{cases} DM \perp SA \\ DM \perp SK \end{cases} \Rightarrow DM \perp (SAK) \Rightarrow DM \perp AK$$

Ta có:

$$\Delta KMA \sim \Delta OMD$$

Ta có:

$$\Rightarrow \frac{KA}{OD} = \frac{AM}{DM} \Rightarrow KA = \frac{AM \cdot OD}{DM} = \frac{\frac{3}{4}a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}a$$

$$SK = \sqrt{SA^2 + AK^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{3\sqrt{10}}{5}a\right)^2} = \frac{\sqrt{190}}{5}a$$

Ta có:

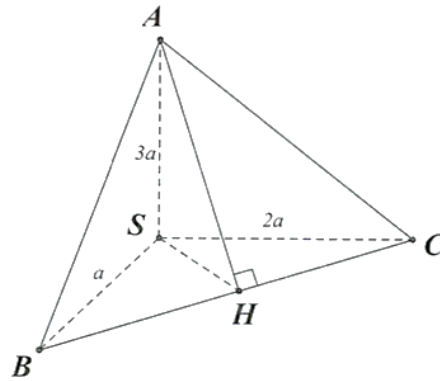
$$d(S, DM) = \frac{\sqrt{190}}{5}a$$

Vậy

Câu 8: Cho tứ diện $S.ABC$ trong đó SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và $SA = 3a, SB = a, SC = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng BC .

Trả lời: $d(A, BC) = \frac{7\sqrt{5}}{5}a$

Lời giải



Kẻ $AH \perp BC$ tại $H \Rightarrow d(A, BC) = AH$.

Ta có:
$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$$

$$SH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SC^2} + \frac{1}{SB^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{a^2}}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$$

Ta có:

$$AH = \sqrt{SA^2 + SH^2} = \sqrt{(3a)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}a\right)^2} = \frac{7\sqrt{5}}{5}a$$

Ta có:

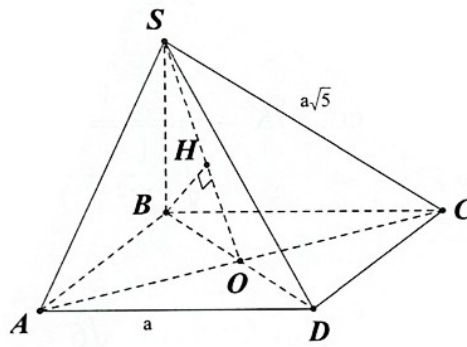
$$d(A, BC) = \frac{7\sqrt{5}}{5}a$$

Vậy

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = a\sqrt{5}$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) .

Trả lời: $\frac{2}{3}a$

Lời giải



Kẻ $BH \perp SO$ tại H

$$\begin{cases} AC \perp SB \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp BH$$

Ta có:

$$BH \perp SO \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow d(B, (SAC)) = BH$$

Ta lại có:

$$SB = \sqrt{SC^2 - BC^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - a^2} = 2a$$

Ta có:

$$BH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SB^2} + \frac{1}{OB^2}}}$$

Ta có:

$$d(B, (SAC)) = \frac{2}{3}a$$

Vậy

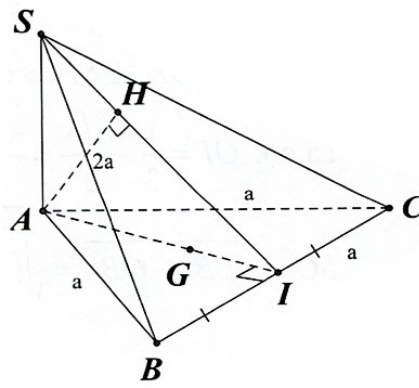
Ta có: DB cắt (SAC) tại O

$$\Rightarrow \frac{d(D, (SAC))}{d(B, (SAC))} = \frac{DO}{BO} = 1 \Rightarrow d(D, (SAC)) = d(B, (SAC)) = \frac{2}{3}a$$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a, SA \perp (ABC)$ và $SB = 2a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) .

