Trần Phương

SỔ TAY ĐẠI SỐ CẤP III

Các Phương pháp
và Kỹ thuật Chứng minh

bất đẳng thức

Tập 1

TRẦN PHƯƠNG

Sổ tay Đại số cấp III

CÁC PHƯƠNG PHÁP VÀ KỸ THUẬT CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Tập 1

- 280 BẤT ĐẲNG THỨC CHỌN LỌC
- 130 BẤT ĐẲNG THỨC TRONG BỘ ĐỀ THI TUYỂN SINH
- 15 KỸ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

NHÀ XUẤT BẢN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

CHÚ DẪN MỘT SỐ KÝ HIỆU VÀ CHỮ VIẾT TẮT

1 $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$$\sum_{m,n,p,q} f(m) = f(m) + f(n) + f(p) + f(q)$$

VD : $\sum_{a,b,c} \frac{a}{b+c} = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

2 $\forall \Delta ABC$ với góc (A, B, C) và cạnh (a, b, c) ta qui ước

$$\sum_{A,B,C} f(A) = f(A) + f(B) + f(C)$$

$$\sum_{a,b,c} g(a) = g(a) + g(b) + g(c)$$

VD : $\sum_{A,B,C} \sin A = \sin A + \sin B + \sin C$

$$\sum_{a,b,c} \frac{Aa + Bb}{A + B} = \frac{Aa + Bb}{A + B} + \frac{Bb + Cc}{B + C} + \frac{Cc + Aa}{C + A}$$

3. [8III.2] : Đề số 8 câu III phần 2

CMR : Chứng minh rằng

BĐT : Bất đẳng thức

dpcm : Điều phải chứng minh

TB : Trung bình

gt : giả thiết

VT : Vế trái

dt : diện tích

ĐK : Điều kiện

CĐ, CT : Cực đại, cực tiểu

BCS : Bunhiacôpski

LỜI NHÀ XUẤT BẢN

Trong chương trình toán học phổ thông, bất đẳng thức là phần gây cho học sinh, ngay cả học sinh khá và giỏi, nhiều bối rối nhất. Tuy nhiên, đây cũng là phần quyến rũ những học sinh say mê với toán học và mong giỏi toán vì nó đòi hỏi phải động não, tìm tòi và sáng tạo.

Để giúp các em học sinh làm quen rồi đi đến thích thú các bài toán bất đẳng thức, tác giả Trần Phương viết cuốn sách nhỏ này với mục đích cung cấp cho các em học sinh một vài phương pháp và kỹ thuật chứng minh bất đẳng thức.

Ở tập 1, cách phân loại phương pháp và kỹ thuật chủ yếu dựa trên 130 bài của Bộ đề tuyển sinh(với gần một nửa là cách giải hay khác với cách giải của Bộ đề), sau đó bổ sung 150 bài để giúp các em nắm sâu hơn về kỹ năng và phương pháp. Với mục tiêu học sinh nắm chắc cách giải bài toán bất đẳng thức trong Bộ đề nên có một vài kỹ thuật đưa ra chỉ là sự phân loại theo Bộ đề.

Trong tập 1 này, bất đẳng thức Côsi được viết khá kỹ với 15 kỹ thuật. Đặt biệt các học sinh giỏi cấp toàn quốc không thể bỏ qua kỹ thuật 15, mà nhờ đó có thể dễ dàng chứng minh bất đẳng thức

$$a^b + b^a > 1 \qquad \forall a, b > 0$$

bằng cách sử dụng bất đẳng thức Côsi, chứ không sử dụng bất đẳng thức Becnuli như thường thấy trong các sách đã xuất bản.

Ở phần cuối của sách có giới thiệu 17 bất đẳng thức của các nhà toán học trên thế giới, trong đó có bất đẳng thức

Niutơn-Mac Loranh. Bất đẳng thức Niutơn-Mac Loranh, trong các tài liệu xuất bản hiện nay thường dựa vào định lý Lagrange để chứng minh, tuy nhiên các bạn có thể chứng minh bất đẳng thức này bằng phương pháp bất đẳng thức Côsi (Trong tập 2 sẽ trình bày)

Để sử dụng tốt cuốn sách này, các em học sinh nên đọc cả phần bình luận minh hoạ cho các kỹ thuật. Còn một số kỹ thuật khác tác giả muốn dành cho các em học sinh tự rút ra nhận xét và kết luận. Cũng cần nói thêm để các em học sinh lưu ý, sách còn cung cấp lời giải đúng cho đề thi tuyển sinh số 33III.2.

Vì sách được viết nhằm xoay quanh 130 đề bất đẳng thức trong Bộ đề thi tuyển sinh nên chưa thể cung cấp đầy đủ các phương pháp chứng minh bất đẳng thức.

Nhà xuất bản TP. Hồ Chí Minh trân trọng giới thiệu cuốn sách này và hy vọng nó sẽ giúp ích cho các em học sinh cuối cấp 3 đang chuẩn bị thi vào đại học. Mong nhận được ý kiến đóng góp của các bạn đọc.

NHÀ XUẤT BẢN TP. HỒ CHÍ MINH

§1. 15 KĨ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

I – BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI

1. Dạng tổng quát (n số) : $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ ta có

1.1. Dạng 1 : $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$

1.2. Dạng 2 : $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$

1.3. Dạng 3 : $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^n \geq x_1 x_2 \ldots x_n$

1.4. Dấu bằng $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

1.5. Hệ quả 1 : Nếu $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$ – const thì

$\text{Max}(x_1 x_2 \ldots x_n) = \left(\dfrac{S}{n}\right)^n$ xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \dfrac{S}{n}$

1.6. Hệ quả 2 : Nếu $x_1 x_2 \ldots x_n = P$ – const thì

$\text{Min}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = n\sqrt[n]{P}$ xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \sqrt[n]{P}$

2. Dạng cụ thể (2 số, 3 số)

$n = 2 : \forall x, y \geq 0$ khi đó	$n = 3 : \forall x, y, z \geq 0$ khi đó
2.1 $\dfrac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$	$\dfrac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$
2.2 $x + y \geq 2\sqrt{xy}$	$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$
2.3 $\left(\dfrac{x + y}{2}\right)^2 \geq xy$	$\left(\dfrac{x + y + z}{3}\right)^3 \geq xyz$
2.4 Dấu bằng $\Leftrightarrow x = y$	Dấu bằng $\Leftrightarrow x = y = z$

3. Bình luận

Dạng 2 và dạng 3 khi đặt cạnh dạng 1 có vẻ tầm thường nhưng lại giúp nhận dạng khi sử dụng BĐT Côsi. Đặc biệt có thể sử dụng BĐT Côsi từ TB nhân sang TB cộng ngay cả khi không có căn thức

Ví dụ. CMR $16ab(a-b)^2 \leqslant (a+b)^4 \ \forall a, b \geqslant 0$

Giải : $16ab(a-b)^2 = 4(4ab)(a-b)^2 \overset{(Côsi)}{\leqslant} 4\left[\dfrac{4ab+(a-b)^2}{2}\right]^2$

$$= 4\left[\frac{(a+b)^2}{2}\right]^2 = (a+b)^4$$

II – CÁC KĨ THUẬT SỬ DỤNG

1. Đánh giá từ trung bình cộng sang trung bình nhân

1.1 CMR : $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geqslant 8a^2b^2c^2 \ \forall a, b, c$

Giải :

Sai lầm thường gặp

Sử dụng : $\forall x, y$ thì $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geqslant 0$
$\leftrightarrow x^2 + y^2 \geqslant 2xy$. Do đó

$$\times\begin{cases} a^2 + b^2 \geqslant 2ab \text{ Đúng} \\ b^2 + c^2 \geqslant 2bc \text{ Đúng} \\ c^2 + a^2 \geqslant 2ca \text{ Đúng} \end{cases}$$

$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geqslant 8a^2b^2c^2$ Sai

Ví dụ : $\begin{cases} 1 \geqslant -5 \text{ Đúng} \\ 2 \geqslant -3 \text{ Đúng} \\ 3 \geqslant 2 \text{ Đúng} \end{cases}$

$6 \geqslant 30$ Sai

Lời giải đúng :

Sử dụng **BĐT** Côsi : $x^2 + y^2 \geqslant 2\sqrt{x^2y^2} = 2|xy|$ ta có

$$\times\begin{cases} a^2 + b^2 \geqslant 2|ab| \geqslant 0 \\ b^2 + c^2 \geqslant 2|bc| \geqslant 0 \\ c^2 + a^2 \geqslant 2|ca| \geqslant 0 \end{cases}$$

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \geqslant 8\,|a^2b^2c^2| = 8a^2b^2c^2$$

Bình luận :

- Chỉ nhân các vế của các BĐT cùng chiều (kết quả được BĐT cùng chiều) khi và chỉ khi các vế cùng không âm.

- Nói chung ta ít gặp các bài toán sử dụng ngay BĐT Côsi như bài toán trên mà thường phải biến đổi bài toán đến tình huống thích hợp rồi mới sử dụng BĐT Côsi

1.2 CMR $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8 \geq 64ab(a+b)^2 \ \forall a, b \geq 0$

Giải

Ta có $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8 = \left[(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\right]^4 = \left[(a+b)+2\sqrt{ab}\right]^4 \geq$

$$\overset{\text{Côsi}}{\geq} \left[2\sqrt{(a+b).(2\sqrt{ab})}\right]^4 = 2^4.2^2\ ab(a+b)^2 = 64ab(a+b)^2$$

1.3 [49III.3] : Cho $x_1x_2 > 0$; $x_1z_1 \geq y_1^2$; $x_2z_2 \geq y_2^2$;

CMR : $(x_1+x_2)(z_1+z_2) \geq (y_1+y_2)^2$

Giải

Từ (gt) suy ra x_1, x_2, z_1, z_2 cùng dấu $\Rightarrow x_1z_2 \geq 0$ và $x_2z_1 \geq 0$.
Ta có $(x_1+x_2)(z_1+z_2) = x_1z_1+x_2z_2+x_1z_2+x_2z_1 \geq y_1^2+y_2^2+x_1z_2+x_2z_1$

$$\overset{\text{(Côsi)}}{\geq} y_1^2+y_2^2+2\sqrt{(x_1z_2)(x_2z_1)} \geq y_1^2+y_2^2+2\sqrt{y_1^2y_2^2}$$
$$=(|y_1|+|y_2|)^2 \geq (y_1+y_2)^2$$

1.4 CMR : $(1+a+b)(a+b+ab) \geq 9ab \ \forall a, b \geq 0$

Ta có $(1+a+b)(a+b+ab) \overset{\text{(Côsi)}}{\geq} 3\sqrt[3]{a.b}\ \sqrt[3]{a.b\,ab} = 9ab$

1.5 [148II.2] CMR : $3a^3+7b^3 \geq 9ab^2 \ \forall\ a, b \geq 0$

Giải

$$3a^3+7b^3 \geq 3a^3+6b^3 = 3a^3+3b^3+3b^3 \overset{\text{(Côsi)}}{\geq} 3\sqrt[3]{3a^3.3b^3.3b^3} = 9ab^2$$

1.6 87Vb

Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ \dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}+\dfrac{1}{1+d} \geq 3 \end{cases}$ *CMR :* $abcd \leq \dfrac{1}{81}$

Giải

Từ (gt) suy ra $\dfrac{1}{1+a} \geq \left(1-\dfrac{1}{1+b}\right)+\left(1-\dfrac{1}{1+c}\right)+\left(1-\dfrac{1}{1+d}\right) =$

$$= \frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d} \overset{\text{(Côsi)}}{\geq} 3\sqrt[3]{\frac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}}$$

Tương tự và dẫn đến :

$$\times\begin{cases} \dfrac{1}{1+a} \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}} \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{1+b} \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{bcd}{(1+c)(1+d)(1+a)}} \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{1+c} \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{dab}{(1+d)(1+a)(1+b)}} \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{1+d} \geqslant 3\sqrt[3]{\dfrac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \geqslant 81\frac{abcd}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}$$

Suy ra : $\boxed{abcd \leqslant \dfrac{1}{81}}$

1.7 Cho $\begin{cases} a_1, a_2, \dots a_n > 0 \ (3 \leqslant n \in \mathbf{N}) \\ \dfrac{1}{1+a_1} + \dots + \dfrac{1}{1+a_n} \geqslant n-1 \end{cases}$

CMR : $a_1a_2 \dots a_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)^n}$

Giải

$$\frac{1}{1+a_1} \geqslant \left(1 - \frac{1}{1+a_2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{1}{1+a_n}\right) =$$

$$\frac{a_2}{1+a_2} + \dots + \frac{a_n}{1+a_n} \geqslant$$

$$\geqslant (n-1)\sqrt[n-1]{\frac{a_2 \dots a_n}{(1+a_2)\dots(1+a_n)}}$$

Tương tự và dẫn đến :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+a_1} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{\dfrac{a_2 \ldots a_n}{(1+a_2)\ldots(1+a_n)}} \geq 0 \\ \dfrac{1}{1+a_2} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{\dfrac{a_1a_3 \ldots a_n}{(1+a_1)(1+a_3)\ldots(1+a_n)}} \geq 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ \dfrac{1}{1+a_n} \geq (n-1)\sqrt[n-1]{\dfrac{a_1a_2 \ldots a_{n-1}}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_{n-1})}} \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)} \geq (n-1)^n \frac{a_1a_2 \ldots a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}$$

Suy ra : $a_1a_2 \ldots a_n \leq \dfrac{1}{(n-1)^n}$

1.8 CMR : $1975\sqrt[1975]{a} + 1995\sqrt[1995]{b} \geq 3970\sqrt[3970]{ab}$ $\forall a, b \geq 0$

Áp dụng BĐT Côsi cho 3970 số trong đó gồm :

1975 số có dạng $\sqrt[1975]{a}$ và 1995 số có dạng $\sqrt[1995]{b}$ ta có

$$1975\sqrt[1975]{a} + 1995\sqrt[1995]{b} = \underbrace{\sqrt[1975]{a} + \ldots + \sqrt[1975]{a}}_{1975} + \underbrace{\sqrt[1995]{b} + \ldots + \sqrt[1995]{b}}_{1995}$$

$$\geq (1975 + 1995)\sqrt[1975+1995]{\underbrace{\sqrt[1975]{a} \ldots \sqrt[1975]{a}}_{1975} . \underbrace{\sqrt[1995]{b} \ldots \sqrt[1995]{b}}_{1995}}$$

$$= 3970\sqrt[3970]{ab}$$

1.9 : CMR : $m\sqrt[m]{a} + n\sqrt[n]{b} \geq (m+n)\sqrt[m+n]{ab}$ $\forall a, b, \geq 0$; $1 \leq m, n \in \mathbf{N}$

Sử dụng BĐT Côsi cho $(m + n)$ số trong đó gồm : m số $\sqrt[m]{a}$ và n số $\sqrt[n]{b}$ ta có

$$m\sqrt[n]{a} + n\sqrt[m]{b} = \underbrace{\sqrt[n]{a} + \ldots + \sqrt[n]{a}}_{m} + \underbrace{\sqrt[m]{b} + \ldots + \sqrt[m]{b}}_{n} \geq$$

$$\geq (m+n)\sqrt[m+n]{\sqrt[n]{a} \ldots \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \ldots \sqrt[m]{b}} = = (m+n)\sqrt[m+n]{ab}$$

1.10 Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ CMR $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8 \quad (1)$

Giải

$$VT(1) = \frac{1-a}{a} \cdot \frac{1-b}{b} \cdot \frac{1-c}{c} = \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} \cdot \frac{a+b}{c}$$

$$\overset{(\text{Côsi})}{\geq} \frac{2\sqrt{bc}}{a} \cdot \frac{2\sqrt{ca}}{b} \cdot \frac{2\sqrt{ab}}{c} = 8$$

1.11. Cho $\begin{cases} a_1, a_2, \ldots a_n > 0 \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 \end{cases}$

CMR $\left(\frac{1}{a_1} - 1\right)\left(\frac{1}{a_2} - 1\right) \ldots \left(\frac{1}{a_n} - 1\right) \geq (n-1)^n \quad (1)$

$VT(1) = \frac{1-a_1}{a_1} \cdot \frac{1-a_2}{a_2} \cdots \frac{1-a_n}{a_n}$. Theo BĐT Côsi ta có

$$\begin{cases} \dfrac{1-a_1}{a_1} = \dfrac{a_2 + \ldots + a_n}{a_1} \geq \dfrac{(n-1)\sqrt[n-1]{a_2 \ldots a_n}}{a_1} > 0 \\ \dfrac{1-a_2}{a_2} = \dfrac{a_1 + a_3 + \ldots + a_n}{a_2} \geq \dfrac{(n-1)\sqrt[n-1]{a_1 a_3 \ldots a_n}}{a_2} > 0 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ \dfrac{1-a_n}{a_n} = \dfrac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{a_n} \geq \dfrac{(n-1)\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}}{a_n} > 0 \end{cases}$$

$$VT(1) = \frac{1-a_1}{a_1} \cdots \frac{1-a_n}{a_n} \geq (n-1)^n \cdot \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{a_1 a_2 \ldots a_n} = (n-1)^n$$

1.12 CMR : $\left(1 + \dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq (1+a)(1+b)(1+c)$

$\geq (1 + \sqrt[3]{abc})^3 \geq 8\sqrt{abc}$ $\forall a, b, c \geq 0$

1.13 Cho $a_1, a_2, \ldots a_n \geq 0$. *CMR* :

$$\left(1 + \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^n \geq (1 + a_1)\ldots(1 + a_n) \geq$$

$$\geq (1 + \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n})^n \geq 2^n . \sqrt{a_1 \ldots a_n}$$

Trong đánh giá từ TB cộng sang TB nhân có một kĩ thuật nhỏ hay được sử dụng. Đó là kĩ thuật tách nghịch đảo.

2. Kĩ thuật tách nghịch đảo

2.1 : CMR $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$ $\forall ab > 0$

Giải : $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \overset{(Côsi)}{\geq} 2\sqrt{\dfrac{a}{b}.\dfrac{b}{a}} = 2$

2.2. CMR $\left|\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right| \geq 2$ $\forall$ $ab \neq 0$

Vì $\dfrac{a}{b}.\dfrac{b}{a} = 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{a}{b}$ và $\dfrac{b}{a}$ cùng dấu. *Do đó*

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| = \left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{a}\right| \overset{(Côsi)}{\geq} 2\sqrt{\left|\frac{1}{b}\right| . \left|\frac{b}{a}\right|} = 2$$

2.3. CMR : $\log_{1993}1994 > \log_{1994}1995$

Giải :

Theo BĐT Côsi thì

$\log_{1993}1994 + \log_{1994}1993 \geq 2\sqrt{\log_{1993}1994 . \log_{1994}1993} = 2$ (1)

Mà $\log_{1994}1995 + \log_{1994}1993 = \log_{1994}(1995.1993)$

$= \log_{1994}(1994 + 1)(1994 - 1) = \log_{1994}(1994^2 - 1)$

$< \log_{1994}1994^2 = 2$ (2)

Từ (1) và (2) $\rightarrow \log_{1993}1994 > \log_{1994}1995$

2.4. a) *CMR* : $\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2)\ \forall 2 \leq n \in \mathbf{N}$

b) CMR : $\log_{a-x}a > \log_a(a+x)\ \forall a, x \in \mathbf{R}$ thỏa $1 < a - x < a$

Giải

b) $\log_{a-x}a + \log_a(a-x) \geq 2\sqrt{\log_{a-x}a \cdot \log_a(a-x)} = 2$ (1)

$\log_a(a+x) + \log_a(a-x) = \log_a(a^2 - x^2) < \log_a a^2 = 2$ (2)

Từ (1) và (2) → (đpcm).

2.5. *(1091.1)* Tìm Min $y = \left| \log_{x^2+1}(3 - x^2) + \log_{3-x^2}(x^2+1) \right|$

Giải :

Giả sử hàm số được xác định. Khi đó vì $\log_{x^2+1}(3 - x^2)$ cùng dấu $\log_{3-x^2}(x^2+1)$

nên $y = \left|\log_{x^2+1}(3 - x^2)\right| + \left|\log_{3-x^2}(x^2+1)\right| \geq$

$$\geq 2\sqrt{\left|\log_{x^2+1}(3 - x^2)\right| \left|\log_{3-x^2}(x^2+1)\right|} = 2$$

Dấu bằng xảy ra $\leftrightarrow x = \pm 1$. Khi đó $y = 2 \rightarrow$ Min $y = 2$

2.6. *CMR* : $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2\ \forall a \in \mathbf{R}$

Giải :

$$\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{(a^2+1)+1}{\sqrt{a^2+1}} =$$

$$= \sqrt{a^2+1} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \overset{\text{(Côsi)}}{\geq} 2\sqrt{\sqrt{a^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}} = 2$$

2.7. *CMR* : $\dfrac{a^2+b^2}{a-b} \geq 2\sqrt{2}\ \forall \begin{cases} a > b \\ ab = 1 \end{cases}$

Giải :

$$\frac{a^2+b^2}{a-b} = \frac{(a-b)^2+2ab}{a-b} \overset{(ab=1)}{=} (a-b) + \frac{2}{a-b} \overset{\text{(Côsi)}}{\geq} 2\sqrt{(a-b) \cdot \frac{2}{a-b}} = 2\sqrt{2}$$

2.8. *CMR* : $a + \dfrac{1}{b(a-b)} \geq 3 \ \forall \ a > b > 0$

Giải :

$$a + \frac{1}{b(a-b)} = b + (a-b) + \frac{1}{b(a-b)} \overset{(\text{Côsi})}{\geq} 3\sqrt[3]{b(a-b)\frac{1}{b(a-b)}} = 3$$

2.9. *CMR* : $a + \dfrac{4}{(a-b)(b+1)^2} \geq 3 \ \forall \ a > b \geq 0$ (VĐ Nam Tư 79)

Giải :

$$a + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} = (a-b) + \frac{b+1}{2} + \frac{b+1}{2} + \frac{4}{(a-b)(b+1)^2} -$$

$$-1 \overset{(\text{Côsi})}{\geq} 4\sqrt[4]{(a-b)\frac{b+1}{2}\cdot\frac{b+1}{2}\cdot\frac{4}{(a-b)(b+1)^2}} - 1 = 4 - 1 = 3$$

2.10. *CMR* : $a + \dfrac{1}{b(a-b)^2} \geq 2\sqrt{2} \ \forall \ a > b > 0$

Giải :

$$VT = b + \frac{a-b}{2} + \frac{a-b}{2} + \frac{1}{b(a-b)^2} \overset{(\text{Côsi})}{\geq} 4\sqrt[4]{b\frac{a-b}{2}\cdot\frac{a-b}{2}\cdot\frac{1}{b(a-b)}} = 2\sqrt{2}$$

2.11. *CMR* : $\dfrac{2a^3+1}{4b(a-b)} \geq 3 \ \forall \ \begin{cases} a \geq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{a}{b} > 1 \end{cases}$

Theo BĐT Cô Si ta có $4b(a-b) \leq 4\left[\dfrac{b+(a-b)}{2}\right]^2 = 4\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = a^2$

$$\Rightarrow \frac{2a^3+1}{4b(a-b)} \geq \frac{2a^3+1}{a^2} = \frac{a^3+a^3+1}{a^2} =$$

$$= a + a + \frac{1}{a^2} \geq 3\sqrt[3]{a\cdot a\cdot\frac{1}{a^2}} = 3$$

2.12. Cho $a_1 > a_2 > \ldots > a_{n-1} > a_n > 0$ và $1 \leqslant k \in \mathbb{Z}$. *CMR*

$$a_1 + \frac{1}{a_n(a_1 - a_2)^k (a_2 - a_3)^k \ldots (a_{n-1} - a_n)^k} \geqslant \frac{(n-1)k+2}{\sqrt[(n-1)k+2]{k^{(n-1)k}}}$$

Giải

$$VT = a_n + (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{n-1} - a_n) +$$

$$+ \frac{1}{a_n(a_1 - a_2)^k (a_2 - a_3)^k \ldots (a_{n-1} - a_n)^k}$$

$$= a_n + \underbrace{\frac{a_1 - a_2}{k} + \ldots + \frac{a_1 - a_2}{k}}_{k \text{ số hạng}} + \underbrace{\frac{a_2 - a_3}{k} + \ldots + \frac{a_2 - a_3}{k}}_{k \text{ số hạng}} + \ldots + \underbrace{\frac{a_{n-1} - a_n}{k} + \ldots + \frac{a_{n-1} - a_n}{k}}_{k \text{ số hạng}}$$

$$+ \frac{1}{a_n(a_1 - a_2)^k (a_2 - a_3)^k \ldots (a_{n-1} - a_n)^k} \overset{(\text{Côsi})}{\geqslant}$$

$$[(n-1)k+2] \sqrt[(n-1)k+2]{a_n \left(\frac{a_1 - a_2}{k}\right)^k \ldots \left(\frac{a_{n-1} - a_n}{k}\right)^k \frac{1}{a_n (a_1 - a_2)^k \ldots (a_{n-1} - a_n)^k}} =$$

$$[(n-1)k+2] \sqrt[(n-1)k+2]{\left(\frac{1}{k}\right)^{(n-1)k}} = \frac{(n-1)k+2}{\sqrt[(n-1)k+2]{k^{(n-1)k}}}$$

> **Bình luận** : Kĩ thuật tách nghịch đảo là kĩ thuật tách phần nguyên theo mẫu số để khi chuyển sang TB nhân thì các phần chứa biến số bị triệt tiêu chỉ còn lại hằng số.

3. Kỹ thuật đánh giá từ TB nhân sang TB cộng

3.1. CMR :

$$30\sqrt{(a+1)(b-1)} + 4\sqrt{(b+1)(c-1)}$$

$$+ 1994\sqrt{(c+1)(a-1)} < 1012a + 17b + 999c \quad \forall a, b, c \geqslant 1$$

Giải : Theo BĐT Cô Si ta có

$$30\sqrt{(a+1)(b-1)} \leqslant 30\left[\frac{(a+1)+(b-1)}{2}\right] = 15(a+b)$$

$$+\begin{cases} 4\sqrt{(b+1)(c-1)} \leq 4\left[\dfrac{(b+1)+(c-1)}{2}\right] = 2(b+c) \\ 1994\sqrt{(c+1)(a-1)} \leq 1994\left[\dfrac{(c+1)+(a-1)}{2}\right] = 997(c+a) \end{cases}$$

$$30\sqrt{(a+1)(b-1)} + 4\sqrt{(b+1)(c-1)} + 1994\sqrt{(c+1)(a-1)} \leq$$

$$\leq 1012a + 17b + 999c$$

3.2. CMR : $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+c)(b+d)}\ \forall\ a, b, c, d > 0$

Giải

$$\leftrightarrow \sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+d)}} + \sqrt{\frac{cd}{(a+c)(b+d)}} \leq 1.$$

Theo BĐT Cô Si ta có

$$VT \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+d}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{a+c} + \frac{b}{b+d}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a+c}{a+c} + \frac{b+d}{b+d}\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

3.3. CMR : $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}\ \forall \begin{cases} a > c > 0 \\ b > c > 0 \end{cases}$

$\leftrightarrow \sqrt{\dfrac{c(a-c)}{ab}} + \sqrt{\dfrac{c(b-c)}{ab}} \leq 1$. Theo BĐT Cô Si ta có

$$VT \leq \frac{1}{2}\left[\frac{c}{b} + \frac{a-c}{a}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{c}{a} + \frac{b-c}{b}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{a} + \frac{b}{b}\right] = 1$$

3.4. CMR $\sqrt[3]{abc} + 1 \leq \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}\ \forall\ a, b, c, \geq 0$

$$\leftrightarrow \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{1\,.\,1\,.\,1} \leq \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}$$

$$\leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} + \sqrt[3]{\frac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \leq 1.$$

Theo BĐT Cô Si ta có

$$VT \leq \frac{1}{3}\left[\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}\right] + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{a+1}{1+a} + \frac{b+1}{1+b} + \frac{c+1}{1+c}\right] = \frac{1}{3}\,3 = 1$$

3.5. [109Nu] CMR $\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2...b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}$

$\forall a_i, b_i > 0 \ (i = \overline{1, n})$

$$\leftrightarrow \sqrt[n]{\frac{a_1a_2...a_n}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}} + \sqrt[n]{\frac{b_1b_2...b_n}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}} \leq 1$$

Theo BĐT Cô Si ta có

$$VT \leq \frac{1}{n}\left[\frac{a_1}{a_1+b_1} + ... + \frac{a_n}{a_n+b_n}\right] + \frac{1}{n}\left[\frac{b_1}{a_1+b_1} + ... + \frac{b_n}{a_n+b_n}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{a_1+b_1}{a_1+b_1} + ... + \frac{a_n+b_n}{a_n+b_n}\right] = \frac{1}{n}\cdot n = 1$$

3.6. CMR : $\frac{1}{\sqrt[n-1]{n!}} + \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}} \leq 1 \ \forall \ 3 \leq n \in \mathbb{N}$

$$\leftrightarrow \sqrt[n-1]{\frac{1}{n!}} + \sqrt[n-1]{\frac{1}{n}} \leq 1$$

$$\leftrightarrow \sqrt[n-1]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}...\frac{1}{n}} + \sqrt[n-1]{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}...\frac{n-1}{n}} \leq 1$$

Theo BĐT Cô Si ta có

$$VT \leq \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right] + \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+...+\frac{n-1}{n}\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}.(n-1) = 1 \rightarrow \text{(đpcm)}$$

3.7. CMR : $16ab(a-b)^2 \leq (a+b)^4 \ \forall \ a, b \geq 0$

Giải

Ta có $16ab(a-b)^2 = 4.(4ab)(a-b)^2 \leq 4\left[\frac{4ab+(a-b)^2}{2}\right]^2$

$$= 4\left[\frac{(a+b)^2}{2}\right]^2 = (a+b)^4$$

3.8. [1461] : CMR : $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \leqslant \frac{1}{2}$ (1)

Giải

$$\leftrightarrow \left| \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \right| \leqslant \frac{1}{2} \leftrightarrow |(a+b)(1-ab)| \leqslant \frac{(1+a^2)(1+b^2)}{2} \quad (2)$$

Ta có VT (2) $= \sqrt{(a+b)^2(1-ab)^2} \overset{(\text{Côsi})}{\leqslant} \frac{(a+b)^2+(1-ab)^2}{2} =$

$$= \frac{a^2+b^2+1^2+a^2b^2}{2} = \frac{(1+a^2)(1+b^2)}{2}$$

$\rightarrow$ (2) đúng $\rightarrow$ (1) đúng

3.9. [100II.2] : CMR $\forall$ a, b, c $\in$ (0, 1) luôn $\exists$ 1 BĐT sai

$$\begin{cases} a(1-b) > \frac{1}{4} \\ b(1-c) > \frac{1}{4} \\ c(1-a) > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Cách 1 : Không mất tính tổng quát giả sử a = max(a, b, c)

$\rightarrow c(1-a) \leqslant c(1-c) \leqslant \left[\frac{c+(1-c)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4} \rightarrow$ BĐT $c(1-a) > \frac{1}{4}$ sai

Cách 2 : Giả sử cả 3 BĐT đều đúng. Khi đó

$$a(1-b)\ b(1-c)\ c(1-a) > \left(\frac{1}{4}\right)^3 \quad (1)$$

Ta có VT (1) = a(1 − a) b(1 − b) c(1 − c)

$$\overset{(\text{Côsi})}{\leqslant} \left[\frac{a+(1-a)}{2}\right]^2 \left[\frac{b+(1-b)}{2}\right]^2 \left[\frac{c+(1-c)}{2}\right]^2$$

$\leftrightarrow$ VT (1) $\leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^3$ (2) $\Rightarrow$ (1) và

(2) mâu thuẫn $\Rightarrow$ Giả sử sai $\Rightarrow$ (đpcm)

3.10. [*131.2*] : Cho a, b $\geq$ 1.

CMR $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \leq 2\sqrt{\log_2 \frac{a+b}{2}}$

Giải : Ta có :

$$\left(\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b}\right)^2 = \log_2 a + \log_2 b + 2\sqrt{\log_2 a \cdot \log_2 b} \leq$$

$$\overset{(\text{Côsi})}{\leq} \log_2 a + \log_2 b + \log_2 a + \log_2 b = 2(\log_2 a + \log_2 b) = 2\log_2 ab =$$

$$= 4\log_2\sqrt{ab} \leq 4\log_2 \frac{a+b}{2} = \left[2\sqrt{\log_2 \frac{a+b}{2}}\right]^2 \rightarrow (\text{đpcm})$$

3.11. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ *CMR* $16abc \leq a + b$

Giải

$$16abc \overset{(\text{Côsi})}{\leq} 16\left[\frac{a+b}{2}\right]^2 = 4(a+b).(a+b).c \leq$$

$$\overset{(\text{Côsi})}{\leq} 4(a+b).\left[\frac{(a+b)+c}{2}\right]^2 = 4(a+b)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = (a+b)$$

3.12. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ *CMR* $abc(a+b)(b+c)(c+a) \leq \frac{8}{729}$

Giải

$$abc(a+b)(b+c)(c+a) \overset{(\text{Côsi})}{\leq} \left[\frac{a+b+c}{3}\right]^3\left[\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right]^3 = \frac{8}{729}$$

3.13. Cho $\begin{cases} a, b, c \geq 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ *CMR* $ab + bc + ca - abc \leq \frac{8}{27}$ (1)

Giải

$$\text{VT (1)} = 1 + ab + bc + ca - abc - a - b - c = (1-a)(1-b)(1-c)$$

$$\overset{(\text{Côsi})}{\leq} \left[\frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3}\right]^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

3.14. Cho $\begin{cases} a, b, c \geqslant 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$ *CMR* $0 \leqslant ab + bc + ca - 2abc \leqslant \dfrac{7}{27}$

(VD Toán Quốc tế 84 - Bài 1 : CHLB Đức)

Giải

Theo (gt) $\Rightarrow$ a, b, c $\in [0, 1]$ do đó

$$ab + bc + ca - 2abc \geqslant 3\sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)} - 2abc$$

$$= 3(abc)^{2/3} - 2abc \geqslant 3(abc)^{1} - 2abc = abc \geqslant 0$$

Ta sẽ chứng minh :

$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leqslant abc \ \forall\ a, b, c \in [0, 1]$

Nếu có 2 thừa số ở VT $\leqslant 0$ ví dụ

$$\begin{cases} a + b - c \leqslant 0 \\ b + c - a \leqslant 0 \end{cases} \rightarrow 2b \leqslant 0 \text{ Vô lý}$$

Nếu có đúng 1 thừa số ở VT $\leqslant 0 \rightarrow$ (đpcm).

Giả sử cả 3 thừa số ở VT đều > 0. Khi đó

$$VT = \sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}\,.\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2}\cdot\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{\;}\cdot\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2}$$

$= abc$ (đpcm)

Mà $a + b + c = 1 \rightarrow abc \geqslant (1 - 2a)(1 - 2b)(1 - 2c)$

$\Leftrightarrow abc \geqslant 1 - 2(a + b + c) + 4(ab + bc + ca) - 8abc$

$$\Rightarrow ab + bc + ca - 2abc \leqslant \frac{1}{4}(1 + abc) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\left[1 + \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\right] = \frac{7}{27}$$

4. Kỹ thuật nhân thêm hằng số

4.1. CMR : $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leqslant ab \ \forall\ a, b \geqslant 1$

Giải

$$+\begin{cases} a\sqrt{b-1} = a\sqrt{(b-1).1} \leqslant a.\dfrac{(b-1)+1}{2} = \dfrac{ab}{2} \\ b\sqrt{a-1} = b\sqrt{(a-1).1} \leqslant b.\dfrac{(a-1)+1}{2} = \dfrac{ab}{2} \end{cases}$$

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leqslant \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = ab$$

4.2 Cho $\begin{cases} a, b, c \geqslant 0 \\ a+b+c = 1 \end{cases}$ *CMR* $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leqslant \sqrt{6}$

Giải

$$+\begin{cases} \sqrt{a+b} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot\sqrt{(a+b)\dfrac{2}{3}} \leqslant \sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot\dfrac{(a+b)+\dfrac{2}{3}}{2} \\ \sqrt{b+c} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot\sqrt{(b+c)\dfrac{2}{3}} \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{(b+c)+\dfrac{2}{3}}{2} \\ \sqrt{c+a} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot\sqrt{(c+a)\dfrac{2}{3}} \leqslant \sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot\dfrac{(c+a)+\dfrac{2}{3}}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2(a+b+c)+2}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot 2 = \sqrt{6}$$

4.3. *144 II.1* Cho $\begin{cases} a \geqslant 3 \\ b \geqslant 4 \\ c \geqslant 2 \end{cases}$

Tìm Maxf $= \dfrac{ab\sqrt{c-2} + bc\sqrt{a-3} + ca\sqrt{b-4}}{2\sqrt{2}}$

Giải

$$ab\sqrt{c-2} = \frac{ab}{2}\sqrt{(c-2)2} \leqslant \frac{ab}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(c-2)+2}{2} = \frac{abc}{2\sqrt{2}}$$

$$bc\sqrt{a-3} = \frac{bc}{\sqrt{3}}\sqrt{(a-3)3} \leqslant \frac{bc}{\sqrt{3}}\cdot\frac{(a-3)+3}{2} = \frac{abc}{2\sqrt{3}}$$

$$ca\sqrt{b-4} = \frac{ca}{\sqrt{4}}\sqrt{(b-4)4} \leqslant \frac{ca}{\sqrt{4}}\cdot\frac{(b-4)+4}{2} = \frac{abc}{2\sqrt{4}}$$

Suy ra : $f = \dfrac{ab\sqrt{c-2}+bc\sqrt{a-3}+ca\sqrt{b-4}}{abc} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4}}$

Dấu bằng $\leftrightarrow \begin{cases} c-2=2 \\ a-3=3 \\ b-4=4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} c=4 \\ a=6 \\ b=8 \end{cases}$

Vậy Maxf $= \dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4}$

4.4. [*103 II.3*] Cho $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 \leqslant y \leqslant 4 \end{cases}$

Tìm Max $A = (3-x)(4-y)(2x+3y)$

Giải

$$A = \frac{1}{6}(6-2x)(12-3y)(2x+3y)$$

$$\overset{\text{(CôSi)}}{\leqslant} \left[\frac{(6-2x)+(12-3y)+(2x+3y)}{3}\right]^3 = 36$$

Dấu bằng $\leftrightarrow 6-2x = 12-3y = 2x+3y = 6 \leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

$\rightarrow$ Max $A = 36$

4.5. Cho $x, y > 0$. Tìm Min $f(x, y) = \dfrac{(x+y)^3}{xy^2}$

Giải

$$xy^2 = \frac{1}{16}(4x)(2y)(2y) \leqslant$$

$$\leq \frac{1}{16}\left(\frac{4x+2y+2y}{3}\right)^3 = \frac{1}{16}\left[\frac{4}{3}(x+y)\right]^3 = \frac{4}{27}(x+y)^3$$

Suy ra $f(x, y) = \dfrac{(x+y)^3}{xy^2} \geq \dfrac{(x+y)^3}{\frac{4}{27}(x+y)^3} = \dfrac{4}{27} \rightarrow \text{Min } f(x, y) = \dfrac{4}{27}$

Dấu bằng xảy ra $\leftrightarrow 4x = 2y = 2y \leftrightarrow \boxed{y = 2x > 0}$

4.6. Cho $x, y, z > 0$. Tìm Min $f(x, y, z) = \dfrac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3}$

Giải

$$xy^2z^3 = \frac{1}{6 \cdot 3^2 \cdot 2^3}(6x).(3y)(3y).(2z)(2z)(2z) \leq$$

$$\leq \frac{1}{6 \cdot 3^2 \cdot 2^3}\left[\frac{6x+3y+3y+2z+2z+2z}{6}\right]^6$$

$$\leftrightarrow xy^2z^3 \leq \frac{1}{6 \cdot 3^2 \cdot 2^3}(x+y+z)^6$$

Suy ra $f(x, y, z) = \dfrac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3} \geq \dfrac{1}{6 \cdot 3^2 \cdot 2^3} = \dfrac{1}{432}$

$\rightarrow \text{Min } f(x, y, z) = \dfrac{1}{432}$

Dấu bằng xảy ra $\leftrightarrow 6x = 3y = 2z > 0$

4.7. Cho $x_1, x_2, \ldots x_n > 0$. Tìm Minf $= \dfrac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^{1+2+\ldots+n}}{x_1x_2^2x_3^3\ldots x_n^n}$

Bạn đọc tự giải

*4.8 : **CMR*** : $A = \sin^2 x \cos x \leq \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

Giải

$$A^2 = \sin^4 x\cos^2 x = \frac{1}{2}\sin^2 x . \sin^2 x . (2\cos^2 x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[\frac{\sin^2x+\sin^2x+2\cos^2x}{3}\right]^3 = \frac{1}{2}\left[\frac{2(\sin^2x+\cos^2x)}{3}\right]^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$$

Suy ra $A \leq |A| \leq \sqrt{\frac{4}{27}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

4.9. CMR : $A = \sin^m x.\cos^n x \leq \sqrt{\frac{m^m.n^n}{(m+n)^{m+n}}}$ $\forall\ 1 \leq m,\ n \in \mathbb{Z}$

Giải

$$A^2 = \sin^{2m}x.\cos^{2n}x = \frac{1}{n^m.m^n}\underbrace{(n\sin^2x)\ \ldots\ (n\sin^2x)}_{m}.\underbrace{(m\cos^2x)\ \ldots\ (m\cos^2x)}_{n}$$

$$\overset{\text{CôSi}}{\leq} \frac{1}{m^n.n^m}\left[\frac{(n\sin^2x)+\ldots+(n\sin^2x)+(m\cos^2x)+\ldots+(m\cos^2x)}{m+n}\right]^{m+n}$$

$$= \frac{1}{m^n.n^m}\left[\frac{mn(\sin^2x+\cos^2x)}{m+n}\right]^{m+n} = \frac{1}{m^n.n^m}\left[\frac{mn}{m+n}\right]^{m+n} = \frac{m^m.n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

Suy ra $A \leq |A| \leq \sqrt{\frac{m^m\ n^n}{(m+n)^{m+n}}}$

4.10. CMR $\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$ (1) $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$

Với $n = 1, 2$ thử trực tiếp thấy (1) đúng

Với $n \geq 3$ ta có

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}.\sqrt{n}.\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{n-2}} \leq \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\overbrace{1+1\ \ldots +1}^{n-2}}{n}$$

$$\leftrightarrow \sqrt[n]{n} \leq \frac{2\sqrt{n}+(n-2)}{n} < \frac{n+2\sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

4.10. *CMR* : $\sqrt[n]{n} < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (1) $\forall\ 1 \leqslant n \in \mathbf{N}$

Với $n = 1, 2, 3, 4$ thử trực tiếp thấy (1) đúng

Với $n \geqslant 5$ thì $\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\dfrac{\sqrt{n}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{n}}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underbrace{1 \ldots 1}_{n-4}} \overset{\text{CôSi}}{\leqslant}$

$$\leqslant \frac{\dfrac{\sqrt{n}}{2} + \dfrac{\sqrt{n}}{2} + 2 + 2 + \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n-4}}{n} = \frac{\sqrt{n} + 4 + n - 4}{n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

4.12. *CMR* : $\left(1 + \dfrac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\ \forall\ m < n \in \mathbf{N}$

Giải

$$\leftrightarrow \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m} < 1 + \frac{1}{n}.$$

Ta có :

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m} = \sqrt[n]{\underbrace{\left(1+\frac{1}{m}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{m}\right) \ldots \left(1+\frac{1}{m}\right)}_{m \text{ số}} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \ldots 1}_{n-m}}$$

$$\overset{\text{CôSi}}{\leqslant} \frac{\left(1+\dfrac{1}{m}\right) + \ldots + \left(1+\dfrac{1}{m}\right) + 1 + \ldots + 1}{n} = \frac{m\left(1+\dfrac{1}{m}\right) + n - m}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

4.13. *CMR* : $S = 1 + \sqrt{\dfrac{2+1}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{3+1}{3}} + \ldots + \sqrt[n]{\dfrac{n+1}{n}} < n + 1$

Giải

$$\sqrt[k]{\frac{k+1}{k}} = \sqrt[k]{\frac{k+1}{k} \cdot 1 \ldots 1} \leqslant \frac{\dfrac{k+1}{k} + 1 + \ldots + 1}{k} = 1 + \frac{1}{k^2}$$

Do đó $S \leqslant n + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$

Mặt khác $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

Suy ra :

$$S \leqslant n + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$= n + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= n + 1 - \frac{1}{n} < n + 1$$

Bình luận : Để sử dụng BĐT Cô Si từ TB nhân sang TB cộng ta cần chú ý : Chỉ số căn là bao nhiêu thì số các số hạng ở trong căn là bấy nhiêu. Nếu số các số hạng nhỏ hơn chỉ số căn thì phải nhân thêm (hằng số) để số các số hạng bằng chỉ số căn

5 Kĩ thuật ghép đối xứng

Phép cộng : $\begin{cases} 2(x+y+z) = (x+y) + (y+z) + (z+x) \\ x+y+z = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{y+z}{2} + \dfrac{z+x}{2} \end{cases}$

Phép nhân : $\begin{cases} x^2y^2z^2 = (xy).(yz).(zx) \\ xyz = \sqrt{xy}.\sqrt{yz}.zx \end{cases}$ $(x, y, z \geqslant 0)$

5.1. CMR $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geqslant a + b + c \ \forall\, a, b, c > 0$

Giải : Áp dụng BĐT Cô Si ta có

$$+\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b}\right) \geqslant \sqrt{\dfrac{bc}{a}.\dfrac{ca}{b}} = c \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{ca}{b} + \dfrac{ab}{c}\right) \geqslant \sqrt{\dfrac{ca}{b}.\dfrac{ab}{c}} = a \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a}\right) \geqslant \sqrt{\dfrac{ab}{c}.\dfrac{bc}{a}} = b \end{cases}$$

$$\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \geqslant a + b + c$$

5.2. *CMR* : $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \geq \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b}\ \forall\ abc \neq 0$

Giải

Áp dụng BĐT Cô Si ta có

$$+\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2}\right) \geq \sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}\cdot\dfrac{b^2}{c^2}} = \left|\dfrac{a}{c}\right| \geq \dfrac{a}{c} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2}\right) \geq \sqrt{\dfrac{b^2}{c^2}\cdot\dfrac{c^2}{a^2}} = \left|\dfrac{b}{a}\right| \geq \dfrac{b}{a} \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{b^2}\right) \geq \sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}\cdot\dfrac{a^2}{b^2}} = \left|\dfrac{c}{b}\right| \geq \dfrac{c}{b} \end{cases}$$