Trả lời: $\frac{\sqrt{15}}{15}a$

Lời giải



Kẻ $AI \perp BC$, kẻ $AH \perp SI$ tại H

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$$

Ta có:

$$AH \perp SI \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$$

Ta lại có:

$$SA = \sqrt{SB^2 - BA^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$$

Ta có:

$$AH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{3}a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}} = \frac{\sqrt{15}}{5}a$$

Ta có:

$$d(A, (SBC)) = \frac{\sqrt{15}}{5}a$$

Vậy

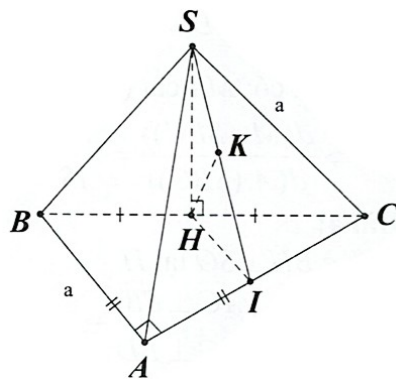
Ta có: GA cắt (SBC) tại I

$$\Rightarrow \frac{d(G, (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{GI}{AI} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(G, (SBC)) = \frac{1}{3}d(A, (SBC)) = \frac{\sqrt{15}}{15}a.$$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $A, SH \perp (ABC)$ với H là trung điểm BC . Biết $AB = SC = a$. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .

Trả lời: $\frac{\sqrt{6}}{3}a$

Lời giải



Kẻ $HI \perp AC$, kẻ $HK \perp SI$ tại K

$$\begin{cases} AC \perp SH \\ AC \perp HI \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHI) \Rightarrow AC \perp HK$$

Ta có:

$$HK \perp SI \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow d(H, (SAC)) = HK$$

Ta lại có:

$$HI = \frac{1}{2}a$$

Ta có: ;

$$SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$HK = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}a\right)^2}}} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

Ta có:

$$d(H, (SAC)) = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

Vậy

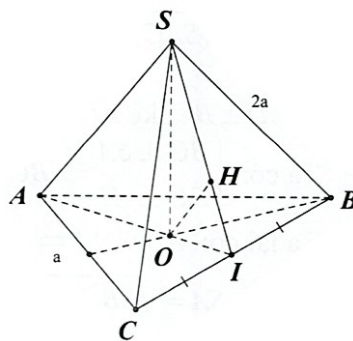
Ta có: BH cắt (SAC) tại C

$$\Rightarrow \frac{d(B, (SAC))}{d(H, (SAC))} = \frac{BC}{HC} = 2 \Rightarrow d(B, (SAC)) = 2d(H, (SAC)) = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Câu 12: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh a và cạnh bên $2a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

Trả lời: $\frac{\sqrt{165}}{45}a$

Lời giải



Kẻ $OH \perp SI$ tại H

$$\begin{cases} BC \perp OI \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOI) \Rightarrow BC \perp OH$$

Ta có:

$$OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O, (SBC)) = OH$$

Ta lại có:

$$OI = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} a$$

Ta có: ;

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3} a$$

$$OH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{33}}{3} a\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{6} a\right)^2}}} = \frac{\sqrt{165}}{45} a$$

Ta có:

$$d(O, (SBC)) = \frac{\sqrt{165}}{45} a$$

Vậy

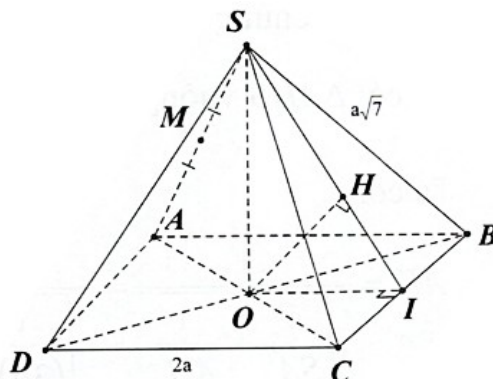
Ta có: AO cắt (SBC) tại I

$$\Rightarrow \frac{d(A, (SBC))}{d(O, (SBC))} = \frac{AI}{OI} = 3 \Rightarrow d(A, (SBC)) = 3d(O, (SBC)) = \frac{\sqrt{165}}{15} a$$

Câu 13: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy cạnh $2a$ và cạnh bên $a\sqrt{7}$, gọi M là trung điểm SA . Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) .