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \left|\frac{a}{c}\right| + \left|\frac{b}{a}\right| + \left|\frac{c}{b}\right| \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$$

5.3. *CMR* : $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}\ \forall a, b, c, \geq 0$

Giải

$$+\begin{cases} a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \geq (a+b)(2ab - ab) = (a+b)ab \\ b^3 + c^3 = (b+c)(b^2 + c^2 - bc) \geq (b+c)(2bc - bc) = (b+c)bc \\ c^3 + a^3 = (c+a)(c^2 + a^2 - ca) \geq (c+a)(2ca - ca) = (c+a)ca \end{cases}$$

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b)ab + (b + c)bc + (c + a)ca$$

$$\leftrightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)$$

$$\overset{\text{CôSi)}}{\geq} a^2 . 2\sqrt{bc} + b^2 . 2\sqrt{ca} + c^2 . 2\sqrt{ab} = 2(a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab})$$

Suy ra $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}$

5.4. *CMR* : $\mathrm{tg}^2\dfrac{A}{2} + \mathrm{tg}^2\dfrac{B}{2} + \mathrm{tg}^2\dfrac{C}{2} \geq 1\ \forall\Delta ABC$

Giải

Ta có $\dfrac{1}{\mathrm{tg}\dfrac{C}{2}} = \mathrm{cotg}\dfrac{C}{2} = \mathrm{tg}\left(\dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2}\right) = \dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{A}{2} + \mathrm{tg}\dfrac{B}{2}}{1 - \mathrm{tg}\dfrac{A}{2}\,\mathrm{tg}\dfrac{B}{2}}$

$$\rightarrow \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1.$$ Mặt khác

$$+\begin{cases} \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\right) \geq \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} \\ \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\right) \geq \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}} = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} \\ \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{C}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}\right) \geq \sqrt{\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}} = \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{C}{2} \geq \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = 1.$$

5.5 (108.III) Cho ΔABC. CMR a) $(p - a)(p - b)(p - c) \leq \frac{1}{8}abc$

b) $\frac{1}{p - a} + \frac{1}{p - b} + \frac{1}{p - c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

Giải

Ta có $p - a = \frac{b + c - a}{2} > 0$ nên theo BĐT Côsi ta có

a)
$$\times\begin{cases} 0 \leq \sqrt{(p - a)(p - b)} \overset{\text{Côsi}}{\leq} \frac{(p - a) + (p - b)}{2} = \frac{c}{2} \\ 0 \leq \sqrt{(p - b)(p - c)} \leq \frac{(p - b) + (p - c)}{2} = \frac{a}{2} \\ 0 \leq \sqrt{(p - c)(p - a)} \leq \frac{(p - c) + (p - a)}{2} = \frac{b}{2} \end{cases}$$

$$0 \leq (p - a)(p - b)(p - c) \leq \frac{1}{8}abc$$

b) $$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}\right) \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{(p-a)(p-b)}} \geqslant \dfrac{1}{\dfrac{(p-a)+(p-b)}{2}} = \dfrac{2}{c}\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c}\right) \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{(p-b)(p-c)}} \geqslant \dfrac{1}{\dfrac{(p-b)+(p-c)}{2}} = \dfrac{2}{a}\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-c}+\dfrac{1}{p-a}\right) \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{(p-c)(p-a)}} \geqslant \dfrac{1}{\dfrac{(p-c)+(p-a)}{2}} = \dfrac{2}{b}\end{cases}$$

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geqslant 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

5.6 94.III.1 Cho ΔABC.

CMR $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leqslant abc$

Giải

Theo BĐT Cô si ta có:

$$\times\begin{cases}0 \leqslant \sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} \leqslant \dfrac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2} = c\\ 0 \leqslant \sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \leqslant \dfrac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2} = a\\ 0 \leqslant \sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \leqslant \dfrac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2} = b\end{cases}$$

$$0 \leqslant (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leqslant abc$$

6. Kĩ thuật sử dụng công thức diện tích tam giác

1) $S = \frac{1}{2}ah_a$ 4) $S = \frac{abc}{4R}$

2) $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ 5) $S = pr$

3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 6) $S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$

6.1 ***94.III.2*** ΔABC. *CMR* $R \geq 2r (1)$

Giải

Ta có $\begin{cases} S = \dfrac{abc}{4R} \\ S = pr \end{cases} \rightarrow \begin{cases} R = \dfrac{abc}{4S} \\ r = \dfrac{S}{p} \end{cases}$ Do đó

$$1) \leftrightarrow \frac{abc}{4S} \geq \frac{2S}{p} \leftrightarrow abc \geq \frac{8S^2}{p} \leftrightarrow abc \geq \frac{8p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$

$$\leftrightarrow abc \geq 8 \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} = (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

Theo 94III.1 thì BĐT cuối đúng $\rightarrow$ (1) đúng (đpcm)

6.2 ***115V.a*** Cho ΔABC. CMR : $4r.r_c \leq c^2$

Giải

Ta có $\begin{cases} S = pr \\ S = (p-a)r_c \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} r = \dfrac{S}{p} \\ r_c = \dfrac{S}{p-c} \end{cases}$ Do đó

$$4r.r_c = 4 \cdot \frac{S}{p} \cdot \frac{S}{p-c} = 4\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-c)}$$

$$= 4(p-a)(p-b) \leq 4\left[\frac{(p-a)(p-b)}{2}\right]^2 = 4\left(\frac{c}{2}\right)^2 = c^2$$

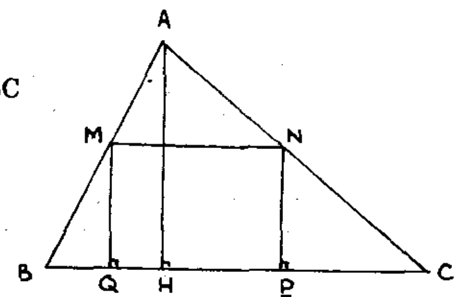
6.3 ***53III. Bộ đề cũ*** *: CMR :* dt$\Delta \geq 2$ diện tích hình vuông nội tiếp Δ

Giải

Ta sẽ chứng minh : dtABC $\geq$ 2dt hình vuông (MNPQ)

$$\leftrightarrow \frac{1}{2}AH \cdot BC \geq 2MN.PQ$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{4} \geq \frac{MN}{BC} \cdot \frac{MQ}{AH}$$

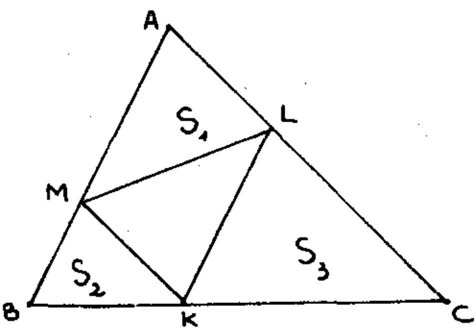


Thật vậy ta có

$$\frac{MN}{BC}\cdot\frac{MQ}{AH}=\frac{AM}{AB}\cdot\frac{BM}{AB}\leqslant\frac{1}{AB^2}\left(\frac{AM+BM}{2}\right)^2=\frac{1}{AB^2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

6.4 : 101V.Bộ đề cũ . Cho ΔABC có diện tích bằng 1. Lấy các điểm K, L, M $\in$ BC, CA, AB. CMR : trong các ΔALM, BMK, CKL luôn có ít nhất 1 Δ có diện tích $\leqslant \frac{1}{4}$

Giải :



Gọi diện tích các ΔABC, ALM, BMK, CKL lần lượt là S, S_1, S_2, S_3.

Giả sử trong các ΔALM, BMK, CKL không có Δ nào có diện tích $\leqslant \frac{1}{4}$ suy ra

$$\boxed{S_1S_2S_3>\left(\frac{1}{4}\right)^3}\qquad(1)$$

Mặt khác :

$$\times\begin{cases} S_1=\dfrac{S_1}{S}=\dfrac{\frac{1}{2}AM.AL\sin A}{\frac{1}{2}AB.AC\sin A}=\dfrac{AM.AL}{AB.AC}\\[2ex] S_2=\dfrac{S_2}{S}=\dfrac{\frac{1}{2}BM.BK\sin B}{\frac{1}{2}BA.BC\sin B}=\dfrac{BM.BK}{BA.BC}\\[2ex] S_3=\dfrac{S_3}{S}=\dfrac{\frac{1}{2}CK.CL\sin C}{\frac{1}{2}CB.CA\sin C}=\dfrac{CK.CL}{CB.CA}\end{cases}$$

$$S_1S_2S_3=\frac{AM.BM}{AB^2}\cdot\frac{BK.CK}{BC^2}\cdot\frac{CL.AL}{CA^2}$$

$$\overset{\text{Côsi}}{\leq} \frac{1}{AB^2}\left(\frac{AM+BM}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{BC^2}\left(\frac{BK+CK}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{CA^2}\left(\frac{CL+AL}{2}\right)^2$$

$$\leftrightarrow \qquad \boxed{S_1S_2S_3 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^3} \qquad (2)$$

Ta thấy (1) và (2) mâu thuẫn nhau. Vậy điều giả sử là sai. Vậy trong các ΔAML, BMK, CKL luôn có ít nhất 1Δ có diện tích $\leq \frac{1}{4}$

6.5 : Cho ΔABC có diện tích S

CMR : $S \leq \frac{1}{6}\left[r(r_a + r_b + r_c) + r_ar_b + r_br_c + r_cr_a\right]$

Giải

Ta có $S = pr$; $S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$

$\Rightarrow S^4 = p(p-a)(p-b)(p-c)r.r_a.r_b.r_c = S^2r.r_a.r_b.r_c \Rightarrow S = \sqrt{r.r_a.r_b.r_c}$

Áp dụng BĐT Côsi ta có

$$+\begin{cases} S = \sqrt{(r.r_a).(r_b.r_c)} \leq \frac{1}{2}(r.r_a + r_br_c) \\ S = \sqrt{(r.r_b).(r_c.r_a)} \leq \frac{1}{2}(r.r_b + r_cr_a) \\ S = \sqrt{(r.r_c).(r_a.r_b)} \leq \frac{1}{2}(r.r_c + r_ar_b) \end{cases}$$

$$3S = 3\sqrt{rr_ar_br_c} \leq \frac{1}{2}\left[r(r_a+r_b+r_c) + r_1r_b + r_br_c + r_cr_a\right]$$

$$\leftrightarrow S = \leq \frac{1}{6}\left[r(r_a + r_b + r_c) + r_ar_b + r_br_c + r_cr_a\right]$$

6.6 Cho ΔABC. CMR : $tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} \leq \frac{9R^2}{4S}$

Giải :

$$S\left(tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2}\right) = S.\left(\frac{r}{p-a} + \frac{r}{p-b} + \frac{r}{p-c}\right) =$$

$$= \frac{S^2}{p}\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{r}{p-c}\right) = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right)$$

$= (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) + (p-a)(p-b) \overset{\text{(Dễ c/m)}}{\leq} \frac{1}{3}[(p-a)+(p-b)+(p-c)]^2$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)^2 \overset{\text{Ta sẽ c/m}}{\geq} \frac{9R^2}{4} \leftrightarrow (a + b + c)^2 \leq 27R^2$

$\leftrightarrow [2R(\sin A + \sin B + \sin C)]^2 \leq 27R^2 \leftrightarrow \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng (xem thêm phương pháp 6 : Qui nạp Côsi)

6.7 [*14II V.b*] : Δ có cạnh a, b, c diện tích S.

CMR : $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

Giải :

Ta có $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p}\,.\,\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\overset{\text{Côsi}}{\leq} \sqrt{p}.\sqrt{\left[\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right]^3} = \sqrt{p}.\sqrt{\frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}} = \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}$

$\overset{\text{(BCS)}}{\leq} \frac{(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2)}{12\sqrt{3}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}} \leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$

6.8 : Δ có cạnh a, b, c diện tích S, trung tuyến m_a, m_b, m_c.

CMR : $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq 3\sqrt{3}S$

Giải :

Theo 6.7 ta có $S \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\sqrt{3}}$

Mặt khác :

$$+\begin{cases} m_a^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \\ m_b^2 = \dfrac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4} \\ m_c^2 = \dfrac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} \end{cases}$$

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Do đó $S \leq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\frac{4}{3}(m_a^2+m_b^2+m_c^2)}{4\sqrt{3}} = \dfrac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{3\sqrt{3}}$

Vậy $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq 3\sqrt{3}S$

6.9 : CMR : $(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \geq 27S^2 \ \forall\Delta ABC$

Giải

Theo bài 6.8 ta có $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

Áp dụng BĐT Côsi ta có

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{9}{4}\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \quad (1)$$

Mặt khác : $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{c}h_c$ do đó

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 = 4S^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 12S^2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{a^2b^2c^2}} \quad (2)$$

Nhân các vế của (1) và (2) suy ra

$$(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \geq 27S^2$$

6.10 : ΔABC. *CMR :* $bc\cot g\frac{A}{2} + ca\cot g\frac{B}{2} + ab\cot g\frac{C}{2} \geq 12S$

Giải :

$$VT = \frac{2S\cot g\frac{A}{2}}{\sin A} + \frac{2S\cot g\frac{B}{2}}{\sin B} + \frac{2S\cot g\frac{C}{2}}{\sin C}$$

$$= S\left(\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\right) \geq S\cdot\frac{3}{\sqrt[3]{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}}$$

$$= \frac{3S}{\left[\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\right]^2} \geq \frac{3S}{\left[\dfrac{\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}}{3}\right]^2}$$

Áp dụng BĐT Jensen

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leq 3\sin\frac{\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{3} = 3\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$$

ta có
$$\frac{3S}{\left[\dfrac{\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}}{3}\right]^2} \geq \frac{3S}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 12S \text{ (đpcm)}$$

> **Bình luận** : Diện tích tam giác là chiếc cầu nối các mối quan hệ giữa các yếu tố trong tam giác.

7. Kỹ thuật cặp nghịch đảo 3 số

Nội dung : Ta có

$$\boxed{(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9 \ \forall\, x, y, z > 0 \qquad (*)}$$

Thật vậy : $VT \geq 3\sqrt[3]{xyz} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} = 9$

Bất đẳng thức này chứng minh rất dễ nhưng nó có ý nghĩa rất lớn trong vai trò nhận dạng và đưa các bài toán xa lạ trở thành bài toán quen biết.

Các ví dụ sau đây sẽ minh chứng điều đó.

7.1. 103 IV. Bộ đề cũ . CMR : $h_a + h_b + h_c \geq 9r \ \forall\, \Delta ABC$

Giải

$$\leftrightarrow \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \geq 9\frac{S}{p}$$

$$\leftrightarrow 2p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

Điều này đúng theo BĐT (*)

7.2. CMR : $r_a + r_b + r_c \geq 9r \ \forall\, \Delta ABC$

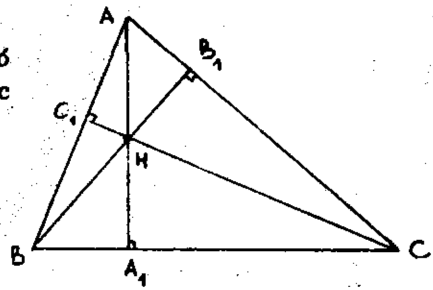
Giải

$$\leftrightarrow \frac{S}{p-a} + \frac{S}{p-b} + \frac{S}{p-c} \geq 9\frac{S}{p} \leftrightarrow p\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c}\right) \geq 9$$

$$\leftrightarrow [(p-a)+(p-b)+(p-c)]\left[\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right] \geq 9.$$

Đúng theo BĐT (*)

7.3. [114 V a] ΔABC nhọn có đường cao AA_1, BB_1, CC_1 và trực tâm H.



CMR : $\dfrac{AH}{A_1H}+\dfrac{BH}{B_1H}+\dfrac{CH}{C_1H} \geq 6$

Giải

$$\leftrightarrow \left(1+\frac{AH}{A_1H}\right)+\left(1+\frac{BH}{B_1H}\right)+\left(1+\frac{CH}{C_1H}\right) \geq 9$$

$$\leftrightarrow \frac{AA_1}{HA_1}+\frac{BB_1}{HB_1}+\frac{CC_1}{HC_1} \geq 9$$

$$\leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}AA_1 \,.\, BC}{\frac{1}{2}HA_1 \,.\, BC}+\frac{\frac{1}{2}BB_1 \,.\, CA}{\frac{1}{2}HB_1 \,.\, CA}+\frac{\frac{1}{2}CC_1 \,.\, AB}{\frac{1}{2}HC_1 \,.\, AB} \geq 9$$

$$\leftrightarrow \frac{dt(ABC)}{dt(HBC)}+\frac{dt(ABC)}{dt(HCA)}+\frac{dt(ABC)}{dt(HAB)} \geq 9$$

$$\leftrightarrow [dt(HBC)+dt(HCA)+dt(HAB)]\left[\frac{1}{dt(HBC)}+\frac{1}{dt(HCA)}+\frac{1}{dt(HAB)}\right] \geq 9$$

Điều này đúng theo BĐT (*) $\rightarrow$ (đpcm)

7.4. CMR : $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c} \geq 6 \;\forall a, b, c > 6$

Giải

$$\leftrightarrow \left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{c+a}{b}\right)+\left(1+\frac{a+b}{c}\right) \geq 9$$

$$\leftrightarrow \frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c} \geq 9$$

$\leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9$. Đúng theo BĐT (*)

7.5. CMR : $\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b} \geqslant \frac{9}{a+b+c}$ $\forall a, b, c > 0$

Giải

$$\leftrightarrow 2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geqslant 9$$

$$\leftrightarrow [(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left[\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right] \geqslant 9.$$

Đúng theo BĐT (*)

7.6. CMR : $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$ $\forall a, b, c > 0$

Giải

$$\leftrightarrow \left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{c+a}\right)+\left(1+\frac{c}{a+b}\right) \geqslant \frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$$

$$\leftrightarrow \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b} \geqslant \frac{9}{2}$$

$$\leftrightarrow 2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geqslant 9$$

$$\leftrightarrow [(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left[\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right] \geqslant 9.$$

Đúng theo BĐT (*).

7.7. CMR : $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b+c}{2}$ $\forall a, b, c > 0$

Giải

$$\leftrightarrow \left(a+\frac{a^2}{b+c}\right)+\left(b+\frac{b^2}{c+a}\right)+\left(c+\frac{c^2}{a+b}\right) \geqslant \frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\leftrightarrow a\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+b\left(1+\frac{b}{c+a}\right)+c\left(1+\frac{c}{a+b}\right) \geqslant \frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\leftrightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

$$\leftrightarrow \left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{c+a}\right)+\left(1+\frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2}$$

$$\leftrightarrow [(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left[\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right] \geq 9$$

Đúng theo BĐT (*) $\rightarrow$ (đpcm).

7.8. CMR : $\log_{b+c}a^2 + \log_{c+a}b^2 + \log_{a+b}c^2 \geq 3 \ \forall a, b, c > 2$

Giải : Vì $b, c > 2 \rightarrow bc > 2.\max(b, c) \geq b + c$

Do đó $\log_{b+c}a^2 = \dfrac{\ln a^2}{\ln(b+c)} \geq \dfrac{\ln a^2}{\ln(bc)} = \dfrac{2\ln a}{\ln b + \ln c}$

Từ đó ta có : $\log_{b+c}a^2 + \log_{c+a}b^2 + \log_{a+b}c^2 \geq$

$$\geq \frac{2\ln a}{\ln b+\ln C}+\frac{2\ln b}{\ln c+\ln a}+\frac{2\ln c}{\ln a+\ln b} \geq 2.\frac{3}{2} = 3$$

(Ở đây ta sử dụng bài 7.6 : $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y} \geq \dfrac{3}{2} \ \forall x, y, z > 0$)

7.9. CMR : $2\left(\dfrac{\log_b c}{b+c}+\dfrac{\log_c a}{c+a}+\dfrac{\log_a b}{a+b}\right) \geq \dfrac{9}{a+b+c} \ \forall a, b, c > 1$

(Vô Địch Nam Tư 70)

Giải

$$\leftrightarrow [(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left[\frac{\log_b c}{b+c}+\frac{\log_c a}{c+a}+\frac{\log_a b}{a+b}\right] \geq 9$$

Theo BĐT Cô Si ta có :

$$\times \begin{cases} (b+c)+(c+a)+(a+b) \geq 3\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)} \\ \dfrac{\log_b c}{b+c}+\dfrac{\log_c a}{c+a}+\dfrac{\log_a b}{a+b} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{\log_b c \,.\, \log_c a \,.\, \log_a b}{(b+c)(c+a)(a+b)}} \end{cases}$$

$$[(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left[\frac{\log_b c}{b+c}+\frac{\log_c a}{c+a}+\frac{\log_a b}{a+b}\right] \geq 9\sqrt[3]{\log_b b} = 9$$

$\rightarrow$ (đpcm)

7.10. *CMR* : $2\left(\frac{m^{x_1-x_2}}{b+c}+\frac{m^{x_2-x_3}}{c+a}+\frac{m^{x_3-x_1}}{a+b}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}\ \forall a, b, c, m > 1$

Giải

$$\leftrightarrow [(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left[\frac{m^{x_1-x_2}}{b+c}+\frac{m^{x_2-x_3}}{c+a}+\frac{m^{x_3-x_1}}{a+b}\right] \geq 9\ (*)$$

Ta có

$$VT\ (*) \geq 3\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}\,.\,3\sqrt[3]{\frac{m^{x_1-x_2}.m^{x_2-x_3}.m^{x_3-x_1}}{(b+c)(c+a)(a+b)}}$$

$$= 9\sqrt[3]{m^{x_1-x_1}} = 9\sqrt[3]{m^0} = 9 \rightarrow (\text{đpcm})$$

7.11. Cho $\begin{cases} a, b, c \\ a+b+c=1 \end{cases}$ *CMR* $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} \geq \frac{9}{2}$

Giải

$$\leftrightarrow 2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq 9$$

$$\leftrightarrow [(b+c)+(c+a)+(a+b)]\left[\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right] \geq 9$$

Đúng theo BĐT (*).

7.12. Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c \leq 1 \end{cases}$ *CMR* : $\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab} \geq 9$

Theo BĐT (*) thì

$$[(a^2+2bc)+(b^2+2ca)+(c^2+2ab)]\left[\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\right] \geq 9$$

$$\leftrightarrow (a+b+c)^2\left(\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}\right) \geq 9$$

Mà $0 < (a+b+c)^2 \leq 1 \rightarrow \frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab} \geq 9$

7.13. Cho ΔABC. *CMR* : $\sum_{A,B,C}\frac{1}{(1+2\cos A+4\cos A\cos B)} \geq 1$

Giải :

Theo BĐT (*) thì

$$\sum_{A,B,C}(1+2\cos A+4\cos A\cos B)\cdot\sum_{A,B,C}\frac{1}{1+2\cos A+4\cos A\cos B}\geqslant 9$$

Mà $\sum_{A,B,C}(1+2\cos A+4\cos A\cos B)=3+2\sum_{A,B,C}\cos A+4\sum_{A,B,C}\cos A\cos B$.

Dễ dàng c/m được : $\sum_{A,B,C}\cos A=\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\frac{3}{2}$

Mặt khác dễ dàng ta chứng minh được

$\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A\leqslant(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)$

$\rightarrow 3(\cos A\cos B+\cos B\cos C+\cos C\cos A)\leqslant$

$\leqslant(\cos A+\cos B+\cos C)^2\leqslant\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

Do đó $\sum_{A,B,C}(1+2\cos A+4\cos A\cos B)\leqslant 3+2\cdot\frac{3}{2}+3=9$

Vậy thì : $\sum_{A,B,C}\frac{1}{1+2\cos A+4\cos A\cos B}\geqslant 1.$

8. Kỹ thuật cặp nghịch đảo n số :

$$\boxed{(X_1+\ldots+X_n)\left(\frac{1}{X_1}+\ldots+\frac{1}{X_n}\right)\geqslant n^2\ \forall\ X_1\ \ldots\ X_n>0}\quad (**)$$

Đặt $S=\sum_{i=1}^{n}a_i$. Hãy chứng minh các BĐT sau $\forall a_1, a_2, \ldots a_n>0$

8.1. CMR: $\sum_{i=1}^{n}\frac{S-a_i}{a_i}\geqslant n^2-n$

Giải

$$\leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{S-a_i}{a_i}\right)\geqslant n^2-n+n=n^2$$

$$\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{S}{a_i} \geqslant n^2 \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i . \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqslant n^2$$ Đúng theo BĐT (**)

8.2. CMR : $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{S - a_i} \geqslant \frac{n^2}{(n-1)S}$

Giải

Theo BĐT (**) ta có $\sum_{i=1}^{n} (S - a_i) . \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{S - a_i} \geqslant n^2$

Mặt khác $\sum_{i=1}^{n} (S - a_i) = nS - \sum_{i=1}^{n} a_i = (n-1)S.$

Vậy $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{S - a_i} \geqslant \frac{n^2}{(n-1)S}$

8.3. CMR : $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S - a_i} \geqslant \frac{n}{n-1}$

Giải

$$\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{a_i}{S - a_i}\right) \geqslant \frac{n}{n-1} + n = \frac{n^2}{n-1}$$

$$\leftrightarrow (n-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{S}{S - a_i} \geqslant n^2 \leftrightarrow (n-1)S . \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{S - a_i} \geqslant n^2$$

$$\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (S - a_i) . \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{S - a_i} \geqslant n^2.$$ Đúng theo BĐT (**)

8.4. CMR : $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{S - a_i} \geqslant \frac{S}{n-1}$

Giải

$$\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{a_i^2}{S - a_i}\right) \geqslant \frac{S}{n-1} + \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{S}{n-1} + S$$

$$\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i\left(1 + \frac{a_i}{S - a_i}\right) \geqslant \frac{nS}{n-1} \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_iS}{S - a_i} \geqslant \frac{nS}{n-1}$$

$$\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S - a_i} \geqslant \frac{n}{n-1}$$ Đúng theo 8.3 (đpcm).

8.5. CMR : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{a_i}}{\sqrt{S - a_i}} \geqslant 2 \ (n \geqslant 2)$

Giải

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{a_i}}{\sqrt{S - a_i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{(S - a_i)a_i}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\frac{(S - a_i) + a_i}{2}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{2a_i}{S} = \frac{2}{S}\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{2}{S}.S = 2$$

8.6. Cho $\begin{cases} a_1, ...a_n < 0 \\ a_1 + ... + a_n = 1 \end{cases}$ *CMR :* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2 - a_i} \geqslant \frac{n}{2n-1}$

(Vô địch UCRAINA)

Giải

$$\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{a_i}{2 - a_i}\right) \geqslant \frac{n}{2n-1} + n = \frac{2n^2}{2n-1}$$

$$\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{2 - a_i} \geqslant \frac{2n^2}{2n-1} \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2 - a_i} \geqslant \frac{n^2}{2n-1}$$

$$\leftrightarrow (2n-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2 - a_i} \geqslant n^2 \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} (2 - a_i) . \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2 - a_i} \geqslant n^2$$

Bất đẳng thức này đúng theo (**) → (đpcm).

9. Kĩ thuật đánh giá mẫu số

9.1 : CMR : $\dfrac{1}{a^2+bc}+\dfrac{1}{b^2+ca}+\dfrac{1}{c^2+ab}\leq\dfrac{a+b+c}{2abc}$ $\forall$ a, b, c > 0

Giải Áp dụng BĐT Cô Si ta có

$$+\begin{cases}\dfrac{1}{a^2+bc}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{a^2bc}}=\dfrac{1}{2a\sqrt{bc}}=\dfrac{\sqrt{bc}}{2abc}\leq\dfrac{\frac{1}{2}(b+c)}{2abc}\\[2ex]\dfrac{1}{b^2+ca}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{b^2ca}}=\dfrac{1}{2b\sqrt{ca}}=\dfrac{\sqrt{ca}}{2abc}\leq\dfrac{\frac{1}{2}(c+a)}{2abc}\\[2ex]\dfrac{1}{c^2+ab}\leq\dfrac{1}{2\sqrt{c^2ab}}=\dfrac{1}{2c\sqrt{ab}}=\dfrac{\sqrt{ab}}{2abc}\leq\dfrac{\frac{1}{2}(a+b)}{2abc}\end{cases}$$

$$\dfrac{1}{a^2+bc}+\dfrac{1}{b^2+ca}+\dfrac{1}{c^2+ab}\leq\dfrac{\frac{1}{2}(b+c)+\frac{1}{2}(c+a)+\frac{1}{2}(a+b)}{2abc}=\dfrac{a+b+c}{2abc}$$

9.2. CMR : $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\dfrac{1}{abc}$ $\forall$a, b, c > 0

Giải $\forall$ x, y > 0 thì

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)\geq(x+y)(2xy-xy)=(x+y)xy$$

Do đó :

$$+\begin{cases}\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}\leq\dfrac{1}{(a+b)ab+abc}=\dfrac{1}{bc(a+b+c)}\\[2ex]\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}\leq\dfrac{1}{(b+c)bc+abc}=\dfrac{1}{bc(a+b+c)}\\[2ex]\dfrac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\dfrac{1}{(c+a)ca+abc}=\dfrac{1}{ca(a+b+c)}\end{cases}$$

$$\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{1}{c^3+a^3+abc}\leq$$

$$\leq \frac{1}{ab(a+b+c)} + \frac{1}{bc(a+b+c)} + \frac{1}{ca(a+b+c)}$$

$$= \frac{a+b+c}{abc(a+b+c)} = \frac{1}{abc} \quad \text{(đpcm)}$$

9.3 : CMR $\dfrac{1}{a^4+b^4+c^4+abcd} + \dfrac{1}{b^4+c^4+d^4+abcd} +$

$$+ \frac{1}{c^4+d^4+a^4+abcd} + \frac{1}{d^4+a^4+b^4+abcd} \leq \frac{1}{abcd}$$

$$\forall a,\ b,\ c,\ d > 0 \qquad (1)$$

Giải : $\forall\ x,\ y,\ z > 0$ ta có

$$x^4 + y^4 + z^4 = \frac{1}{2}(x^4+y^4) + \frac{1}{2}(y^4+z^4) + \frac{1}{2}(z^4+x^4) \geq$$

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = \frac{1}{2}(x^2y^2+y^2z^2) + \frac{1}{2}(y^2z^2+z^2x^2) + \frac{1}{2}(z^2x^2+x^2y^2)$$

$$\geq \sqrt{(x^2y^2)(y^2z^2)} + \sqrt{(y^2z^2)(z^2x^2)} + \sqrt{(z^2x^2)(x^2y^2)}$$

$$= y^2xz + z^2xy + x^2yz$$

$\Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz\,(x+y+z)$. Từ đó ta có

$$+\begin{cases} \dfrac{1}{a^4+b^4+c^4+abcd} \leq \dfrac{1}{abc(a+b+c)+abcd} = \dfrac{1}{abc(a+b+c+d)} \\ \dfrac{1}{b^4+c^4+d^4+abcd} \leq \dfrac{1}{bcd(b+c+d)+abcd} = \dfrac{1}{bcd(a+b+c+d)} \\ \dfrac{1}{c^4+d^4+a^4+abcd} \leq \dfrac{1}{cda(c+d+a)+abcd} = \dfrac{1}{cda(a+b+c+d)} \\ \dfrac{1}{d^4+a^4+b^4+abcd} \leq \dfrac{1}{dab(d+a+b)+abcd} = \dfrac{1}{dab(a+b+c+d)} \end{cases}$$

$$VT(1) \leq \frac{1}{abc(a+b+c+d)} + \frac{1}{bcd(a+b+c+d)} + \frac{1}{cda(a+b+c+d)} + \frac{1}{dab(a+b+c+d)}$$

$$\leftrightarrow VT\ (1) \leq \frac{a+b+c+d}{abcd(a+b+c+d)} = \frac{1}{abcd}$$

9.4. Cho $a_1, a_2, \ldots a_n > 0$ $(n \geq 3)$. CMR

$$\frac{1}{a_1^n + \ldots + a_{n-1}^n + a_1a_2\ldots a_n} + \frac{1}{a_2^n + \ldots + a_n^n + a_1a_2\ldots a_n} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{a_n^n + a_1^n + \ldots + a_{n-2}^n + a_1a_2\ldots a_n} \leq \frac{1}{a_1a_2\ldots a_n}$$

Chú ý : Kĩ thuật sử dụng Cô Si để đánh giá mẫu số rất nghệ thuật và hoàn toàn khác hẳn với các kĩ thuật ở 9.1, 9.2 và 9.3. Đề nghị bạn đọc tự giải.

9.5 [150 I. 2. Vô địch Mỹ 1980]. Cho a, b, c ∈ [0,1]. *CMR*

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1 \quad (1)$$

Giải

Giả sử a = max (a, b, c). Khi đó ta có

$$+\begin{cases} \dfrac{a}{b+c+1} = \dfrac{a}{b+c+1} \\ \dfrac{b}{c+a+1} \leq \dfrac{b}{c+b+1} \\ \dfrac{c}{a+b+1} \leq \dfrac{c}{c+b+1} \end{cases}$$

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} \leq \frac{a+b+c}{b+c+1} \quad (2)$$

Ta sẽ chứng minh

$$(1-a)(1-b)(1-c) \leq 1 - \frac{a+b+c}{b+c+1} = \frac{1-a}{b+c+1} \quad (3)$$

Nếu a = 1 thì (3) đúng. Nếu $a \neq 1 \rightarrow 1 - a > 0$. Do đó (3) ↔ $(b + c + 1)(1 - b)(1 - c) \leq 1$. Theo BĐT Cô Si :

$$(b+c+1)(1-b)(1-c) \leq \left[\frac{(b+c+1)+(1-b)+(1-c)}{3}\right]^3 = 1 \rightarrow 3 \text{ đúng.}$$

Lấy các vế của (2) + (3) → (1) đúng (đpcm)

$$9.6.\ \textit{CMR}\ \frac{a_1}{a_2+\dots+a_n+1}+\dots+\frac{a_n}{a_1+\dots+a_{n-1}+1}+$$

$$+(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n)\leqslant 1\ \forall\ a_1\dots a_n\in[0,1]\ (1)$$

Giải

Giả sử $a_1 = \max(a_1, a_2, \dots a_n)$. Khi đó ta có

$$+\begin{cases}\dfrac{a_1}{a_2+\dots+a_n+1}=\dfrac{a_1}{a_2+\dots+a_n+1}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{a_n}{a_1+\dots+a_{n-1}+1}\leqslant\dfrac{a_n}{a_2+\dots+a_n+1}\end{cases}$$

$$\frac{a_1}{a_2+\dots+a_n+1}+\dots+\frac{a_n}{a_1+\dots+a_{n-1}+1}\leqslant\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{a_2+\dots+a_n+1}\quad(2)$$

Ta sẽ chứng minh

$$(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n)\leqslant 1-\frac{a_1+\dots+a_n}{a_2+\dots+a_n+1}=\frac{1-a_1}{a_2+\dots+a_n+1}\quad(3)$$

Nếu $a_1 = 1 \to (3)$ đúng. Nếu $a_1 \neq 1 \to 1 - a_1 > 0$. Do đó

$(3) \leftrightarrow (a_2 + \dots + a_n + 1)(1 - a_2)\dots(1 - a_n) \leqslant 1.$

Ta có VT $\leqslant \left[\dfrac{(a_2+\dots+a_n+1)+(1-a_2)+\dots+(1-a_n)}{n}\right]^n = 1$

$\leftrightarrow (3)$ đúng. Lấy vế của $(2) + (3) \to (1)$ đúng.

9.7 ***26 II.2*** Cho $\begin{cases}a, b, c > 0\\ a^2+b^2+c^2=1\end{cases}$

$$\textit{CMR}\quad \frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}\qquad(1)$$

Giải

$$(1)\leftrightarrow\frac{a}{1-a^2}+\frac{b}{1-b^2}+\frac{c}{1-c^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$$

$$\leftrightarrow \frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Ta sẽ c/m $\dfrac{a^2}{a(1-a^2)} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2} a^2$

$$\leftrightarrow a(1-a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \leftrightarrow a^2(1-a^2)^2 \leq \frac{4}{27}$$

Ta có

$$a^2(1-a^2)^2 = \frac{1}{2}(2a^2)(1-a^2)(1-a^2) \leq \frac{1}{2}\left[\frac{2a^2+(1-a^2)+(1-a^2)}{3}\right]^3 = \frac{4}{27}$$

Tương tự $\dfrac{b^2}{b(1-b^2)} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2} b^2$; $\dfrac{c^2}{c(1-c^2)} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2} c^2$. Do đó

$$\frac{a^2}{a(1-a^2)} + \frac{b^2}{b(1-b^2)} + \frac{c^2}{c(1-c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\rightarrow$ (1) đúng

9.8 : Cho $\begin{cases} a_1, \ldots a_n > 0 \\ a_1^{2k} + \ldots + a_n^{2k} = 1 \end{cases}$ và k, m, n $\in$ **Z** .

CMR : $\dfrac{a_1^{2k-1}}{1-a_1^{2m}} + \ldots + \dfrac{a_n^{2k-1}}{1-a_n^{2n}} \geq \dfrac{(2m+1)\sqrt[2m]{2m+1}}{2m}$

Giải

$$\leftrightarrow \frac{a_1^{2k}}{a_1(1-a_1^{2m})} + \ldots + \frac{a_n^{2k}}{a_n(1-a_n^{2m})} \geq \frac{(2m+1)\sqrt[2m]{2m+1}}{2m}$$

Ta sẽ chứng minh : $\dfrac{a_1^{2k}}{a_1(1-a_1^{2m})} \geq \dfrac{(2m+1)\sqrt[2m]{2m+1}}{2m} . a_1^{2k}$ (1)

$$\leftrightarrow a_1(1-a_1^{2m}) \leq \frac{2m}{(2m+1)\sqrt[2m]{2m+1}} \leftrightarrow a_1^{2m}(1-a_1^{2m})^{2m} \leq \frac{(2m)^{2m}}{(2m+1)^{2m+1}}$$

Ta có :

$$a_1^{2m}(1-a_1^{2m})^{2m} = \frac{1}{2m}(2ma_1^{2m})\underbrace{(1-a_1^{2m})(1-a_1^{2m})\ldots(1-a_1^{2m})}_{2m}$$

$$\overset{\text{CôSi}}{\leqslant} \frac{1}{2m}\left[\frac{(2ma_1^{2m}) + \frac{(1-a_1^{2m})+\ldots+(1-a_1^{2m})}{2m}}{2m+1}\right]^{2m+1} = \frac{(2m)^{2m}}{(2m+1)^{2m+1}} \text{ (đpcm)}$$

Tương tự ta có $\dfrac{a_2^{2k}}{a_2(1-a_2^{2m})} \geqslant \dfrac{(2m+1)\sqrt[2m]{2m+1}}{2m} a_2^{2k}$ (2)

. . . .

$$\frac{a_n^{2k}}{a_n(1-a_n^{2m})} \geqslant \frac{(2m+1)\sqrt[2m]{2m+1}}{2m} a_n^{2k} \qquad (n)$$

Cộng các vế của (1), (2),... (n) và chú ý $a_1^{2k} + \ldots + a_n^{2k} = 1 \rightarrow$ (đpcm)

10. Kỹ thuật đổi biến số

Mục đích : Nhằm chuyển bài toán từ tình thế khó biến đổi đại số (với các biến cũ) sang trạng thái dễ biến đổi Đại số hơn (với các biến mới)

10.1 : CMR $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2} \quad \forall a, b, c > 0$ (1)

Giải : Đặt $\begin{cases} b+c = x > 0 \\ c+a = y > 0 \\ a+b = z > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{y+z-x}{2} \\ b = \dfrac{z+x-y}{2} \\ c = \dfrac{x+y-z}{2} \end{cases}$. Khi đó

$$(1) \leftrightarrow \frac{y+z-x}{2x} + \frac{z+x-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} \geqslant 3 \leftrightarrow \left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right) + \left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right) + \left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right) \geqslant 6$$

Theo BĐT Cô Si VT $\geqslant 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}} + 2\sqrt{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{z}} + 2\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}} = 6$

$\rightarrow$ (đpcm)

10.3 Cho ΔABC (a, b, c).

CMR $\dfrac{a^2}{b+c-a} + \dfrac{b^2}{c+a-b} + \dfrac{c^2}{a+b-c} \geqslant a + b + c$

Giải :

Đặt $\begin{cases} b + c - a = x > 0 \\ c + a - b = y > 0 \\ a + b - c = z > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{y+z}{2} \\ b = \dfrac{z+x}{2} \\ c = \dfrac{x+y}{2} \end{cases}$

Khi đó

$$(1) \leftrightarrow \frac{(y+z)^2}{4x} + \frac{(z+x)^2}{4y} + \frac{(x+y)^2}{4z} \geqslant x + y + z \ (2).$$ Ta có

$$\text{VT } (2) \geqslant \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x}\right)$$

$$\geqslant \sqrt{\frac{yz}{x}\cdot\frac{zx}{y}} + \sqrt{\frac{zx}{y}\cdot\frac{xy}{z}} + \sqrt{\frac{xy}{z}\cdot\frac{yz}{x}} = z + x + y \leftrightarrow \text{(đpcm)}$$

10.4 : Cho Δ ABC diện tích S.

CMR : $\dfrac{1}{a+b-c} + \dfrac{1}{b+c-a} + \dfrac{1}{c+a-b} \geqslant \dfrac{3\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{S}}$ (1)

Giải

Đặt $\begin{cases} b + c - a = x > 0 \\ c + a - b = y > 0 \\ a + b - c = z > 0 \end{cases}$

$\rightarrow \sqrt{S} = \sqrt[4]{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} = \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{(x+y+z)xyz}$

Khi đó (1) $\leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant \frac{3\sqrt[4]{3}}{2\sqrt{S}} = 3.\sqrt[4]{\frac{3}{(x+y+z)xyz}}$

Ta có $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant 9 \rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant \frac{3}{x+y+z}$

Do đó $\frac{4}{3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant \frac{3}{x+y+z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{3}{(x+y+z)xyz}}$

Suy ra $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geqslant 3\sqrt[4]{\frac{3}{(x+y+z)xyz}}$ (đpcm)

10.5 ***94 III.1*** Δ ABC.

CMR $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leqslant abc$ (1)

Giải

Đặt $\begin{cases} b+c-a = x \\ c\ \ a-b = y \\ a+b-c = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{y+z}{2} \\ b = \dfrac{z+x}{2} \\ c = \dfrac{x+y}{2} \end{cases}$

Khi đó ta có (1) $\leftrightarrow xyz \leqslant \frac{y+z}{2}.\frac{z+x}{2}.\frac{x+y}{2}$.

Theo BĐT Cô Si ta có

$$\frac{y+z}{2}.\frac{z+x}{2}.\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{yz}.\sqrt{zx}.\sqrt{xy} = xyz \text{ (đpcm)}$$

10.6 Cho ΔABC. *CMR* $\frac{1}{(p-a)^2}+\frac{1}{(p-b)^2}+\frac{1}{(p-c)^2} \geqslant \frac{1}{r^2}$ (1)

Giải

Ta có $\left.\begin{cases} S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \\ S^2 = p^2r^2 \end{cases}\right\} \rightarrow r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$

Đặt $\begin{cases} p-a = x > 0 \\ p-b = y > 0 \\ p-c = z > 0 \end{cases}$ thì (1) $\leftrightarrow \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} \geqslant \frac{x+y+z}{xyz}$ (2)

Ta có VT (2) $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{x^2}\right)$

$$\geq \sqrt{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{y^2}}+\sqrt{\frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{z^2}}+\sqrt{\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=\frac{x+y+z}{xyz}$$

10.7 CMR :

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geq\frac{2}{3}$$

$\forall$ a, b, c, d > 0 (Dự bị quốc tế 93 - Mỹ)

Bạn đọc tự giải

Chú ý : Nếu giải bằng BCS thì dễ dàng hơn.

11. Kỹ thuật kiểm tra điều kiện xảy ra dấu bằng

11.1. Cho a, b, c, d > 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$S=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}+$$
$$+\frac{b+c+d}{a}+\frac{c+d+a}{b}+\frac{d+a+b}{c}+\frac{a+b+c}{d}$$

Giải

Sai lầm thường gặp

Nhiều học sinh mắc sai lầm khi biến đổi S thành tổng 4 cặp phân số nghịch đảo và áp dụng BĐT Cô Si cho từng cặp : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=2$. Cụ thể là

$$S=\sum_{a,b,c,d}\left(\frac{a}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{a}\right)\geq\sum_{a,b,c,d}2\sqrt{\frac{a}{b+c+d}\cdot\frac{b+c+d}{a}}=8$$

Rồi vội vàng kết luận Min S = 8

Để thấy sự sai lầm ta thấy nếu S = 8 thì $\begin{cases} a=b+c+d\\ b=c+d+a\\ c=d+a+b\\ d=a+b+c\end{cases}$

Suy ra a + b + c + d = 3(a + b + c + d) $\leftrightarrow$ a + b + c + d = 0
Vô lý vì a, b, c, d > 0

Lời giải đúng : Để tìm Min S ta cần chú ý S là một biểu thức đối xứng với a, b, c, d do đó Min (Max) (nếu có) thường đạt được khi a = b = c = d.

Vậy đảo lại ta cho trước a = b = c = d để dự đoán Min S là bằng $\frac{4}{3} + 12 = \frac{40}{3}$ rồi sau đó đánh giá các BĐT có điều kiện dấu bằng là tập con của điều kiện a = b = c = d.

Đặt : $S_1 = \frac{b+c+d}{a} + \frac{c+d+a}{b} + \frac{d+a+b}{c} + \frac{a+b+c}{d}$.