Trả lời: $\frac{\sqrt{30}}{6} a$

Lời giải



$$d(O, (SBC)) = OH$$

Dựng và chứng minh được

$$OI = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$$

Ta có:

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(a\sqrt{7})^2 - \left(\frac{2a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{5}a$$

$$OH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{5}a)^2} + \frac{1}{a^2}}} = \frac{\sqrt{30}}{6}a$$

Ta có:

$$d(O, (SBC)) = \frac{\sqrt{30}}{6}a.$$

Vậy

$$MO \parallel (SBC) \Rightarrow d(M, (SBC)) = d(O, (SBC)) = \frac{\sqrt{30}}{6}a$$

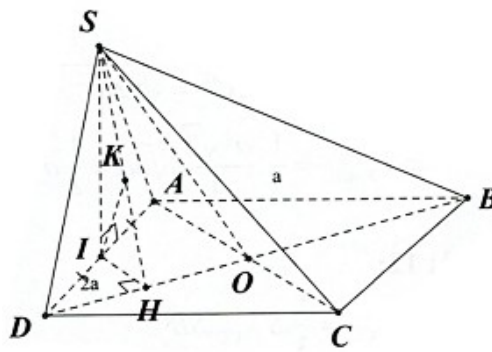
Ta lại có:

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = a, AD = 2a$. Tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) .

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Trả lời:

Lời giải



Gọi I là trung điểm của AD

Vì $\triangle SAD$ đều nên $SI \perp AD$

$$\begin{cases} (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ \text{Trong}(SAD), SI \perp AD \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$$

Ta có

$$d(I, (SBD)) = IK$$

Dựng và chứng minh được

Ta có: $\triangle HDI \sim \triangle ADB$

$$\Rightarrow \frac{IH}{AB} = \frac{ID}{BD} \Rightarrow IH = \frac{AB \cdot ID}{BD} = \frac{a \cdot a}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} a$$

$$IK = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SI^2} + \frac{1}{HI^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{5}a\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{4} a$$

Ta có:

$$d(I, (SBD)) = \frac{\sqrt{3}}{4} a$$

Vậy

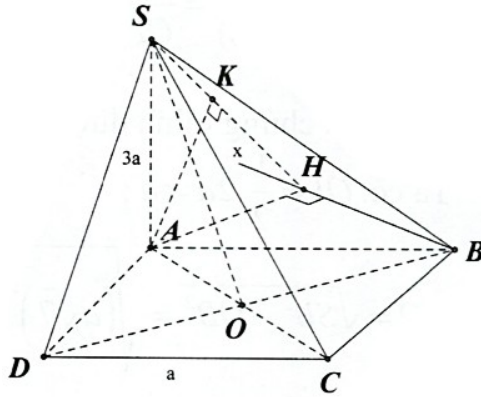
Ta có: AI cắt (SBD) tại D

$$\Rightarrow \frac{d(A, (SBD))}{d(I, (SBD))} = \frac{AD}{ID} = 2 \Rightarrow d(A, (SBD)) = 2d(I, (SBD)) = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 3a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB .

Trả lời:

Lời giải



$$Bx \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (SBx)$$

Dựng

$$d(AC, SB) = d(AC, (SBx)) = d(A, (SBx))$$

Suy ra

$$d(A, (SBx)) = AK$$

Dựng và chứng minh được

$$AH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Ta có: ΔAHB vuông cân tại H nên

Ta có:

$$AK = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(3a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}}} = \frac{3\sqrt{19}}{19}a$$

$$d(AC, SB) = \frac{3\sqrt{19}}{19}a$$

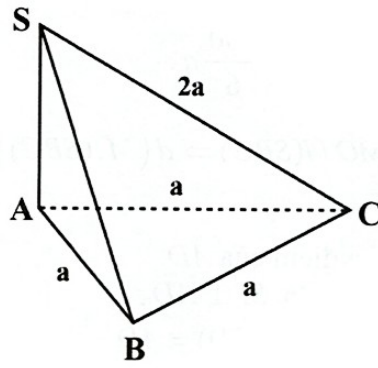
Vậy

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a, SA \perp (ABC)$ và $SC = 2a$.
 Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

$$\frac{1}{4}a^3$$

Trả lời:

Lời giải



$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

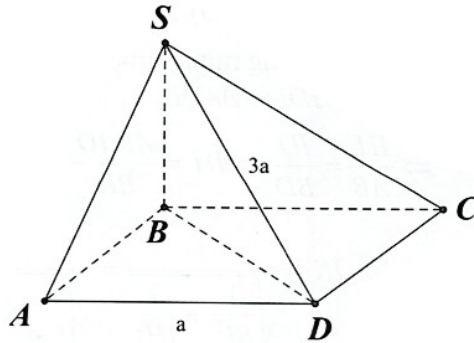
$$SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3}a = \frac{1}{4}a^3$$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SB \perp (ABCD)$ và $SD = 3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Trả lời: $\frac{\sqrt{7}}{3}a^3$

Lời giải



$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SB$$

$$S_{ABCD} = a^2$$

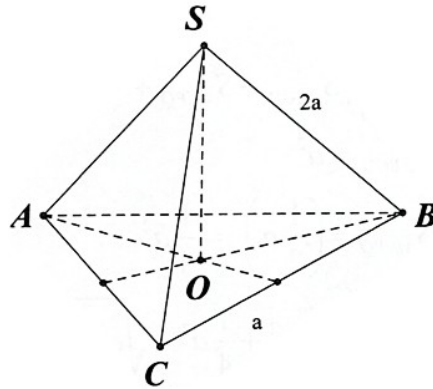
$$SB = \sqrt{SD^2 - BD^2} = \sqrt{(3a)^2 - (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}a$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{7}a = \frac{\sqrt{7}}{3}a^3$$

Câu 18: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh a và cạnh bên $2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Trả lời: $\frac{\sqrt{11}}{12}a^3$

Lời giải



$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SO$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

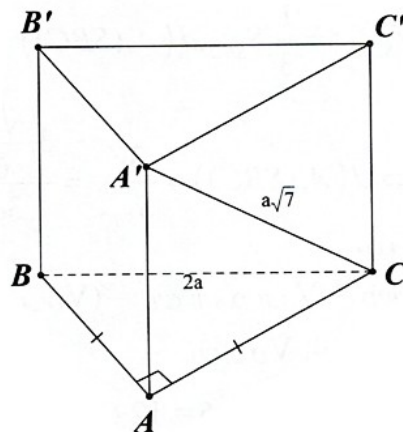
$$SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}a$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{33}}{3}a = \frac{\sqrt{11}}{12}a^3$$

Câu 19: Cho khối lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $BC = 2a$ và $A'C = a\sqrt{7}$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

Trả lời: $\sqrt{5}a^3$

Lời giải



$$V = S_{ABC} \cdot A'A$$

$$AB = AC = \frac{2a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a$$

$$S_{ABC} = \frac{(\sqrt{2}a)^2}{2} = a^2$$

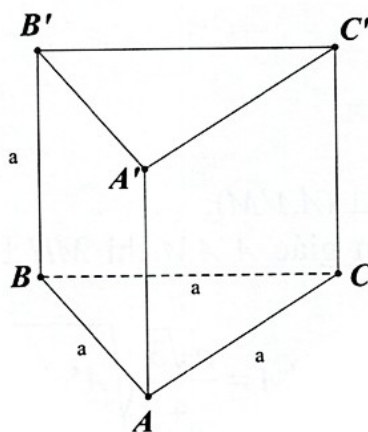
$$A'A = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = \sqrt{(a\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{5}a$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = a^2 \cdot \sqrt{5}a = \sqrt{5}a^3$$

Câu 20: Cho khối lăng trụ đều $ABC \cdot A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