Theo BĐT Cô Si ta có

$$S_1 = \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right) + \left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{a}{d}+\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{a}{d}+\frac{d}{a}\right) \geq 6.2 = 12$$

Đặt $S_2 = \frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c}$. Suy ra

$$S_2 + 4 = \sum_{a,b,c,d}\left(1 + \frac{a}{b+c+d}\right) =$$

$$= (a+b+c+d)\left[\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{d+a+b} + \frac{1}{a+b+c}\right]$$

$$= \frac{1}{3}[(b+c+d) + (c+d+a) + (d+a+b) + (a+b+c)] \times$$

$$\times \left[\frac{1}{b+c+d} + \frac{1}{c+d+a} + \frac{1}{d+a+b} + \frac{1}{a+b+c}\right]$$

$$\geq \frac{1}{3} . 4\sqrt[4]{(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)(a+b+c)} \times$$

$$\times 4\sqrt[4]{\frac{1}{(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)(a+b+c)}} = \frac{16}{3}$$

$\rightarrow S_2 \geq \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$. Từ đó $S = S_2 + S_1 \geq \frac{4}{3} + 12 = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$

Dấu bằng xảy ra khi a = b = c = d → Min S = $13\frac{1}{3}$

Vậy Max S = $2\sqrt{3}$ đạt được khi a = b = c = d = $\frac{1}{4}$

11.2 : Tìm Min $S = \left(1+\frac{a}{3b}\right)\left(1+\frac{b}{3c}\right)\left(1+\frac{c}{3a}\right)$ ∀ a, b, c > 0

Sai lầm thường gặp :

$$S \geq 2\sqrt{\frac{a}{3b}}\cdot 2\sqrt{\frac{b}{3c}}\cdot 2\sqrt{\frac{b}{3a}} = \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

Suy ra Min S = $\frac{8\sqrt{3}}{9}$

Rõ ràng $S = \frac{8\sqrt{3}}{9} \leftrightarrow \begin{cases} a = 3b \\ b = 3c \\ c = 3a \end{cases} \rightarrow a + b + c = 3(a + b + c)$

→ a + b + c = 0 Vô lý

Lời giải đúng :

$$\times \begin{cases} 1+\frac{a}{3b} = \frac{b+b+b+a}{3b} \geq \frac{4\sqrt[4]{b.b.b.a}}{3b} = \frac{4\sqrt[4]{b^3a}}{3b} \geq 0 \\ 1+\frac{b}{3c} = \frac{c+c+c+b}{3c} \geq \frac{4\sqrt[4]{c.c.c.b}}{3c} = \frac{4\sqrt[4]{c^3.b}}{3c} \geq 0 \\ 1+\frac{c}{3a} = \frac{a+a+a+c}{3a} \geq \frac{4\sqrt[4]{a.a.a.c}}{3a} = \frac{4\sqrt[4]{a^3.c}}{3a} \geq 0 \end{cases}$$

$$S = \left(1+\frac{a}{3b}\right)\left(1+\frac{b}{3c}\right)\left(1+\frac{c}{3a}\right) \geq \frac{4^3abc}{3^3.abc} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3$$

Vậy Min S = $\frac{64}{27}$. Dấu bằng ↔ a = b = c

11.3 : Cho $\begin{cases} a, b, c, d > 0 \\ a+b+c+d = 1 \end{cases}$

Tìm Max $S = \sqrt{a+b+c} + \sqrt{b+c+d} + \sqrt{c+d+a} + \sqrt{d+a+b}$

Sai lầm thường gặp : Theo BĐT Cô Si ta có

$$S \leqslant \frac{(a+b+c)+1}{2} + \frac{(b+c+d)+1}{2} + \frac{(c+d+a)+1}{2} + \frac{(d+a+b)+1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[3(a+b+c+d)+4] = \frac{7}{2} \Rightarrow \text{Max } S = \frac{7}{2}$$

Rõ ràng $S = \frac{7}{2} \leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ b+c+d=1 \\ c+d+a=1 \\ d+a+b=d \end{cases} \rightarrow 3(a+b+c+d) = 4 \leftrightarrow 3 = 4$ Vô lý

Lời giải đúng : Theo BĐt Cô si ta có

$$+\begin{cases} \sqrt{(a+b+c)\cdot\frac{3}{4}} \leqslant \dfrac{(a+b+c+\frac{3}{4}}{2} \\ \sqrt{(b+c+d)\cdot\frac{3}{4}} \leqslant \dfrac{(b+c+d)+\frac{3}{4}}{2} \\ \sqrt{(c+d+a)\cdot\frac{3}{4}} \leqslant \dfrac{(c+d+a)+\frac{3}{4}}{2} \\ \sqrt{(d+a+b)\cdot\frac{3}{4}} \leqslant \dfrac{(d+a+b)+\frac{3}{4}}{2} \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot S \leqslant \frac{1}{2}[3(a+b+c+d)+3] = 3 \rightarrow S \leqslant 2\sqrt{3}$$

Các ví dụ sau đây chúng tôi cung cấp lời giải mà không bình luận. Bạn đọc hãy suy ngẫm vì sao dẫn đến những lời giải này

11.4. Cho $\begin{cases} a, b > 0 \\ a+b=1 \end{cases}$

CMR a) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2} \geqslant 6$ b) $\frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2+b^2} \geqslant 14$

a) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{a^2+b^2} = \frac{2}{4ab} + \left(\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2}\right) \overset{(CôSi)}{\geqslant} \frac{2}{(a+b)^2} + \frac{2}{\sqrt{2ab(a^2+b^2)}}$

$$\overset{\text{CôSi}}{\geq} 2 + \frac{2}{\dfrac{[2ab + (a^2 + b^2)]}{2}} = 2 + \frac{4}{(a+b)^2} = 2 + 4 = 6$$

b) $$\frac{2}{ab} + \frac{3}{a^2+b^2} = \frac{4}{2ab} + \frac{3}{a^2+b^2} = \frac{1}{2ab} + 3\left(\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2+b^2}\right) \overset{\text{CôSi}}{\geq}$$

$$\geq \frac{2}{(a+b)^2} + 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{2ab(a^2+b^2)}} \overset{\text{CôSi}}{\geq} 2 + \frac{6}{\dfrac{2ab+(a^2+b^2)}{2}} = 2 + \frac{12}{(a+b)^2} = 14$$

11.5 : Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c = 1 \end{cases}$ *CMR* $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2} + \dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} \geq 30$ (1)

Giải : Ta có $(ab + bc + ca)\left(\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca}\right) \geq 9 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab+bc+ca}$$

Khi đó

$$VT(1) \geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9}{ab+bc+ca} = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca}$$

$$+ \frac{7}{ab+bc+ca} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)(ab+bc+ca)}} + \frac{21}{3(ab+bc+ca)^2}$$

$$\geq \frac{3}{\dfrac{(a^2+b^2+c^2) + (ab+bc+ca) + (ab+bc+ca)}{3}} + \frac{21}{(a+b+c)^2}$$

$$= \frac{9}{(a+b+c)^2} + \frac{21}{(a+b+c)^2} = \frac{30}{(a+b+c)^2} = 30$$

11.6 : Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a+b+c = 1 \end{cases}$ *CMR* : $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{2}{ab} + \dfrac{2}{bc} + \dfrac{2}{ca} \geq 81$

Bạn đọc tự giải

12. Đánh giá trên phương trình và bất phương trình

12.1 107 I : Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình :

$$12x^2 - 6mx + m^2 - 4 + \frac{12}{m^2} = 0$$

Tìm m để $g = x_1^3 + x_2^3$ đạt a) Max, b) Min

Giải

Để pt có nghiệm thì $0 \leqslant \Delta' = 9m^2 - 12\left(m^2 - 4 + \frac{12}{m^2}\right)$

$\leftrightarrow m^4 - 16m^2 + 48 \leqslant 0 \leftrightarrow 4 \leqslant m^2 \leqslant 12 \leftrightarrow 2 \leqslant |m| \leqslant 2\sqrt{3}$.

Khi đó

$$g = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \frac{m}{2} - \frac{3}{2m} = \frac{m^2 - 3}{2m}$$

$$\rightarrow g^6 = \frac{1}{(2m)^6.9.9}\underbrace{(m^2 - 3)...(m^2 - 3)}_{6\text{ số}}.9.9 \leqslant \frac{1}{2^6.3^4.m^6}\left[\frac{6(m^2-3)+9+9}{8}\right]^8$$

$$= \frac{3^4 . m^{10}}{2^{22}} \leqslant \frac{3^4 . (12)^5}{2^{22}} = \frac{3^9}{2^{12}} \rightarrow |g| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$ Từ đó

$\text{Max } g = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ khi $m = 2\sqrt{3}$ và $\text{Min } g = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$ khi $m = -2\sqrt{3}$

12.2 69II.2 : Tìm m để $\sqrt{(4+x)(6-x)} \leqslant x^2 - 2x + m$ đúng $\forall x \in [-4,6]$

Giải

ĐK cần : Giả sử Bpt thỏa mãn $\forall x \in [-4,6]$

Cho $x = 1 \in [-4,6] \rightarrow 5 \leqslant m - 1 \rightarrow 5 \leqslant m - 1 \rightarrow m \geqslant 6$

Đk Đủ : Giả sử $m \geqslant 6$. Khi đó theo BĐT Cô Si ta có

$$\sqrt{(4+x)(6-x)} \leqslant \frac{(4+x)+(6-x)}{2} = 5$$

Mặt khác $x^2 - 2x + m = x^2 - 2x + 1 + m - 1 = (x - 1)^2 + m - 1 \geq 5$

Do đó với $m \geq 6$ thì $\sqrt{(4 + x)(6 - x)} \leq x^2 - 2x + m$. Đáp số $m \geq 6$

12.3 : Giả sử phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ có nghiệm thực

CMR : $|a| + |b| + |c| \geq \frac{4}{3}$

12.4 Giả sử phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm thực

CMR : $|a| + \frac{|b|}{2} \geq 1$

Mời các bạn đọc tự giải 2 bài 12.3 và 12.4

13. Sử dụng trong Dãy số

13.1 : Dãy số $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định bởi $\begin{cases} 0 < x_n < 1 \ \forall n \\ x_{n+1}(1 - x_n) > \frac{1}{4} \ \forall n \end{cases}$

CMR : $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \frac{1}{2}$

Giải

Theo BĐT Cô Si ta có :

$$x_{n+1} + (1 - x_n) \geq 2\sqrt{x_{n+1}(1 - x_n)} > 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$$

suy ra $x_{n+1} - x_n \geq 0$ hay $x_n \leq x_{n+1}$ $\forall n \to \{x_n\}$ đơn điệu tăng Mặt khác $0 < x_n < 1$ nên $\{x_n\}$ bị chặn trên. Từ đó ta có $\{x_n\}$ luôn có giới hạn hữu hạn. Đặt $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$

Ta có $\lim\limits_{n \to \infty} x_{n+1}(1 - x_n) \geq \frac{1}{4}$

$$\leftrightarrow a - a^2 \geqslant \frac{1}{4} \leftrightarrow a^2 - a + \frac{1}{4} = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$

13.2 : Dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi

$$\begin{cases} x_o = 1994 \\ x_n^2 - 2x_n . x_{n+1} + 1995 = 0 (n = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Giải

Vì $x_n^2 - 2x_n . x_{n+1} + 1995 = 0$ nên $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1995}{x_n}\right)$

Mà $x_o = 1994 > 0 \Rightarrow \{x_n\}$ dương.

Theo bất đẳng thức Cô Si ta có

$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1995}{x_n}\right) \geqslant \sqrt{x_n . \frac{1995}{x_n}} = \sqrt{1995} \Rightarrow \{x_n\}$ bị chặn dưới

Mặt khác $x_n \geqslant \sqrt{1995} \Rightarrow x_n^2 \geqslant 1995\ \forall\ n = 1, 2\ldots$

Từ đó $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1995}{x_n}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{x_n^2}{x_n}\right) = x_n$

Vậy $\{x_n\}$ đơn điệu giảm và bị chặn dưới $\Rightarrow \{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn $a \geqslant \sqrt{1995}$. Khi đó $\lim x_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1995}{x_n}\right)$

$$\leftrightarrow a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1995}{a}\right) \leftrightarrow a^2 - 1995 = 0 \rightarrow a = \pm\sqrt{1995}$$

Mà $a \geqslant \sqrt{1995} \rightarrow a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{1995}$

13.3. Dãy $\{x_n\}$ được xác định bởi $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 1}{5x_n} \end{cases}$ *CMR* : $\dfrac{1}{3} < x_n \leq 2$

13.4. 105IVa . Cho a, b là 2 số dương khác nhau. Người ta lập hai dãy số $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ bằng cách đặt

$$u_1 = a,\ v_1 = b,\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2},\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}\ (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

CMR : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} v_n$

14. Sử dụng trong lượng giác

14.1 [*102 II.2* .] *CMR* : nếu $0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ thì $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} > 8$

Giải

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} = \frac{\cos x/\cos^3 x}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x}} = \frac{1 + tg^2 x}{tg^2 x(1 - tgx)} \geq \frac{2tgx}{tg^2 x(1 - tgx)}$$

$$= \frac{2}{tgx(1 - tgx)} \geq \frac{2}{\left[\dfrac{tgx + (1 - tgx)}{2}\right]^2} = 8$$

Dấu "=" $\leftrightarrow \begin{cases} tgx = 1 \\ tgx = 1 - tgx \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} tgx = 1 \\ tgx = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ Vô nghiệm

$$\rightarrow \frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} > 8$$

14.2 [*10 II.1 – 88 II*] Giả sử Δ ABC có 3 góc nhọn

1) *CMR* : $tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC$

2) *CMR* : $tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt{3}$

3) Tìm Min $P = tgA.tgB.tgC$

Giải

(1) Ta có $-tgC = tg(\pi - C) = tg(A+B) = \dfrac{tgA + tgB}{1 - tgAtgB} \leftrightarrow$ $tgAtgBtgC - tgC = tgA + tgB \leftrightarrow tgA + tgB + tgC = tgAtgBtgC$

2) Áp dụng Bất đẳng thức Cô Si cho 3 số tgA, tgB, tgC > 0 ta có

$$tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt[3]{tgAtgBtgC}$$

$\leftrightarrow (tgA + tgB + tgC)^3 \geq 27\ tgA\ tgB\ tgC$

$\leftrightarrow (tgA + tgB + tgC)^3 \geq 27\ (tgA + tgB + tgC)$

$\leftrightarrow (tgA + tgB + tgC)^2 \geq 27$

$\leftrightarrow tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt{3}$

3) Theo phần (1) và (2) ta có $tgAtgBtgC = tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt{3}$

Dấu bằng xảy ra $\leftrightarrow tgA = tgB = tgC \leftrightarrow A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$ $\leftrightarrow \Delta$ ABC đều. Vậy Min $(tgAtgBtgC) = 3\sqrt{3}$

14.3 118III.1

1) *CMR* $\left(1 + \dfrac{1}{\sin A}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sin B}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\sin C}\right) \geq \left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \forall \Delta ABC$

2) *CMR* $\left(1 + \dfrac{1}{\cos A}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\cos B}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\cos C}\right) \geq 27 \ \forall\ \Delta ABC$ nhọn

Giải

Ta sẽ chứng minh nếu $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z \leq K \end{cases}$ thì

$\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{y}\right)\left(1 + \dfrac{1}{z}\right) \geq \left(1 + \dfrac{3}{k}\right)^3$ (*). Thật vậy, ta có

$$VT\ (*) = 1 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}\right) + \frac{1}{xyz} \overset{(CôSi)}{\geq}$$

$$1 + \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} + \frac{3}{(\sqrt[3]{xyz})^2} + \frac{1}{(\sqrt[3]{xyz})^3} \overset{(CôSi)}{\geq}$$

$$1 + \frac{3}{\frac{x+y+z}{3}} + \frac{3}{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3} \geqslant$$

$$1 + \frac{9}{k} + \frac{27}{k^2} + \frac{27}{k^3} = \left(1 + \frac{3}{k}\right)^3 \quad \text{(đpcm)}$$

Sử dụng $\begin{cases} \sin A + \sin B + \sin C \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ \cos A + \cos B + \cos C \leqslant \dfrac{3}{2} \end{cases}$

(Xem thêm phương pháp 6 – Qui nạp Cô Si)

1) Ta có

$$\left(1 + \frac{1}{\sin A}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin B}\right)\left(1 + \frac{1}{\sin C}\right) \geqslant \left(1 + \frac{3}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\right)^3 = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$$

2) Vì ΔABC nhọn nên $\cos A, \cos B, \cos C > 0$

Áp dụng BĐT (*) ta có

$$\left(1 + \frac{1}{\cos A}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos B}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos C}\right) \geqslant \left(1 + \frac{3}{\frac{3}{2}}\right)^3 = (1+2)^3 = 27.$$

15. Kĩ thuật khoảng hữu tỉ trong tập số thực

15.1 Cho Δ ABC có các cạnh a, b, c với độ dài hữu tỉ.

CMR $\left(1 + \frac{b-c}{a}\right)^a \left(1 + \frac{c-a}{b}\right)^b \left(1 + \frac{a-b}{c}\right)^c \leqslant 1$

Giải

Đặt $a = \frac{m}{k}$, $b = \frac{n}{k}$, $c = \frac{p}{k}$ với $m, n, p, k \in \mathbb{Z}^+$

Khi đó : $\left(1 + \frac{b-c}{a}\right)^a \left(1 + \frac{c-a}{b}\right)^b \left(1 + \frac{a-b}{c}\right)^c =$

$$= \sqrt[k]{\left(1 + \frac{n-p}{m}\right)^m \left(1 + \frac{p-m}{n}\right)^n \left(1 + \frac{m-n}{p}\right)^p} \overset{\text{(CôSi)}}{\geqslant}$$

$$\frac{m\left(1+\frac{n-p}{m}\right)+n\left(1+\frac{p-m}{n}\right)+p\left(1+\frac{m-n}{p}\right)}{m+n+p}=\frac{m+n+p}{m+n+p}=1$$

15.2 : CMR : $a^a > \frac{1}{2}\ \forall\ a \in \mathbf{R}^+$

Giải

Rõ ràng với $a \geq 1$ thì $a^a \geq a^1 = a > \frac{1}{2}$

Xét $0 < a \leq 1$. Ta có $(0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$

Do đó $\exists\ k \in \mathbf{Z}^+$ sao cho $a \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$

$\leftrightarrow \frac{1}{k+1} \leq a \leq \frac{1}{k}$ suy ra $a^a \geq \left(\frac{1}{k+1}\right)^a \geq \left(\frac{1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}}$

Ta sẽ chứng minh $\left(\frac{1}{k+1}\right)^{\frac{1}{k}} \geq \frac{1}{2} \leftrightarrow \sqrt[k]{\frac{1}{k+1}} \geq \frac{1}{2}$

$\leftrightarrow \frac{1}{k+1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^k \leftrightarrow 2^k \geq k+1 \leftrightarrow 2 > \sqrt[k]{k+1}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô Si ta có $\sqrt[k]{k+1} = \sqrt[k]{(k+1)\,.\,\underbrace{1 \ldots 1}_{(k-1)\text{ số}}}$

$$\leq \frac{(k+1)+1+\ldots+1}{k} = \frac{(k+1)+(k-1)}{k} = 2$$

Từ đó ta có $a^a > \frac{1}{2}$ (Vì các dấu bằng không đồng thời xảy ra).

15.3 : CMR : $a^b + b^a > 1\ \forall\ a, b \in \mathbf{R}^+$

> **Bình luận :** Tất cả các sách đều trình bày lời giải này dựa vào BĐT Bec–nu–li là kiến thức ngoài chương trình phổ thông. Nhờ kỹ thuật này ta dễ dàng đưa về dạng sử dụng BĐT Cô Si.

§2. BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACÔPSKI (B.C.S)

I. BẤT ĐẲNG THỨC BUNHIACÔPSKI

1. **Dạng tổng quát :** Cho $a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_n$ là 2n số thực tùy ý. Khi đó

- *Dạng 1* : $(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2$ (1)
- *Dạng 2* $\sqrt{(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2)} \geq |a_1b_1 + \ldots + a_nb_n|$ (2)
- *Dạng 3* $\sqrt{(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2)} \geq a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$ (3)

Dấu bằng ở (1), (2) xảy ra $\leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n}$

Dấu bằng ở (3) xảy ra $\leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n} \geq 0$

- *Hệ quả 1* : Nếu $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = C$ – const thì

$\mathrm{Min}(x_1^2 + \ldots + x_n^2) = \dfrac{c^2}{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$ Dấu bằng $\leftrightarrow \dfrac{x_1}{a_1} = \ldots = \dfrac{x_n}{a_n}$

- *Hệ quả 2* : Nếu $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = c^2$ thì

$$\mathrm{Max}(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n) = |c|\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$$

Dấu bằng $\leftrightarrow \dfrac{x_1}{a_1} = \ldots = \dfrac{x_n}{a_n} \geq 0$

$$\mathrm{Min}(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n) = -|C|\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$$

Dấu bằng $\leftrightarrow \dfrac{x_1}{a_1} = \ldots = \dfrac{x_n}{a_n} \leq 0$

2) Dạng cụ thể

$n = 2$: $\forall$ a, b, c, d $\in \mathbb{R}$

1. $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac+bd)^2$
2. $\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq |ac + bd|$
3. $\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \geq ac + bd$

Dấu "=" ở (1), (2) $\leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Dấu "=" ở (3) $\leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \geq 0$

$n = 3$: $\forall$ a, b, c, m, n, p $\in \mathbb{R}$

1. $(a^2+b^2+c^2)(m^2+n^2+p^2) \geq (am+bn+cp)^2$
2. $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + p^2)} \geq |am + bn + cp|$
3. $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(m^2 + n^2 + p^2)} \geq am+bn+cp$

Dấu "=" ở (1), (2) $\leftrightarrow \frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$

Dấu "=" ở (3) $\leftrightarrow \frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} \geq 0$

II. CÁC KỸ THUẬT SỬ DỤNG BĐT BUNHIACÔPSKI (B.C.S)

Xin trích giới thiệu 5 kỹ thuật trong 10 kỹ thuật sử dụng BĐT (B.C.S)

1. Đánh giá từ vế lớn sang vế nhỏ

1.1 CMR : a) $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$

b) $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$

c) $n(a_1^2 + \dots + a_n^2) \geq (a_1 + \dots + a_n)^2$

Giải

a) $2(a^2 + b^2) = (1^2 + 1^2)(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$

b) $3(a^2+b^2+c^2) = (1^2+1^2+1^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2$

c) $n(a_1^2+\dots+a_n^2) = (1^2+1^2+\dots+1^2)(a_1^2+\dots+a_n^2) \geq (a_1+\dots+a_n)^2$

1.2 62 II.2 Cho $a + b = 2$. *CMR* : $a^4 + b^4 \geq 2$

Giải

$$a^4 + b^4 = \frac{1}{2}(1^2 + 1^2)[(a^2)^2 + (b^2)^2] \geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}[(1^2+1^2)(a^2+b^2)]^2 \geq \frac{1}{8}[(a+b)^2]^2 = \frac{1}{8}(a+b)^4 = \frac{1}{8}\cdot 2^4 = 2$$

1.3 : CMR : $a^4 + b^4 + c^4 \geq ab + bc + ca \ \forall \ a, b, c$

Giải

$$a^2 + b^2 + c^2 = \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2)} \geq$$

$$\geq |ab + bc + ca| \geq ab + bc + ca$$

1.4 CMR : $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \geq \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} \quad \forall abc \neq 0$

Giải

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right)\left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}\right)}$$

$$\geq \left|\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c} + \frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a} + \frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right| \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$$

1.5. 138 I.2 : CMR $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \geq \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \ \forall \ abc \neq 0$

Giải : Sai lầm thường gặp :

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{3}(1^2 + 1^2 + 1^2)\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) \overset{(B.C.S)}{\geq} \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)^2$$

$$\overset{\text{CôSi}}{\geq} \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$$

Sai lầm là do ta đã sử dụng BĐT Cô Si cho các số $\dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{c}, \dfrac{c}{a}$ chưa chắc đã $\geq 0 \ \forall \ abc \neq 0$.

Lời giải đúng :

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{3}(1^2 + 1^2 + 1^2)\left(\left|\frac{a}{b}\right|^2 + \left|\frac{b}{c}\right|^2 + \left|\frac{c}{a}\right|^2\right)$$

$$\overset{(B.C.S)}{\geq} \frac{1}{3}\left(\left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a}\right|\right)^2 \overset{(\text{CôSi})}{\geq}$$

$$\frac{1}{3}.3\sqrt[3]{\left|\frac{a}{b}\right|\left|\frac{b}{c}\right|\left|\frac{c}{a}\right|}\left(\left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right|\right)$$

$$= \left|\frac{a}{b}\right|+\left|\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}\right| \geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \quad \text{(đpcm)}$$

Ghi nhớ : $\dfrac{x^2}{y^2} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 = \left|\dfrac{x}{y}\right|^2$

1.6 HS II.2 : Cho $xy + yz + zx = 4$. Tìm Min $F = x^4 + y^2 + z^4$

Giải

$$F = \frac{1}{3}(1^2+1^2+1^2)(x^4+y^4+z^4) \overset{B.C.S}{\geq} \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)^2$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)(y^2+z^2+x^2) \geq \frac{1}{3}(xy+yz+zx)^2 = \frac{16}{3}$$

Suy ra Min $F = \dfrac{16}{3}$ đạt được với $x = y = z = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

1.7 Cho $a + b + c = 6$. *CMR* $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$

Giải

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{3}(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2) \geq$$

$$\geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}.6^2 = 12$$

1.8 : Cho $a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) \leq \dfrac{4}{3}$

CMR $a + b + c \leq 4$

Giải : *Cách 1* : Ta có

$$\frac{4}{3} \geq a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) = a^2 + b^2 + c^2 - (a+b+c)$$

$$= \frac{1}{3}(1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c) \geq$$

$$\geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 - (a+b+c)$$

Suy ra $(a + b + c)^2 - 3(a + b + c) - 4 \leqslant 0$

$\leftrightarrow [(a + b + c) + 1][(a + b + c) - 4] \leqslant 0$

$\leftrightarrow -1 \leqslant a + b + c \leqslant 4 \Rightarrow a + b + c \leqslant 4$

Cách 2 : $a(a - 1) + b(b - 1) + c(c - 1) \leqslant \dfrac{4}{3}$

$\leftrightarrow \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{25}{12}$. Do đó ta có

$$a + b + c = \left(a - \frac{1}{2}\right) + \left(b - \frac{1}{2}\right) + \left(c - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} \overset{(B.C.S)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2)\left[\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{2}\right)^2\right]} + \frac{3}{2}$$

$$\leqslant \sqrt{3 \cdot \frac{25}{12}} + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$$

1.9 *94 II.2* Cho $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ u^2 + v^2 = 25 \\ xu + yv \geqslant 20 \end{cases}$ Tìm Max $(x + v)$

Giải

$$400 = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2) \geqslant (xu + yv)^2 \geqslant 400 \rightarrow \begin{cases} xu + yv = 20 \\ \dfrac{x}{u} = \dfrac{y}{v} \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{xv = uy.}$ Mặt khác

$$41 = x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = (x^2 + v^2) + (u^2 + y^2) \geqslant x^2 + v^2 + 2uy =$$

$$= x^2 + v^2 + 2xv = (x + v)^2 \rightarrow x + v \leqslant \sqrt{41}$$

Do đó Max $(x + v) = \sqrt{41}$ xảy ra với

$$u = y = \frac{20}{\sqrt{41}},\ x = \frac{16}{\sqrt{41}},\ v = \frac{25}{\sqrt{41}}$$

2. Đánh giá từ vế nhỏ sang vế lớn

2.1 Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. *CMR* : $a + 3b + 5c \leq \sqrt{35}$

Giải

$$a + 3b + 5c \leq \sqrt{(1^2 + 3^2\ 5^2)(a^2 + b^2 + c^2)} = \sqrt{35}$$

2.2 Cho $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

CMR : $(t^2 + at + b)^2 + (t^2 + ct + d)^2 \leq (2t^2 + 1)^2$

Giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có

$$+\begin{cases}(t^2 + at + b)^2 = (t.t + a.t + b.1)^2 \leq (t^2 + a^2 + b^2)(t^2 + t^2 + 1^2) \\ (t^2 + ct + d)^2 = (t.t + c.t + d.1)^2 \leq (t^2 + c^2 + d^2)(t^2 + t^2 + 1^2)\end{cases}$$

$$(t^2+at+b)^2 + (t^2+ct+d)^2 \leq (2t^2+1)[(t^2+a^2+b^2) + (t^2+c^2+d^2)]$$

$$\leftrightarrow (t^2 + at + b)^2 + (t^2 + ct + d) \leq (2t^2 + 1)(2t^2 + 1) = (2t^2 + 1)^2$$

2.3. Cho $x^2 + y^2 = u^2 + v^2 = 1$.

CMR : $-\sqrt{2} \leq x(u + v) + y(u - v) \leq \sqrt{2}$

Giải

$$\leftrightarrow |x(u + v) + y(u - v)| \leq \sqrt{2}$$

$$\leftrightarrow [x(u + v) + y(u - v)]^2 \leq 2$$

Ta có $[x(u + v) + y(u - v)]^2 \leq (x^2 + y^2)[(u + v)^2 + (u - v)^2] =$

$$= (x^2 + y^2)\ [2(u^2 + v^2)] = 2$$

Từ đó $-\sqrt{2} \leq x(u + v) + y(u - v) \leq \sqrt{2}$.

2.4 148 III ΔABC có $a^2 + b^2 \leq c^2$. *CMR* $0,4 < \dfrac{r}{h_c} < 0,5$

Giải

$$\leftrightarrow \frac{2}{S} \overset{(1)}{<} \frac{S/P}{2S/c} = \frac{c}{2p} = \frac{c}{a + b + c} \overset{(2)}{<} \frac{1}{2}$$

Ta có (2) $\leftrightarrow 2c < a + b + c \leftrightarrow c < a + b$ đúng $\rightarrow$ (đpcm)

(1) $\leftrightarrow 2(a + b + c) < 5c \leftrightarrow 2(a + b) < 3c \leftrightarrow 4(a + b)^2 < 9c^2$

Ta có $4(a+b)^2 \leq 4(1^2+1^2)(a^2+b^2) = 8(a^2+b^2) \leq 8c^2 < 9c^2$
$\rightarrow$ (1) đúng. (đpcm)

2.5 Cho $\begin{cases} a > b\ c \\ b > c > 0 \end{cases}$ *CMR* $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$

Giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} = \sqrt{c}\,.\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c}\,.\sqrt{c}$$

$$\leq \sqrt{[(\sqrt{c})^2 + (\sqrt{b-c})^2][(\sqrt{a-c})^2 + (\sqrt{c})^2]} = \sqrt{ab}$$

2.6 13I.2 Cho a, b $\geq$ 1. *CMR* : $\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \leq 2\sqrt{\log_2 \frac{a+b}{2}}$

Giải

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$\sqrt{\log_2 a} + \sqrt{\log_2 b} \leq \sqrt{(1^2+1^2)[(\sqrt{\log_2 a})^2 + (\sqrt{\log_2 b})^2]}$$

$$= \sqrt{2\log_2 ab} = \sqrt{4\log_2\sqrt{ab}} = 2\sqrt{\log_2\sqrt{ab}} \leq 2\sqrt{\log_2 \frac{a+b}{2}}$$

2.7 19 II.2 Cho ΔABC. *CMR* $\sqrt{p} \overset{(1)}{<} \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \overset{(2)}{\leq} \sqrt{3p}$

Giải : (1) : Ta có

$[\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}]^2 = (p-a) + (p-b) + (p-c)$
$+ 2[\sqrt{(p-a)(p-b)} + \sqrt{(p-b)(p-c)} + \sqrt{(p-c)(p-a)}] > p$
Do đó $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}$

2. Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{(1^2+1^2+1^2)[(\sqrt{p-a})^2 + (\sqrt{p-b})^2 + (\sqrt{p-c})^2]}$$

$$= \sqrt{3[(p-a)+(p-b)+(p-c)]} = \sqrt{3p}$$

2.8 54 I.2 Cho $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

CMR : $\sqrt{4\cos^2\alpha + 1} + \sqrt{4\cos^2\beta + 1} + \sqrt{4\cos^2\gamma + 1} \leq \sqrt{21}$

Giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có

$$\sqrt{4\cos^2\alpha + 1} + \sqrt{4\cos\beta + 1} + \sqrt{4\cos^2\gamma + 1} \leq$$

$$\leq \sqrt{(1^2+1^2+1^2)[(\sqrt{4\cos^2\alpha + 1})^2 + (\sqrt{4\cos^2\beta + 1})^2 + (\sqrt{4\cos^2\gamma + 1})^2]}$$

$$= \sqrt{3[4(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + 3]} = \sqrt{3\,.\,7} = \sqrt{21}$$

2.9 ***144 III.2*** Cho $\begin{cases} \alpha, \beta, \gamma > 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Tìm Max $g = \sqrt{1 + tg\alpha tg\beta} + \sqrt{1 + tg\beta tg\gamma} + \sqrt{1 + tg\gamma tg\alpha}$

Giải

Ta có $\dfrac{1}{tg\gamma} = cotg\gamma = tg(\alpha + \beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$

$\leftrightarrow 1 - tg\alpha tg\beta = tg\gamma(tg\alpha + tg\beta) \leftrightarrow tg\alpha tg\beta + tg\beta tg\alpha\gamma + tg\gamma tg\alpha = 1$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có

$$g = \sqrt{1 + tg\alpha tg\beta} + \sqrt{1 + tg\beta tg\gamma} + \sqrt{1 + tg\gamma tg\alpha} \leq$$

$$\leq \sqrt{(1^2+1^2+1^2)[(\sqrt{1 + tg\alpha tg\beta})^2 + (\sqrt{1 + tg\beta tg\gamma})^2 + (\sqrt{1 + tg\gamma tg\alpha})^2]}$$

$$= \sqrt{3[3 + tg\alpha tg\beta + tg\beta tg\gamma + tg\gamma tg\alpha]} = \sqrt{3\,.\,4} = \sqrt{12}$$

$\rightarrow$ **Max** $g = \sqrt{12}$ **đạt được khi** $\alpha = \beta = \gamma = \dfrac{\pi}{6}$

2.10. ***33 III.2*** **Cho** $x^2 + y^2 = 1$. **Tìm Max** $A = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$

(Chú ý phần min A xét ở phương pháp hàm số)

Giải

$$A = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} \leq \sqrt{(x^2+y^2)[(\sqrt{1+y})^2 + (\sqrt{1+x})^2]}$$

$$= \sqrt{x + y + 2} \leq \sqrt{\sqrt{(1^2+1^2)(x^2+y^2)} + 2} = \sqrt{\sqrt{2} + 2}$$

$\rightarrow$ **Max** $A = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ **đạt được khi** $x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2.11 ***96 II.1*** Tìm Max, Min của $y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}$

Giải

Để hàm số xác định thì $\begin{cases} 0 \leqslant \cos x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \sin x \leqslant 1 \end{cases}$. Khi đó

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x \leqslant (\cos x)^{\frac{1}{2}} + (\sin x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}$$

Mặt khác theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x} \leqslant \sqrt{(1^2 + 1^2)(\cos x + \sin x)} =$$

$$= \sqrt{2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \leqslant \sqrt{2\sqrt{2}} = \sqrt[4]{8}$$

Từ đó : Min $y = 1$ xảy ra với $x = 2k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Max $y = 1$ xảy ra với $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

2.12 ***59 II.2*** Tìm Max của $y = \sqrt{a + \cos x} + \sqrt{a + \sin x}$ với $a \geqslant 1$

Giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có

$$y = \sqrt{a+\cos x} + \sqrt{a+\sin x} \leqslant \sqrt{(1^2+1^2)[(\sqrt{a+\cos x})^2 + (\sqrt{a+\sin x})^2]}$$

$$= \sqrt{2(2a+\cos x+\sin x)} = \sqrt{2\left[2a+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]} \leqslant \sqrt{2(2a+\sqrt{2})}$$

Từ đó suy ra Max $y = \sqrt{2(2a + \sqrt{2})}$ xảy ra với $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

2.13 ***11 II.2***. Tìm Max $y = \sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x}$. Sử dụng Gpt

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$$

Giải

$$y = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \leqslant \sqrt{(1^2 + 1^2)\,[(\sqrt{x-2})^2 + (\sqrt{4-x})^2]} = 2$$

$\rightarrow$ Max $y = 2$ đạt được $\leftrightarrow \sqrt{x-2} = \sqrt{4-x} \leftrightarrow x = 3$

Mặt khác $x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 + 2 \geqslant 2$; dấu "=" $\leftrightarrow x = 3$

Từ đó suy ra pt $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$

chỉ có nghiệm duy nhất $x = 3$

3. Kỹ thuật đòn phối hợp

74 III.2 : Cho $36x^2 + 16y^2 = 9$. Tìm Max, Min của $(y - 2x + 5)$

Giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có

$$(36x^2 + 16y^2)\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right] \geqslant (-2x + y)^2$$

$$\leftrightarrow \frac{25}{16} \geqslant (y - 2x)^2 \leftrightarrow -\frac{5}{4} \leqslant y - 2x \leqslant \frac{5}{4}$$

$$\leftrightarrow \frac{15}{4} \leqslant y - 2x + 5 \leqslant \frac{25}{4}$$

Từ đó ta có : Max $(y - 2x + 5) = \dfrac{25}{4}$

Min $(y - 2x + 5) = \dfrac{15}{4}$

3.2 : Cho $3x - 4y = 7$. *CMR* : $3x^2 + 4y^2 \geqslant 7$

Giải

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$(3x^2 + 4y^2)\left[(\sqrt{3})^2 + (-2)^2\right] \geqslant (3x - 4y)^2 = 49$$

$$\leftrightarrow (3x^2 + 4y^2)(3 + 4) \geqslant 49 \leftrightarrow (3x^2 + 4y^2) \geqslant 7$$

3.3 : Cho $x^2 + 4y^2 = 1$. *CMR* : $|x - y| \leqslant \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có

$$(x^2 + 4y^2)\left(1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) \geqslant (x - y)^2$$

$$\leftrightarrow 1\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4} \geqslant (x - y)^2 \leftrightarrow |x - y| \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$$

3.4 CMR : $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}\ \forall\ a, b, c \geq 0$

Giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có

$$(a^3 + b^3 + c^3)(abc + abc + abc) =$$

$$= [(\sqrt{a^3})^2 + (\sqrt{b^3})^2 + (\sqrt{c^3})^2]\,[(\sqrt{abc})^2 + (\sqrt{abc})^2 + (\sqrt{abc})^2]$$

$$\geq [\sqrt{a^3}\,.\,\sqrt{abc} + \sqrt{b^3}\,.\,\sqrt{abc} + \sqrt{c^3}\,.\,\sqrt{abc}]^2$$

$$= (a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab})^2 \overset{\text{CôSi}}{\geq}$$

$$\overset{\text{CôSi}}{\geq} 3\sqrt[3]{(a^2\sqrt{bc})\,.\,(b^2\sqrt{ca})\,.\,(c^2\sqrt{ab})}\,.\,(a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab})$$

$$= 3abc(a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab})$$

Từ đó : $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ca} + c^2\sqrt{ab}$

3.5 8 III.2 Tìm Min $f = (x - 2y + 1)^2 + (2x + ay + 5)^2$

Giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có

$$f = \frac{1}{5}[(-2)^2 + 1^2][(x - 2y + 1)^2 + (2x + ay + 5)^2]$$

$$\geq \frac{1}{5}[(-2)(x - 2y + 1) + 1.(2x + ay + 5)]^2$$

$$= \frac{1}{5}[(a + 4)y + 3]^2 \geq \left[\begin{array}{l} 0 \text{ nếu } a \neq -4 \\ \dfrac{9}{5} \text{ nếu } a = -4 \end{array}\right.$$

Từ đó : Nếu $a \neq -4 \rightarrow$ Min $f = 0$

Nếu $a = -4 \rightarrow$ Min $f = \dfrac{9}{5}$.

4. Đánh giá trên phương trình và bất phương trình

4.1 [67 II.2]. CMR : Nếu pt $(x + a)^2 + (y + b)^2 + (x + y)^2 = c^2$ có nghiệm thì

$$(a + b)^2 \leqslant 3c^2$$

Giải

Giả sử (x_o, y_o) là nghiệm của phương trình

$$\leftrightarrow (x_o + a)^2 + (y_o + b)^2 + (x_o + y_o)^2 = c^2$$

Ta có $(a + b)^2 = [(x_o + a)^2 + (y_o + b) + (-x_o - y_o)]^2$

$$\overset{(B.C.S)}{\leqslant} (1^2 + 1^2 + 1^2)[(x_o + a)^2 + (y_o + b)^2 + (-x_o - y_o)^2] = 3c^2 \text{ (đpcm)}$$

4.2 120 III.2 : CMR : Nếu pt $x^4 + bx^3 + cx^2 + bx + 1 = 0$ có nghiệm thì $b^2 + (c - 2)^2 > 3$

Giải

Giả sử x_o là nghiệm $\Rightarrow x_o \neq 0$ và $x_o^4 + bx_o^3 + cx_o^2 + bx_o + 1 = 0$

$$\leftrightarrow x_o^2 + \frac{1}{x^2} + b\left(x_o + \frac{1}{x_o}\right) + c = 0$$

$$\leftrightarrow \left(x_o + \frac{1}{x_o}\right)^2 + b\left(x_o + \frac{1}{x_o}\right) + c - 2 = 0$$

Đặt $t = x_o + \frac{1}{x_o} \Rightarrow t^2 = x_o^2 + \frac{1}{x_o^2} + 2 \geqslant 2\sqrt{x_o^2 \cdot \frac{1}{x_o^2}} + 2 = 4$

Khi đó ta có $bt + c - 2 = -t^2 \Rightarrow t^4 = [bt + (c - 2)]^2 \overset{(BCS)}{\leqslant}$

$$\overset{(BCS)}{\leqslant} [b^2 + (c - 2)^2](t^2 + 1) \Rightarrow b^2 + (c - 2)^2 \geqslant \frac{t^4}{t^2 + 1}$$

$$\leftrightarrow b^2 + (c - 2)^2 \geqslant t^2 - 1 + \frac{1}{t^2 + 1} > 4 - 1 + 0 = 3$$

Làm chặt hơn nữa : Ta có thể chứng minh $b^2 + (c - 2)^2 \geqslant \frac{16}{5}$, Thật vậy theo trên $b^2 + (c-2)^2 \geqslant \dfrac{t^4}{t^2+1} = \dfrac{t^2}{1+\dfrac{1}{t^2}}$

Mà $t^2 \geqslant 4$ do đó $b^2 + (c-2)^2 \geqslant \dfrac{t^2}{1+\dfrac{1}{t^2}} \geqslant \dfrac{4}{1+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{16}{5}$

Ngoài ra với giả thiết đã cho ta có thể chứng minh

$$b^2 + c^2 \geqslant \frac{4}{5}$$

I. 109 II.1: Giải bất phương trình $\sqrt{x-1} + x - 3 \geqslant \sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2}$

Giải

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$\sqrt{x-1} + x - 3 \leqslant \sqrt{(1^2+1^2)[(\sqrt{x-1})^2 + (x-3)^2]} = \sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2}$

Do đó bất phương trình (1) $\leftrightarrow \sqrt{x-1} + x - 3 = \sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2}$

$\leftrightarrow \sqrt{x-1} = x - 3 \leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3 \\ x - 1 = (x-3)^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases}$

$\leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 3 \\ x = 2 \cup x = 5 \end{cases} \leftrightarrow x = 5$

I.134 II.2 Trọng các nghiệm của Bất phương trình $\log_{x^2+y^2}(x+y) \geqslant 1$

Tìm nghiệm để tổng $(x + 2y)$ max

Giải

(1) Nếu $x^2 + y^2 > 1$ thì Bpt

$\leftrightarrow x + y \geqslant x^2 + y^2 \leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}$

Ta có $x + 2y = \left[\left(x - \frac{1}{2}\right) + 2\left(y - \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{3}{2} \leqslant$

$\geqslant \sqrt{(1^2+2^2)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right]} + \frac{3}{2} \leqslant \sqrt{5 \cdot \frac{1}{2}} + \frac{3}{2} = \frac{3+\sqrt{10}}{2}$

$\rightarrow$ Max $(x + 2y) = \dfrac{3 + \sqrt{10}}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{x - \frac{1}{2}}{1} = \dfrac{y - \frac{1}{2}}{2}$ và $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$$\leftrightarrow \frac{x - \frac{1}{2}}{1} = \frac{2y - 1}{4} = \frac{(x + 2y)_{max} - \frac{3}{2}}{1 + 4} = \frac{\sqrt{10}}{10} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5 + \sqrt{10}}{10} \\ y = \dfrac{5 + 2\sqrt{10}}{10} \end{cases}$$

Rõ ràng khi đó $\left[\frac{5+\sqrt{10}}{10} - \frac{1}{2}\right]^2 + \left[\frac{5+2\sqrt{10}}{10} - \frac{1}{2}\right]^2 = \frac{1}{10} + \frac{4}{10} = \frac{1}{2}$

(2) Nếu $x^2 + y^2 < 1$ thì Bpt $\leftrightarrow x + y < x^2 + y^2$

Vì $x^2 + y^2 < 1 \rightarrow y^2 < 1 \rightarrow |y| < 1$

Ta co $x + 2y = (x + y) + y \leqslant x^2 + y^2 + |y| < 1 + 1 < \dfrac{3 + \sqrt{10}}{2}$

$\rightarrow$ Max $(x + 2y) < \dfrac{3 + \sqrt{10}}{2}$.