Trả lời: $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$

Lời giải



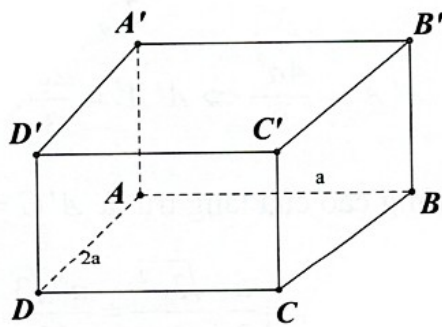
$$V = S_{ABC} \cdot A'A$$

$$= \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{2}a^3$$

Câu 21: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a$. Biết thể tích khối hộp chữ nhật là $14a^3$. Tính chiều cao $A'C$.

Trả lời: $3\sqrt{6}a$

Lời giải



$$V = AB \cdot AD \cdot AA'$$

$$\Rightarrow AA' = \frac{V}{AB \cdot AD} = \frac{14a^3}{a \cdot 2a} = 7a$$

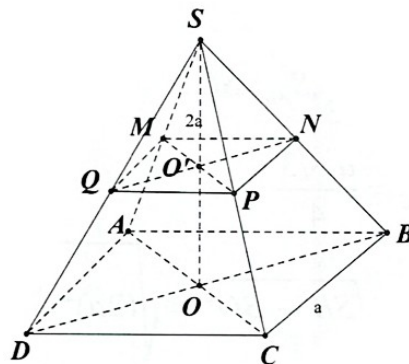
$$AC = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{AA'^2 + AB^2 + AD^2}$$

$$= \sqrt{(7a)^2 + (2a)^2 + a^2} = 3\sqrt{6}a$$

Câu 22: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy cạnh a và chiều cao $SO = 2a$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Tính thể tích khối chóp cụt đều $ABCD.MNPQ$.

Trả lời: $\frac{7}{12}a^3$

Lời giải



$$V = \frac{1}{3} (S_{ABCD} + S_{MNPQ} + \sqrt{S_{ABCD} \cdot S_{MNPQ}}) \cdot OO'$$

$$S_{ABCD} = a^2$$

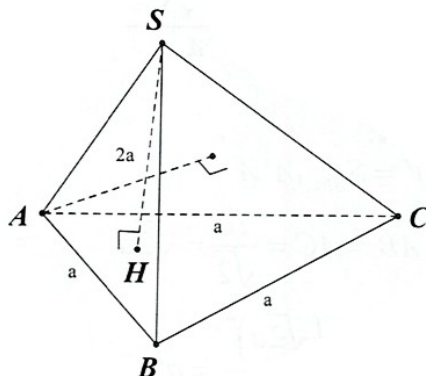
$$S_{MNPQ} = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \left(a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{4}a^2} \right) \cdot a = \frac{7}{12}a^3$$

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , chiều cao của hình chóp kẻ từ S là $2a$. Biết diện tích tam giác SBC là $3a^2$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

Trả lời: $\frac{\sqrt{3}}{6}a$

Lời giải



$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \frac{\sqrt{3}}{6} a^3$$

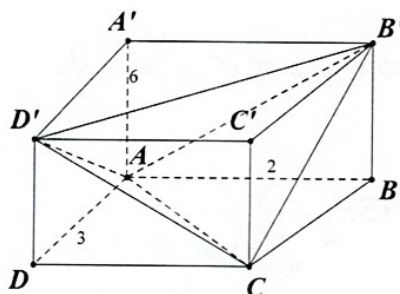
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{SBC} \cdot d(A, (SBC))$$

$$\Rightarrow d(A, (SBC)) = \frac{3V}{S_{SBC}} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} a^3}{3a^2} = \frac{\sqrt{3}}{6} a$$

Câu 24: Một hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước là $2cm, 3cm$ và $6cm$. Tính thể tích của khối tứ diện $ACB'D'$.

Trả lời: $12(cm^3)$

Lời giải



$$\begin{aligned} V_{ACB'D'} &= V_{ABCD.A'B'C'D'} - (V_{D'.ACD} + V_{B'.ABC} + V_{A'.AB'D'} + V_{C'.B'C'D'}) \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 6 - 4 \cdot V_{D'.ACD} \\ &= 36 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 12(cm^3) \end{aligned}$$

Câu 25: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC .

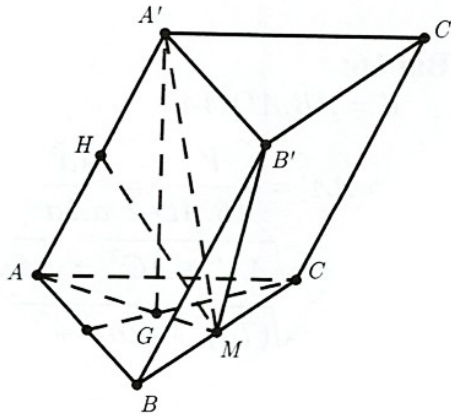
Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Trả lời: $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Lời giải

M là trung điểm của BC thì $BC \perp (AA'M)$.

Gọi MH là đường cao của tam giác $A'AM$ thì $MH \perp AA'$ và $HM \perp BC$ nên HM là khoảng cách AA' và BC .



$$A'AHM = A'GAM \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot AA' = \frac{a\sqrt{3}}{4} \sqrt{A'A^2 - \frac{a^2}{3}}$$

Ta có

$$\Leftrightarrow A'A^2 = 4 \left(A'A^2 - \frac{a^2}{3} \right) \Leftrightarrow 3A'A^2 = \frac{4a^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow A'A^2 = \frac{4a^2}{9} \Leftrightarrow A'A = \frac{2a}{3}$$

$$A'G = \sqrt{\frac{4a^2}{9} - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a}{3}$$

Đường cao của lăng trụ là

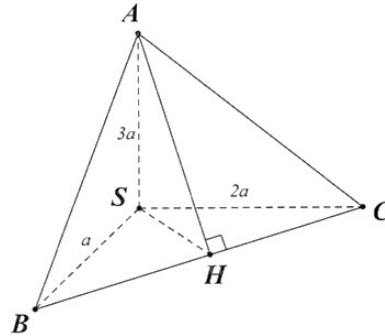
$$V_{LT} = \frac{a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

Thể tích

Câu 26: Cho tứ diện $S.ABC$ trong đó SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và $SA = 3a, SB = a, SC = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng BC .

Trả lời: $d(A, BC) = \frac{7\sqrt{5}}{5}a$

Lời giải



Kẻ $AH \perp BC$ tại $H \Rightarrow d(A, BC) = AH$

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$$

Ta có:

$$SH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SC^2} + \frac{1}{SB^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{a^2}}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$$

Ta có:

$$AH = \sqrt{SA^2 + SH^2} = \sqrt{(3a)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}a\right)^2} = \frac{7\sqrt{5}}{5}a$$

Ta có:

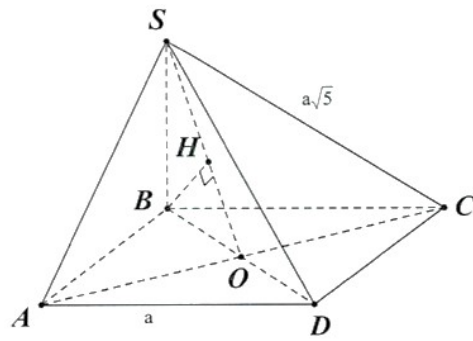
$$d(A, BC) = \frac{7\sqrt{5}}{5}a$$

Vậy .

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = a\sqrt{5}$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) .

Trả lời: $\frac{2}{3}a$

Lời giải



Kẻ $BH \perp SO$ tại H

$$\begin{cases} AC \perp SB \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp BH$$

Ta có:

$$BH \perp SO \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow d(B, (SAC)) = BH.$$

Ta lại có:

$$SB = \sqrt{SC^2 - BC^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - a^2} = 2a$$

Ta có:

$$BH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SB^2} + \frac{1}{OB^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}} = \frac{2}{3}a$$

Ta có:

$$d(B, (SAC)) = \frac{2}{3}a$$

Vậy .