Kết hợp (1) và (2) $\rightarrow$ Max $(x + 2y) = \dfrac{3 + \sqrt{10}}{2}$

101 III.1 *CMR* phương trình $\sin x - 2\sin 2x - \sin 3x = 2\sqrt{2}$ vô nghiệm

Giải

Ta có $\sin x - 2\sin 2x - \sin 3x = \sin x - \sin 3x - \sin 2x$

$$= -2\cos 2x \sin x - 2\sin 2x \leqslant \sqrt{[(-2\cos 2x)^2 + (-2\sin 2x)^2]\,[\sin^2 x + 1]}$$

$$= \sqrt{4(\sin^2 x + 1)} \leqslant \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}.$$

Dấu bằng xảy ra $\leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ \dfrac{\cos 2x}{\sin x} = \dfrac{\sin 2x}{1} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \text{ hay } \cos x = 0 \\ \dfrac{1 - 2\sin^2 x}{\sin x} = \dfrac{2\sin x \cos x}{1} \end{cases}$

$\rightarrow \dfrac{-1}{\sin x} = 0$. Vô lý. Vậy phương trình vô nghiệm

L.6 136 II.2 Giải phương trình :

$$\left(\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}\right)^2+\left(\sin^2x+\frac{1}{\sin^2x}\right)^2 = 12+0{,}5\sin y \qquad (1)$$

Giải

Ta có $12+0{,}5\sin y \leqslant 12+0{,}5 = 12{,}5$

Theo BĐT Bunhiacôpski thì

$$\left(\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}\right)^2+\left(\sin^2x+\frac{1}{\sin^2x}\right)^2 =$$

$$=\frac{1}{2}(1^2+1^2)\left[\left(\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}\right)^2+\left(\sin^2x+\frac{1}{\sin^2x}\right)^2\right]$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\left[\left(\cos^2x+\frac{1}{\cos^2x}\right)+\left(\sin^2x+\frac{1}{\sin^2x}\right)\right]^2=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{\sin^2x\cos^2x}\right]^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{4}{\sin^22x}\right]^2 \geqslant \frac{1}{2}[1+4]^2=\frac{25}{2} = 12{,}5$$

Do đó (1) $\leftrightarrow \begin{cases}\sin y = 1\\ \sin^22x=1\\ \cos^2x+\dfrac{1}{\cos^2x}=\sin^2x+\dfrac{1}{\sin^2x}\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+m\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

L.7 24 II.1 Giải phương trình

$$\cos3x+\sqrt{2-\cos^23x} = 2(1+\sin^2 2x) \qquad (1)$$

Giải

Ta có $2(1+\sin^22x) \geqslant 2$

$$\cos3x+\sqrt{2-\cos^23x} \leqslant \sqrt{(1^2+1^2)[\cos^23x+(\sqrt{2-\cos^23x})^2]} = 2$$

Do đó (1) $\leftrightarrow \begin{cases}\sin^22x=0\\ \cos3x=\sqrt{2-\cos^23x}\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}2\sin x\cos x = 0\\ \cos3x=1\end{cases}$

$\leftrightarrow \begin{cases}\cos x = 0 \vee \cos x = \pm 1\\ 4\cos^3x-3\cos x=1\end{cases} \leftrightarrow \cos x = 1 \leftrightarrow \boxed{x = 2k\pi}$

I.8. 146 III. Giải phương trình

$$\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x\sqrt{2 - \sin^2 x} = 3 \qquad (1)$$

Giải

Ta có $\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} \leqslant \sqrt{(1^2 + 1^2)[\sin^2 x + (\sqrt{2 - \sin^2 x})^2]} = 2$

$$\sin x\sqrt{2 - \sin^2 x} \leqslant |\sin x|\sqrt{2 - \sin^2 x} =$$

$$= \sqrt{\sin^2 x(2 - \sin^2 x)} \leqslant \frac{\sin^2 x + (2 - \sin^2 x)}{2} = 1$$

Suy ra $\sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x} + \sin x\sqrt{2 - \sin^2 x} \leqslant 3$.

Do đó (1) $\leftrightarrow$ Các điều kiện xảy ra các dấu bằng

$$\leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \sqrt{2 - \sin^2 x} \\ \sin x = |\sin x| \\ \sin^2 x = 2 - \sin^2 x \end{cases} \leftrightarrow \sin x = 1 \leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

I.9. 131 II.1. Cho ΔABC thỏa mãn

$3(\cos B + 2\sin C) + 4(\sin B + 2\cos C) = 15$. *CMR* : ΔABC vuông

Giải

$VT = 3\cos B + 4\sin B + 6\sin C + 8\cos C$

$$\leqslant \sqrt{(3^2 + 4^2)(\cos^2 B + \sin^2 B)} + \sqrt{(6^2 + 8^2)(\sin^2 C + \cos^2 C)} = 15$$

$$\text{Dấu "="} \leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\cos B}{3} = \dfrac{\sin B}{4} \\ \dfrac{\sin C}{6} = \dfrac{\cos C}{8} \end{cases} \rightarrow \cot g B = tg C = \cot g\left(\frac{\pi}{2} - C\right)$$

$\rightarrow B = \dfrac{\pi}{2} - C \rightarrow B + C = \dfrac{\pi}{2} \rightarrow A = \dfrac{\pi}{2}$. Vậy ΔABC vuông

I.10. 31 III.1. Tìm Max của $y = \dfrac{2 + \cos x}{\sin x + \cos x - 2}$

Giải

Ta có $y\sin x + (y-1)\cos x = 2(1+y) \rightarrow 4(1+y)^2 = [y\sin x + (y-1)\cos x]^2$

$\leqslant [y^2 + (y - 1)^2][\sin^2 x + \cos^2 x] = y^2 + (y - 1)^2$

$$\leftrightarrow 2y^2 + 10y + 3 \leqslant 0 \leftrightarrow \frac{-5-\sqrt{9}}{2} \leqslant y \leqslant \frac{-5+\sqrt{19}}{2}.$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{Max}y = \dfrac{-5+\sqrt{19}}{2} \\ \text{Min}y = \dfrac{-5-\sqrt{19}}{2} \end{cases}$$

1.11 139 II.2 : CMR $\left|\dfrac{\cos 3x + a\sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}\right| \leq \dfrac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3} \quad \forall x$

Giải

Đặt $y = \dfrac{\cos 3x + a\sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}$

$\leftrightarrow (y-1)\cos 3x - a\sin 3x = 1 - 2y$

$\rightarrow (1-2y)^2 = [(y-1)\cos 3x - a\sin 3x]^2 \leqslant$

$\leqslant [(y-1)^2 + (-a)^2][\cos^2 3x + \sin^2 3x] \leftrightarrow 3y^2 - 2y - a^2 \leqslant 0$

$$\rightarrow \frac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3} \geqslant y \geqslant \frac{1-\sqrt{1+3a^2}}{2} \geqslant \frac{-(1+\sqrt{1+3a^2})}{3}$$

Do đó $|y| = \left|\dfrac{\cos 3x + a\sin 3x + 1}{\cos 3x + 2}\right| \leqslant \dfrac{1+\sqrt{1+3a^2}}{3}$

5. Kỹ thuật nghịch đảo

A) ***Dạng I*** : $\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i}\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \quad \forall y_i > 0$

Chứng minh : Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$\left(\sum_{i+1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{y_i}\right) = \left[\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{y_i})^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\sqrt{y_i}}\right)^2\right]$$

$$\geqslant \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{y_i}\cdot\frac{x_i}{\sqrt{y_i}}\right)\right]^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

5.1 : CMR : $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \geqslant \dfrac{(a+b+c)}{2} \quad \forall a,\ b,\ c > 0$

Giải

Theo BĐT Bunhicôpski ta có

$$[(b+c) + (c+a) + (a+b)]\left[\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\right] \geqslant (a+b+c)^2$$

$$\rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{(b+c)+(c+a)+(a+b)} = \frac{a+b+c}{2}$$

5.2 : CMR $\dfrac{a^2}{b+c-a} + \dfrac{b^2}{c+a-b} + \dfrac{c^2}{a+b-c} \geqslant a+b+c \ \forall\ \Delta ABC\ (a,\ b,\ c)$

Giải

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$[(b+c-a) + (c+a-b) + (a+b-c)]\left[\frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c}\right]$$

$$\geqslant (a+b+c)^2 \rightarrow \frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(a+b+c)^2}{(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)}$$

$$\leftrightarrow \frac{a^2}{b+c-a} + \frac{b^2}{c+a-b} + \frac{c^2}{a+b-c} \geqslant a+b+c$$

5.3 : CMR : $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2} \ \forall\ a,\ b,\ c > 0$

Giải

$$\leftrightarrow \frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+ba} + \frac{c^2}{ca+cb} \geqslant \frac{3}{2}$$

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$[(ab+ac) + (bc+ba) + (ca+cb)]\left[\frac{a^2}{ab+ac} + \frac{b^2}{bc+ba} + \frac{c^2}{ca+cb}\right]$$

$$\geqslant (a+b+c)^2$$

o

Mặt khác dễ dàng chứng minh $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca)$. Do đó

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{bc+ba}+\frac{c^2}{ca+cb}$$

$$\geqslant \frac{3(ab+bc+ca)}{(ab+ac)+(bc+ba)+(ca+cb)}=\frac{3}{2}$$

5.4 : CMR : $\dfrac{a^3}{b+c}+\dfrac{b^3}{c+a}+\dfrac{c^3}{a+b}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}\ \forall\ a, b, c$

Giải

$$\leftrightarrow \frac{a^4}{ab+ac}+\frac{b^4}{bc+ba}+\frac{c^4}{ca+cb}\geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$[(ab+ac)+(bc+ba)+(ca+cb)]\left[\frac{a^4}{ab+ac}+\frac{b^4}{bc+ba}+\frac{c^4}{ca+cb}\right]$$

$$\geqslant (a^2+b^2+c^2)^2$$

Mặt khác dễ dàng chứng minh $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$. Do đó

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}=\frac{a^4}{ab+ac}+\frac{b^4}{bc+ba}+\frac{c^4}{ca+cb}$$

$$\geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(ab+ac)+(bc+ba)+(ca+cb)}=\frac{(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

5.5. : [65IVb] : Cho M là điểm cố định $\in$ tam diện vuông Oxyz.

Mặt phẳng (α) qua M cắt Ox, Oy, Oz tại A, B, C.

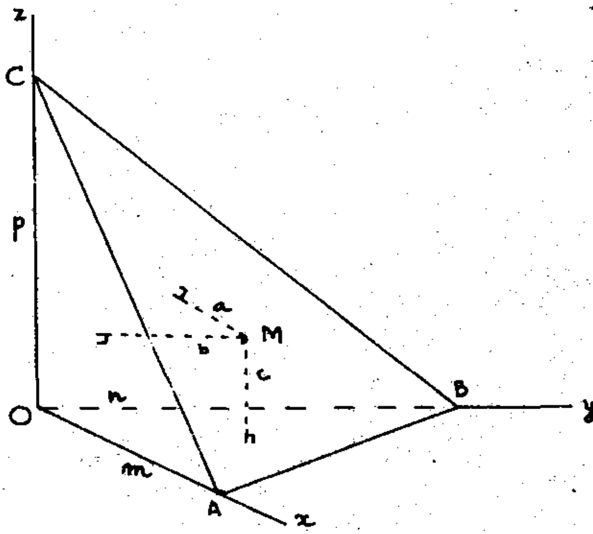
Gọi khoảng cách từ M tới các mặt a, b, c.

3) Tính OA, OB, OC để OA + OB + OC min

Giải

Đặt OA = m, OB = n, OC = p

Ta có $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}mnp$



Mặt khác $V_{OABC} = V_{MOAB} + V_{MOBC} + V_{MOAC}$

$$\leftrightarrow \frac{1}{6}mnp = \frac{1}{6}(cmn + anp + bpm) \leftrightarrow 1 = \frac{cmn + anp + bpm}{mnp}$$

$$\leftrightarrow \quad \frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = 1$$

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$OA + OB + OC = m + n + p = (m + n + p)\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = 1\right)$$

$$\geqslant (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2.$$

Dấu "=" xảy ra $\leftrightarrow \dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{a}/\sqrt{m}} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{b}/\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{c}/\sqrt{p}}$

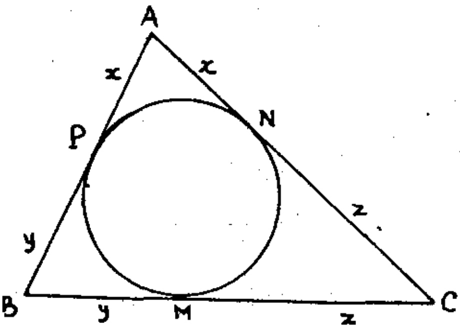
$$\leftrightarrow \frac{m}{\sqrt{a}} = \frac{n}{\sqrt{b}} = \frac{p}{\sqrt{c}} = \frac{m+n+p}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} m = \sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \\ n = \sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \\ p = \sqrt{c}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \end{cases}$$

5.6 : Cho ΔABC (a, b, c). *CMR* : $a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$

(Bài 6 của Mỹ đề nghị – VĐTQT lần 24 tại Pháp 1983)

Giải



Vì trong ΔABC luôn có đường tròn nội tiếp do đó luôn $\exists$ x, y, z > 0 (Độ dài các tiếp tuyến xuất phát từ đỉnh) sao cho $\begin{cases} a = y + z \\ b = z + x \\ c = x + y \end{cases}$

Thay vào ta được BĐT cần chứng minh là

$$(y+z)^2(z+x)(y-x) + (z+x)^2(x+y)(z-y) + (x+y)^2(y+z)(x-z) \geq 0$$

$$\leftrightarrow y^3z + z^3x + x^3y - xyz(x+y+z) \geq 0$$

$$\leftrightarrow y^3z + z^3x + x^3y \geq xyz(x+y+z)$$

$$\leftrightarrow \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{z} \geq x + y + z$$

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$(x+y+z)\left(\frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{z}\right) \geq (y+z+x)^2$$

Do đó $\frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{z} \geq x + y + z \rightarrow$ (đpcm)

B) Dạng 2 : $\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i}\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \ \forall\ x_i, y_i > 0$

Chứng minh : Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{y_i}\right) = \left[\sum_{i=1}^{n} (\sqrt{x_iy_i})^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{\frac{x_i}{y_i}}\right)^2\right]$$

$$\geq \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{x_iy_i} \cdot \sqrt{\frac{x_i}{y_i}}\right)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i\right]^2$$

5.7 : CMR : $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geqslant\dfrac{3}{2}\ \forall\ a, b, c > 0$

Giải

Áp dụng BĐT Bunhiacôpski ta có

$$[a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)]\left[\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right]\geqslant(a+b+c)^2$$

Dễ dàng chứng minh : $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca)$. Do đó

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)}\geqslant\frac{3(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}$$

$$\leftrightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$$

5.8 : CMR : $\dfrac{a}{mb+nc}+\dfrac{b}{mc+na}+\dfrac{c}{ma+nb}\geqslant\dfrac{3}{m+n}\ \forall a, b, c, m, n > 0$

Giải

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$\sum a(mb+nc)\,.\sum\frac{a}{mb+nc}\geqslant(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca)$$

Từ đó $\displaystyle\sum\frac{a}{mb+nc}\geqslant\frac{3(ab+bc+ca)}{\sum a(mb+nc)}=\frac{3(ab+bc+ca)}{(m+n)(ab+bc+ca)}$

$$\leftrightarrow \frac{a}{mb+nc}+\frac{b}{mc+na}+\frac{c}{ma+nb}\geqslant\frac{3}{m+n}$$

5.9 : Điểm M nằm trong ΔABC. Hạ MA_1, MB_1, $MC_1 \perp$ Bc, CA, AB

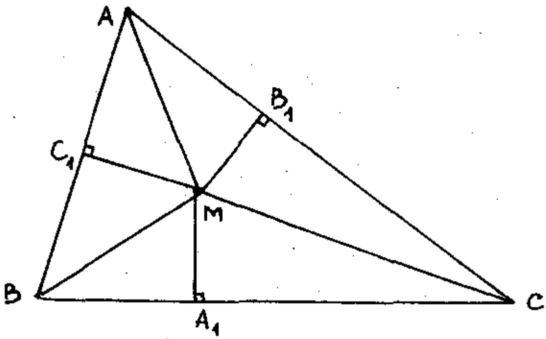
Tìm vị trí của M để $\dfrac{BC}{MA_1}+\dfrac{CA}{MB_1}+\dfrac{AB}{MC_1}$ min

(Bài 1 của Anh đề nghị - VĐTQT lần thứ 22 tại Mỹ 1981)

Giải

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$$\left[BC\,.\,MA_1+CA\,.\,MB_1+AB\,.\,MC_1\right]\left[\frac{BC}{MA_1}+\frac{CA}{MB_1}+\frac{AB}{MC_1}\right]$$



$\geqslant (BC + CA + AB)^2$

Mặt khác : $BC.MA_1 + CA.MB_1 + AB.MC_1$

$= 2dt(MBC) + 2dt(MCA) + 2dt(MAB) = 2dt(ABC)$

Do đó $\dfrac{BC}{MA_1} + \dfrac{CA}{MB_1} + \dfrac{AB}{MC_1} \geqslant \dfrac{(BC + CA + AB)^2}{2dt(ABC)} = \text{const}$

Dấu bằng xảy ra $\leftrightarrow \dfrac{\sqrt{BC} \,.\, MA_1}{\sqrt{BC} / \sqrt{MA_1}} = \dfrac{\sqrt{CA} \,.\, MB_1}{\sqrt{CA} / \sqrt{MB_1}} = \dfrac{\sqrt{AB} \,.\, MC_1}{\sqrt{AB} / \sqrt{MC_1}}$

$\leftrightarrow MA_1 = MB_1 = MC_1 \leftrightarrow$ M là tâm nội tiếp ΔABC.

5.10 : CMR :

$$\frac{a}{b+2c+d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geqslant \frac{2}{3} \quad \forall a,\ b,\ c,\ d > 0$$

(Dự bị Quốc tế 93 – Mỹ đề nghị)

Giải

Ta có $\sum a(b + 2c + 3d) \,.\, \sum \dfrac{a}{b + 2c + 3d} \geqslant (a + b + c + d)^2$

Ta sẽ chứng minh : :

$$\sum a(b + 2c + 3d) \leqslant \frac{3}{2}(a + b + c + d)^2$$

$\leftrightarrow 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \leqslant 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$

$\leftrightarrow (a - b)^2 + (a - c)^2 + (a - d)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 + (c - d)^2 \geqslant 0$ đúng

Từ đó $\sum \dfrac{a}{b + 2c + 3d} \geqslant \dfrac{(a + b + c + d)^2}{\frac{3}{2}(a + b + c + d)^2} = \dfrac{2}{3}$

5.11 : Cho $\begin{cases} a_1, a_2, \dots a_n > 0 \\ a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 1 \end{cases}$ và $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$

CMR : $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{S - a_i} \geq \frac{1}{n-1}$

Giải

Theo Bunhiacôpski ta có

$$\Big[\sum_{i=1}^{n} a_i (S - a_i)\Big]\Big[\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{S - a_i}\Big] \geq \Big[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big]^2$$

Mặt khác : $\sum_{i=1}^{n} a_i (S - a_i) = S . \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i^2$

$= \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq (1^2 + 1^2 + \dots + 1^2)(a_1^2 + \dots + a_n^2) - \sum_{i=1}^{n} a_i^2$

$= (n-1) \sum_{i=1}^{n} a_i^2$. Từ đó $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{S - a_i} \geq \frac{\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)^2}{(n-1)\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$

$\leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{S - a_i} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n-1}$

Mặt khác $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_1^2)}$

$\geq a_1a_2 = a_2a_3 + \dots + a_na_1 = 1$. **Vậy thì**

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{S - a_i} \geq \frac{\sum_{i-1}^{n} a_i^2}{n-1} \geq \frac{1}{n-1}$$

§3. BẤT ĐẲNG THỨC TRÊBUSÉP

1. Dạng Tổng quát

(1) Nếu $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \ldots a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n \end{cases}$ thì

Dạng 1 : $$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}$$

Dạng 2 : $n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n) \geq (a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)$

(2) Nếu $\begin{cases} a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n \end{cases}$ thì

Dạng 1 : $$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}$$

Dạng 2 : $n(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n) \leq (a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)$

Chứng minh : Xét hiệu Trêbusép

$$n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right) - \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_j\right)$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_ib_i + a_jb_j - a_ib_j - a_jb_i) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j)$$

Rõ ràng $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$ với điều kiện (1)

và $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \leq 0$ với điều kiện (2)

Từ đó → (đpcm)

2. Dạng cụ thể :

$n = 2$

a) Nếu $\begin{cases} a \geq c \\ b \geq d \end{cases} \vee \begin{cases} a \leq c \\ b \leq d \end{cases}$ thì

Dạng 1 : $\dfrac{ab + cd}{2} \geq \dfrac{a + c}{2} \cdot \dfrac{b + d}{2}$

Dạng 2 : $2(ab + cd) \geq (a + c)(b + d)$

b) Nếu $\begin{cases} a \geq c \\ b \leq d \end{cases} \vee \begin{cases} a \leq c \\ b \geq d \end{cases}$

Dạng 1 : $\dfrac{ab + cd}{2} \leq \dfrac{a + c}{2} \cdot \dfrac{b + d}{2}$

Dạng 2 : $2(ab + cd) \leq (a + c)(b + d)$

Chứng minh

Xét hiệu Trê bư Sép

$2(ab + cd) - (a + c)(b + d)$

$= (a - c)(b - d)$

Rõ ràng $(a - c)(b - d) \geq 0$

Nếu $\begin{cases} a \geq c \\ b \geq d \end{cases} \vee \begin{cases} a \leq c \\ b \leq d \end{cases}$

và $(a - c)(b - d) \leq 0$

Nếu $\begin{cases} a \geq c \\ b \leq d \end{cases} \vee \begin{cases} a \leq c \\ b \geq d \end{cases}$

Từ đó $\rightarrow$ (đpcm)

$n = 3$

a) Nếu $\begin{cases} a \geq c \geq e \\ b \geq d \geq f \end{cases} \vee \begin{cases} a \leq c \leq e \\ b \leq d \leq f \end{cases}$ thì

Dạng 1 : $\dfrac{ab+cd+ef}{3} \geq \dfrac{a+c+e}{3} \cdot \dfrac{b+d+f}{3}$

Dạng 2 : $3(ab+cd+ef) \geq (a+c+e)(b+d+f)$

b) Nếu $\begin{cases} a \geq c \geq e \\ b \leq d \leq f \end{cases} \vee \begin{cases} a \leq c \leq e \\ b \geq d \geq f \end{cases}$

Dạng 1 : $\dfrac{ab+cd+ef}{3} \leq \dfrac{a+c+e}{3} \cdot \dfrac{b+d+f}{3}$

Dạng 2 : $3(ab+cd+ef) \leq (a+c+e)(b+d+f)$

Chứng minh

Xét hiệu Trê bư Sép

$3(ab + cd + ef) - (a + c + e)(b + d + f) =$

$= (a - c)(b - d) + (c - e)(d - f) + (e - a)(f - b) \qquad (*)$

Rõ ràng biểu thức $(*) \geq 0$

Nếu $\begin{cases} a \geq c \geq e \\ b \geq d >= f \end{cases} \vee \begin{cases} a \leq c \leq e \\ b \leq d \leq f \end{cases}$

và biểu thức $(*) \leq 0$

Nếu $\begin{cases} a \geq c \geq e \\ b \leq d \leq f \end{cases} \vee \begin{cases} a \leq c \leq e \\ b \geq d \geq f \end{cases}$

Từ đó $\rightarrow$ (đpcm)

Chú ý : (1) Bất đẳng thức Trê bư Sép không được sử dụng trực tiếp (khi thi Đại học) mà phải chứng minh lại bằng cách xét hiệu Trêbusép.

(2) Bất đẳng thức Trê bư sép là BĐT cho dãy số sắp thứ tự, do đó nếu các số chưa sắp thứ tự thì ta phải giả sử có quan hệ thứ tự giữa các số.