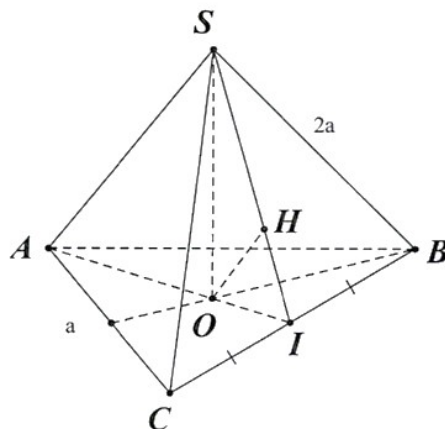
Ta có: DB cắt (SAC) tại O

$$\Rightarrow \frac{d(D, (SAC))}{d(B, (SAC))} = \frac{DO}{BO} = 1 \Rightarrow d(D, (SAC)) = d(B, (SAC)) = \frac{2}{3}a.$$

Câu 28: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh a và cạnh bên $2a$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

Trả lời: $\frac{\sqrt{165}}{15}a$

Lời giải



Kẻ $OH \perp SI$ tại H

$$\begin{cases} BC \perp OI \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOI) \Rightarrow BC \perp OH$$

Ta có:

$$OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O, (SBC)) = OH$$

Ta lại có:

$$OI = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a \quad SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}a$$

Ta có: ;

$$OH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{33}}{3}a\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}}} = \frac{\sqrt{165}}{45}a$$

Ta có:

$$d(O, (SBC)) = \frac{\sqrt{165}}{45}a$$

Vậy

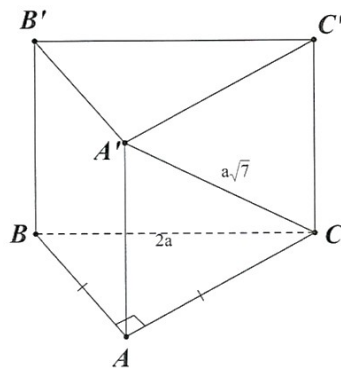
Ta có: AO cắt (SBC) tại I

$$\Rightarrow \frac{d(A, (SBC))}{d(O, (SBC))} = \frac{AI}{OI} = 3 \Rightarrow d(A, (SBC)) = 3d(O, (SBC)) = \frac{\sqrt{165}}{15}a.$$

Câu 29: Cho khối lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $BC = 2a$ và $A'C = a\sqrt{7}$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

Trả lời: $\sqrt{5}a^3$.

Lời giải



$$V = S_{ABC} \cdot AA'$$

$$AB = AC = \frac{2a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a$$

$$S_{ABC} = \frac{(\sqrt{2}a)^2}{2} = a^2$$

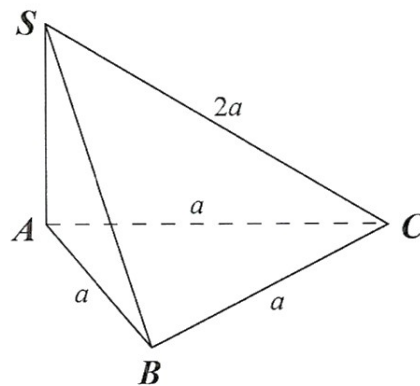
$$AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = \sqrt{(a\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{5}a$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = a^2 \cdot \sqrt{5}a = \sqrt{5}a^3.$$

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a, SA \perp (ABC)$ và $SC = 2a$.
 Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Trả lời: $\frac{1}{4}a^3$

Lời giải



$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA$$

$$S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

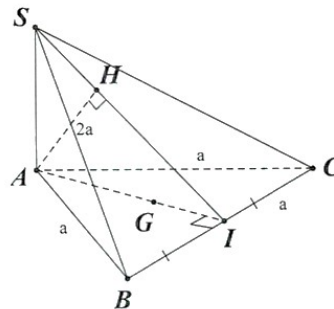
$$SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3}a = \frac{1}{4}a^3$$

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SB = 2a$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) .

Trả lời: $\frac{\sqrt{15}}{15}a$

Lời giải



Kẻ $AI \perp BC$, kẻ $AH \perp SI$ tại H

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$$

Ta có: .

Ta lại có: $AH \perp SI \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$

$$SA = \sqrt{SB^2 - BA^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$$

Ta có:

$$AH = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{3}a)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}} = \frac{\sqrt{15}}{5}a$$

Ta có:

$$d(A, (SBC)) = \frac{\sqrt{15}}{5}a$$

Vậy .

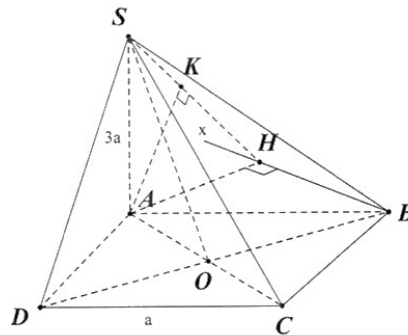
Ta có: $\frac{GA}{AI} = \frac{d(G, (SBC))}{d(A, (SBC))}$ cắt tại I

$$\Rightarrow \frac{d(G, (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{GI}{AI} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(G, (SBC)) = \frac{1}{3} d(A, (SBC)) = \frac{\sqrt{15}}{15} a.$$

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 3a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB .

Trả lời: $d(AC, SB) = \frac{3\sqrt{19}}{19} a$

Lời giải



$$Bx \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (SBx)$$

Dựng

$$d(AC, SB) = d(AC, (SBx)) = d(A, (SBx))$$

Suy ra

$$d(A, (SBx)) = AK$$

Dựng và chứng minh được

Ta có: $\triangle AHB$ vuông cân tại H nên $AH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$AK = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(3a)^2}}} = \frac{3\sqrt{19}}{19} a$$

Ta có:

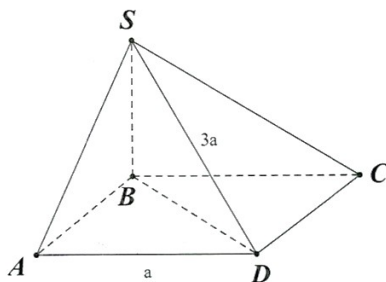
$$d(AC, SB) = \frac{3\sqrt{19}}{19} a$$

Vậy

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SB \perp (ABCD)$ và $SD = 3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Trả lời: $\frac{\sqrt{7}}{3} a^3$

Lời giải



$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SB$$

$$S_{ABCD} = a^2$$

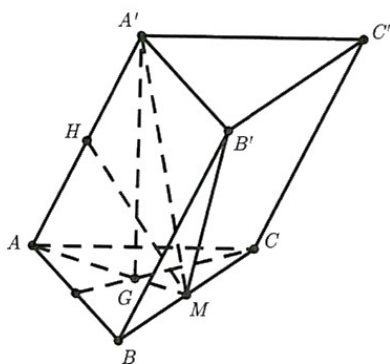
$$SB = \sqrt{SD^2 - BD^2} = \sqrt{(3a)^2 - (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}a \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{7}a = \frac{\sqrt{7}}{3}a^3.$$

Câu 34: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC .

Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$.

Trả lời: $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Lời giải



M là trung điểm của BC thì $BC \perp (AA'M)$.

Gọi MH là đường cao của tam giác $AA'M$ thì $MH \perp AA'$ và $HM \perp BC$ nên HM là khoảng cách AA' và BC .

$$A'A \cdot HM = A'G \cdot AM \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot A'A = \frac{a\sqrt{3}}{2} \sqrt{A'A^2 - \frac{a^2}{3}}$$

Ta có

$$\Leftrightarrow A'A^2 = 4 \left(A'A^2 - \frac{a^2}{3} \right) \Leftrightarrow 3A'A^2 = \frac{4a^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow A'A^2 = \frac{4a^2}{9} \Leftrightarrow A'A = \frac{2a}{3}$$

$$A'G = \sqrt{\frac{4a^2}{9} - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a}{3}$$

Đường cao của lăng trụ là

$$V_{LT} = \frac{a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

Thể tích

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>