3.1 (14 V b) : Cho a + b ⩾ 2. *CMR* $a^n + b^n \leqslant a^{n+1} + b^{n+1}$

Giải

Giả sử a ⩾ b. Theo (gt) $a + b \geqslant 2 > 0 \rightarrow a > -b$

Do đó $a \geqslant |b| \rightarrow a^n \geqslant |b|^n \geqslant b^n$. Như vậy $\begin{cases} a \geqslant b \\ a^n \geqslant b^n \end{cases}$

Xét hiệu :

$2(a^{n+1} + b^{n+1}) - (a+b)(a^n + b^n) = 2(a.a^n + b.b^n) - (a+b)(a^n + b^n)$

$= (a - b)(a^n - b^n) \geqslant 0$. Từ đó

$$a^{n+1} + b^{n+1} \geqslant \frac{a+b}{2}(a^n + b^n) \overset{(a+b) \geqslant 2)}{\geqslant} a^n + b^n$$

3.2 (7 V) : *CMR* : Nếu a + b ⩾ 0 thì

$$(a + b)(a^3 + b^3)(a^5 + b^5) \leqslant 4(a^9 + b^9)$$

Giải

Ta sẽ chứng minh $\begin{cases} \forall m, n \in N \\ a + b \geqslant 0 \end{cases}$ thì

$$\frac{a^m + b^m}{2} \cdot \frac{a^n + b^n}{2} \leqslant a^{m+n} + \frac{b^{m+n}}{2}$$

$\leftarrow 2(a^{m+n} + b^{m+n}) - (a^m + b^m)(a^n + b^n) = (a^m - b^m)(a^n - b^n) \geqslant 0$

Giả sử a ⩾ b. Ta có $a + b \geqslant 0 \rightarrow a \geqslant -b$. Từ đó $a \geqslant |b|$

suy ra $\begin{cases} a^m \geqslant |b|^m \geqslant b^m \\ a^n \geqslant |b|^n \geqslant b^n \end{cases} \rightarrow (a^m - b^m)(a^n - b^n) \geqslant 0$ (đpcm)

Áp dụng vào bài toán

$$(a + b)(a^3 + b^3)(a^5 + b^5) = 8 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3}{2} \cdot \frac{a^5 + b^5}{2}$$

$$\leqslant 8 \cdot \frac{a^4 + b^4}{2} \cdot \frac{a^5 + b^5}{2} \leqslant 8 \cdot \frac{a^9 + b^9}{2} = 4(a^9 + b^9)$$

3.3. CMR : Nếu a + b ⩾ 0 thì $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{2} \cdot \frac{a^3 + b^3}{2} \leqslant \frac{a^6 + b^6}{2}$

Bạn đọc tự giải

(Vô địch Ba Lan 1958 – 1959)

3.4. 18II.2 : CMR $(abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)} \leq a^a b^b c^c \ \forall \ a, b, c > 0$

Giải

BĐT $\leftrightarrow \ln(abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)} \leq \ln\ (a^a b^b c^c)$

$\leftrightarrow \frac{1}{3}(a + b + c)(\ln a + \ln b + \ln c) \leq a\ln a + b\ln b + c\ln c$

$\leftrightarrow (a + b + c)(\ln a + \ln b + \ln c) \leq 3(a\ln a + b\ln b + c\ln c)$

Xét hiệu : $3(a\ln a + b\ln b + c\ln c) - (a+b+c)(\ln a + \ln b + \ln c)$

$= (a-b)(\ln a - \ln b) + (b-c)(\ln b - \ln c) + (c-a)(\ln c - \ln a) \qquad (*)$

Giả sử $a \geq b \geq c > 0 \rightarrow \ln a \geq \ln b \geq \ln c \rightarrow (*) \geq 0$

Từ đó $\rightarrow$ (đpcm)

3.5. CMR : $(a_1a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)} \leq a_1^{a_1}a_2^{a_2} \ldots a_n^{a_n} \ \forall a_1 \ldots a_n > 0$

Bạn đọc tự giải

3.6 149 II.2 CMR $\dfrac{aA + bB + cC}{a + b + c} \geq \dfrac{\pi}{3} \ \forall \Delta ABC$

Giải

BĐT $\leftrightarrow \dfrac{aA + bB + cC}{a + b + c} \geq \dfrac{A + B + C}{3}$

$\leftrightarrow 3(aA + bB + cC) \geq (a + b + c)(A + B + C)$

Xét hiệu $3(aA + bB + cC) - (a + b + c)(A + B + C)$

$= (a - b)(A - B) + (b - c)(B - C) + (c - a)(C - A) \qquad (*)$

Giả sử $a \geq b \geq c \rightarrow A \geq B \geq C \rightarrow (*) \geq 0$

Từ đó $\rightarrow$ (đpcm)

3.7 136 II.1 – Bộ Đề 91

Cho ΔABC. *CMR* $\sum\limits_{A,B,C} \dfrac{A\sin A + B\sin B}{A + B} \geq \sum\limits_{A,B,C} \sin A$

Giải

$$\leftrightarrow 2R\left(\sum_{A,B,C} \frac{A\sin A + B\sin B}{A+B}\right) \geq 2R\left(\sum_{A,B,C} \sin A\right)$$

$$\leftrightarrow \sum_{a,b,c} \frac{Aa + Bb}{A + B} \geq \sum_{a,b,c} a = \sum_{a,b,c} \frac{a+b}{2}$$

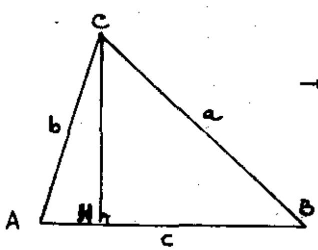
Ta có : $\sum\limits_{a,b,c} \dfrac{Aa + Bb}{A+B} - \sum\limits_{a,b,c} \dfrac{a+b}{2} = \sum\limits_{a,b,c} \left(\dfrac{Aa+Bb}{A+B} - \dfrac{a+b}{2}\right)$

$$= \sum_{a,b,c} \frac{2(Aa+Bb) - (A+B)(a+b)}{2(A+B)} = \sum_{a,b,c} \frac{(A-B)(a-b)}{2(A+B)}$$

Giả sử $a \geq b \geq c \rightarrow A \geq B \geq C \rightarrow \sum\limits_{a,b,c} \dfrac{(A-B)(a-b)}{2(A+B)} \geq 0$

Từ đó $\rightarrow$ (đpcm)

3.8. 27 II.2 : CMR : $a+b+c \geq 2(a\cos A + b\cos B + c\cos C)\ \forall\ \Delta ABC$



Ta có $c = a\cos B + b\cos A$ do đó BĐT

$$\rightarrow \sum_{a,b,c} (a\cos B + b\cos A) \geq \sum_{a,b,c} (a\cos A + b\cos B)$$

Xét hiệu

$$\sum_{a,b,c} (a\cos A + b\cos B) - \sum_{a,b,c} (a\cos B + b\cos A)$$

$$= \sum_{a,b,c} [a\cos A + b\cos B - a\cos B - b\cos A] = \sum_{a,b,c} (a-b)(\cos A - \cos B)$$

Giả sử $A \geq B \geq C \rightarrow \begin{cases} a \geq b \geq c \\ \cos A \leq \cos B \leq \cos C \end{cases} \rightarrow (*) \leq 0$

Từ đó $\rightarrow$ (đpcm)

3.9. CMR $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \leqslant \dfrac{tgA \,.\, tgB \,.\, tgC}{3}$ $\forall \Delta ABC$ nhọn

Giải

Dễ dàng chứng minh $tgA.tgB.tgC = tgA+tgB+tgC$

Do đó BĐT $\leftrightarrow 3(\sin A+\sin B+\sin C) \leqslant (\cos A+\cos B+\cos C)(tgA+tgB+tgC)$

$\leftrightarrow 3\,(\cos A.tgA + \cos B.tgB + \cos C.tgC) \leqslant$

$\leqslant (\cos A + \cos B + \cos C)(tgA + tgB + tgC)$

Xét hiệu

$$3(\cos A.tgA + \cos B.tgB + \cos C.tgC) -$$
$$- (\cos A+\cos B+\cos C)(tgA+tgB+tgC)$$

$= (\cos A - \cos B)(tgA - tgB) + (\cos B - \cos C)(tgB - tgC) +$
$+ (\cos C - \cos A)(tgC - tgA)$

Giả sử $A \geqslant B \geqslant C$. Vì ΔABC nhọn nên $\begin{cases} tgA \geqslant tg \geqslant tgC \\ \cos A \leqslant \cos B \leqslant \cos C \end{cases}$

Do đó hiệu nói trên $\leqslant 0$. Từ đó $\rightarrow$ (đpcm)

3.10. CMR : $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leqslant \sin A + \sin B + \sin C$ $\forall \Delta ABC$

Giải

Ta sẽ chứng minh

$$3(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C) \leqslant$$
$$\leqslant (\sin A + \sin B + \sin C)(\cos A + \cos B + \cos C)$$

Xét hiệu

$3(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C) -$
$- (\sin A + \sin B + \sin C)(\cos A + \cos B + \cos C)$

$= (\sin A - \sin B)(\cos A - \cos B) + (\sin B - \sin C)(\cos B - \cos C) +$
$+ (\sin C - \sin A)(\cos C - \cos A)$

Giả sử $A \geqslant B \geqslant C \rightarrow \begin{cases} \sin A \geqslant \sin B \geqslant \sin C \\ \cos A \leqslant \cos B \leqslant \cos C \end{cases} \rightarrow$ Hiệu $\leqslant 0 \rightarrow$ (đpcm)

Ta có :

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \frac{2}{3} \,.\, 3\,(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C)$$

$$\leq \frac{2}{3}(\cos A + \cos B + \cos C)(\sin A + \sin B + \sin C) \leq$$

$$\leq \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}(\sin A + \sin B + \sin C) = \sin A + \sin B + \sin C \text{ (đpcm)}$$

(ở đây ta đã sử dụng BĐT $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$)

3.11. 15III.2 : CMR

$$3\sum_{A,B,C} \sin A.\sin 2A \leq \sum_{A,B,C} \sin A.\sum_{A,b,C} \sin 2A \ \forall \Delta ABC$$

Giải

Xét các khả năng sau

1) *ΔABC nhọn* : Giả sử $A \geq B \geq C \to \begin{cases} \sin A \geq \sin B \geq \sin C \\ \sin 2A \leq \sin 2B \leq \sin 2C \end{cases}$

Ta có $3\sum_{A,B,C} \sin A.\sin 2A - \sum_{A,B,C} \sin A.\sum_{A,B,C} \sin 2A$

$$= \sum_{A,B,C} (\sin A - \sin B)(\sin 2A - \sin 2B) \leq 0 \to \text{(đpcm)}$$

2) ΔABC không nhọn : Giả sử $C \geq \frac{\pi}{2} \to A, B < \frac{\pi}{2}$

Khi đó $\begin{cases} \sin A < \sin C \\ \sin B < \sin C \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \sin A - \sin C < 0 \\ \sin B - \sin C < 0 \end{cases}$ (1). Mặt khác

$2\sin 2A - \sin 2B - \sin 2C = \sin 2A + (\sin 2A - \sin 2B - \sin 2C)$

$= \sin 2A - 4\sin A\cos B\cos C > 0$ (2)

$2\sin 2B - \sin 2C - \sin 2A = \sin 2B + (\sin 2B - \sin 2C - \sin 2A)$

$= \sin 2B - 4\sin B\cos A\cos C > 0$ (3)

Kết hợp (1), (2) và (3) ta có

$$3\sum_{A,B,C} \sin A.\sin 2A - \sum_{A,B,C} \sin A \sum_{A,B,C} \sin 2A =$$

$$= \sum_{A,3,C} (\sin A - \sin B)(\sin 2A - \sin 2B)$$

$$= (\sin A - \sin C)(2\sin 2A - \sin 2B - \sin 2C) +$$
$$+ (\sin B - \sin C)(2\sin 2B - \sin 2C - \sin 2A)$$
$$= (\sin A - \sin C)(\sin 2A - 4\sin A\cos B\cos C) +$$
$$+ (\sin B - \sin C)(\sin 2B - 4\sin B\cos A\cos C)$$
$$< 0 \rightarrow 3\sum_{A,B,C} \sin A . \sin 2A \leqslant \sum_{A,B,C} \sin A . \sum_{A,B,C} \sin 2A$$

Tóm lại ta luôn có BĐT luôn đúng $\forall \Delta ABC$.

§4. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG TAM THỨC BẬC 2

Có 8 kĩ thuật sử dụng tam thức bậc 2, ở đây xin trích 4 kĩ thuật thường được sử dụng.

1. Sơ đồ 1 : $A \geqslant B\ (\forall) \leftrightarrow A - B \geqslant 0$

Biến đổi $A - B = f(x) = ax^2 + bx + c \geqslant 0\ \forall x \leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leqslant 0 \end{cases}$

4.1. 2II.1 Cho ΔABC. *CMR* $1 + \frac{1}{2}x^2 \geqslant \cos A + x(\cos B + \cos C)\ \forall x$

Giải

$$\leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (\cos B + \cos C)x + 2\sin^2\frac{A}{2} \geqslant 0\ \forall x$$

Ta có :

$$\Delta = (\cos B + \cos C)^2 - 4\sin^2\frac{A}{2} = 4\cos^2\frac{B+C}{2}\cos^2\frac{B-C}{2} - 4\sin^2\frac{A}{2}$$
$$= 4\sin^2\frac{A}{2}\left(\cos^2\frac{B-C}{2} - 1\right) \leqslant 0$$

Do đó $\frac{1}{2}.f(x) \geqslant 0\ \forall x \leftrightarrow f(x) \geqslant 0\ \forall x \rightarrow$ (đpcm)

1.2 13.2III **Cho ΔABC.**

CMR : $pa^2 + qb^2 > pqc^2\ \forall p, q : p + q = 1$

Giải

BĐT $\leftrightarrow pa^2 + (1 - p)b^2 - p(1 - p)c^2 > 0\ \forall p$

$\leftrightarrow f(p) = (c^2)p^2 + (a^2 - b^2 - c^2)p + b^2 > 0\ \forall p$

Ta có $\Delta = (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 = [a^2 - (b+c)^2][a^2 - (b-c)^2] =$

$= (a - b - c)(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c) < 0$

Do đó $c^2.f(p) > 0\ \forall p \leftrightarrow f(p) > 0\ \forall p \rightarrow$ (đpcm)

1.3 23II.2 : CMR: $\forall x, y$ ta luôn có :

$x^2(1 + \sin^2 y) + 2x(\sin y + \cos y) + 2x(\sin y + \cos y) + 1 + \cos^2 y > 0$

Giải

BĐT $\leftrightarrow f(x) > 0\ \forall x\ (\forall y)$

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có $(\sin y + \cos y)^2 \leqslant (1 + \sin^2 y)(\cos^2 y + 1)$

Vì hệ $\begin{cases} \sin y = 1 \\ \cos y = 1 \end{cases}$ vô nghiệm nên dấu bằng không xảy ra

Do đó $\Delta' = (\sin y + \cos y)^2 - (1 + \sin^2 y)(\cos^2 y + 1) < 0$

Vậy $f(x) = x^2(1 + \sin^2 y) + 2x(\sin y + \cos y) + 1 + \cos^2 y > 0$ $\forall x\ (\forall y)$

15II.1 : CMR :

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geqslant a(b + c + d + e)\ \forall a, b, c, d, e$

Giải

BĐT $\leftrightarrow f(a) = a^2 - (b + c + d + e)a + (b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \leqslant 0$ $\forall a\ (\forall b, c, d, e)$

Theo BĐT Bunhiacôpski ta có

$(b + c + d + e)^2 \leqslant (1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)(b^2 + c^2 + d^2 + e^2)$

Do đó $\Delta = (b + c + d + e)^2 - 4(b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \leqslant 0$

suy ra $f(a) \geqslant 0\ \forall a\ (\forall b, c, d, e) \rightarrow$ (đpcm)

140III.1 : Cho cấp số cộng ÷ a, b, c, d và $2m \geq |ad - bc|$

CMR : $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) + m^2 \geq 0\ \forall x$ (1)

Giải

$VT = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) + m^2 =$

$= (x^2 - (a + d)x + ad)[x^2 - (b + c)x + bc] + m^2$

Đặt $t = x^2 - (b + c)x + bc$. Vì $b + c = a + d$ nên

$VT\ (1) = f(t) = [t + (ad - bc)]t + m^2$

$\leftrightarrow f(t) = t^2 + (ad - bc)t + m^2$

Ta có $\Delta = (ad - bc)^2 - 4m^2 \leq 0$ (theo gt) $\rightarrow f(t) \geq 0 \rightarrow$ (đpcm)

83II.2 : *CMR* : $19x^2 + 54y^2 + 16z^2 - 16xz - 24y + 36xy \geq 0$ $\forall x, y, z$

Giải

Đặt $f(x) = 19x^2 - 2(8z - 18y)x + 54y^2 + 16z^2 - 24y$

Ta có $\Delta'x = g(y) = -702y^2 + 168y - 240z^2$

$g(y)$ có $\Delta'y = (84z)^2 - 702.240z^2 = -161424z^2 \leq 0$

$\Rightarrow \Delta'x = g(y) \leq 0 \rightarrow f(x) \geq 0\ \forall x, y, z$

Tức là $19x^2 + 54y^2 + 16z^2 - 16xz - 24yz + 36xy \geq 0\ \forall x, y, z$

2. Sơ đồ 2 $A \geq B \leftrightarrow A - B = \left[\begin{array}{l} b^2 - 4ac \\ b'^2 - ac \end{array}\right. \geq 0$

Đặt $f(x) = ax^2 + bx = c$ và chứng minh $f(x)$ có nghiệm theo tiêu chuẩn $af(\alpha) \leq 0$ hoặc $f(\alpha)f(\beta) \leq 0$

2.1 : *53III.2* Cho $p^2 + q^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 > 0$.

CMR : $(p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \leq (pq - ac - bd)^2$

Giải

BĐT $\leftrightarrow \Delta' = (pq-ac-bd)^2 - (p^2-a^2-b^2)(q^2-c^2-d^2) \geq 0$

Theo (gt) $\rightarrow (p^2 - a^2 - b^2) + (q^2 - c^2 - d^2) > 0 \rightarrow \exists$ 1 biểu thức chẳng hạn $p^2 - a^2 - b^2 > 0$.

Xét $f(x) = (p^2 - a^2 - b^2)x^2 - 2(pq - ac - bd)x + (q^2 - c^2 - d^2)$

$\leftrightarrow f(x) = (px - q)^2 - (ax - c)^2 - (bx - d)^2$

$\rightarrow f\left(\frac{q}{p}\right) = -\left[\left(\frac{aq}{p} - c\right)^2 + \left(\frac{bq}{p} - d\right)^2\right] \leq 0$

$(p^2 - a^2 - b^2)f\left(\frac{q}{p}\right) \leq 0 \rightarrow f(x)$ có nghiệm

Do đó $\Delta' = (pq - ac - bd)^2 - (p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \geq 0$

$\leftrightarrow (p^2 - a^2 - b^2)(q^2 - c^2 - d^2) \leq (pq - ac - bd)^2$

2.2 : Cho $a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_n^2 > 0$. *CMR*

$(a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \ldots - b_n^2) \leq (a_1b_1 - a_2b_2 - \ldots - a_nb_n)^2$ (BĐT Azcela)

Bạn đọc tự giải tương tự với cách giải trên

2.3 : *CMR* :

$(1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \geq 4(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)\ \forall a_i \in [0, 1]$

Giải

$\leftrightarrow \Delta = (1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \geq 0$

Đặt $f(x) = x^2 - (1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)x + (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$

Ta có $f(1) = \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 - a_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i - 1) \leq 0\ \forall a_i \in [0, 1]$

$\leftrightarrow f(x)$ có nghiệm

$\rightarrow \Delta = (1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) \geq 0$

$\rightarrow (1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \geq 4(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)$

2.4 : Cho $\begin{cases} 0 < a \leq a_1, a_2, \ldots, a_n \leq A \\ 0 < b \leq b_1, b_2, \ldots, b_n \leq B \end{cases}$

CMR $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2$

Nhân cả 2 vế với (ABab) > 0 rồi chuyển vế ta có

$$\text{BĐT} \leftrightarrow (AB + ab)^2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4\left(AB\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(ab\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq 0$$

Xét $f(x) = \left[AB\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]X^2 - (AB + ab)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)X + \left(ab\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$

Đặt $f_i(x) = (ABa_i^2)X^2 - [(AB + ab)a_i b_i]X + (ab \cdot b_i^2)$

suy ra $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$

Mặt khác $f_i(x) = (ABa_iX - abb_i)(a_iX - b_i)$

$$\rightarrow f_i\left(\frac{b}{A}\right) = \frac{b}{A}(Ba_i - ab_i)(ba_i - Ab_i) \leq 0$$

Do đó $f\left(\frac{b}{A}\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i\left(\frac{b}{A}\right) \leq 0$. Từ đó $\rightarrow f(x)$ có nghiệm

$\rightarrow \Delta \geq 0 \rightarrow$ (đpcm)

3. Sơ đồ 3 : Định lí Viét

125III.1 : Cho (x, y, z) là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8 \\ xy + yz + zx = 4 \end{cases}$$

CMR : $-\frac{8}{3} \leq x, y, z \leq \frac{8}{3}$

Giải

Hệ phương trình $\leftrightarrow \begin{cases} (x + y + z)^2 = 16 \\ xy + yz + zx = 4 \end{cases}$

Đặt $t = x + y + z \rightarrow |t| = 4$

Ta có $\begin{cases} y + z = t - x \\ yz = 4 - x(y + z) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y + z = t - x \\ yz = x^2 - tx + 4 \end{cases}$

Cách 1 : Theo định lí Viét thì y, z là nghiệm của phương trình

$$u^2 - (t - x)u + (x^2 - tx + 4) = 0$$

Vì y, z luôn ∃ → phương trình luôn có nghiệm, do đó

$\Delta = (t-x)^2 - 4(x^2 - tx + 4) \geq 0 \leftrightarrow \boxed{3x^2 - 2tx + (16 - t^2) \leq 0}$

Cách 2 : Ta có $(y + z)^2 \geq 4yz$ nên $(t - x)^2 \geq 4(x^2 - tx + 4)$

$\boxed{\leftrightarrow 3x^2 - 2tx + (16 - t^2) \leq 0}$

Mà $|t| = 4 \to t^2 = 6$ nên ta có $3x^2 - 2tx \leq 0$

$$\leftrightarrow x(3x - 2t) \leq 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{8}{3} \leq x \leq 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{8}{3} \end{array}\right. \leftrightarrow \boxed{-\frac{8}{3} \leq x \leq \frac{8}{3}}$$

Tương tự $-\frac{8}{3} \leq y, z \leq \frac{8}{3} \to -\frac{8}{3} \leq x, y, z \leq \frac{8}{3}$

3.2 : Cho (x, y, z) là nghiệm của hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$

CMR : $-\frac{4}{3} \leq x, y, z \leq \frac{4}{3}$

3.3 : Cho (x, y, z) là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y + z = a \\ xy + yz + zx = a \end{cases}$

CMR : $\frac{a - 2\sqrt{a^2 - 3b}}{3} \leq x, y, z \leq \frac{a + 2\sqrt{a^2 - 3b}}{3}$

4. Sơ đồ 4 : Phương pháp miền giá trị

70I : Tìm miền giá trị của $y = \frac{2x - 1}{x^2 + x + 4}$

Giải

$y_o \in MGT \to y_o x^2 + (y_o - 2)x + 4y_o + 1 = 0$ (*)

Nếu $y_o = 0$ thì $x = \frac{1}{2}$

Nếu $y_o \neq 0$ thì để pt (*) có nghiệm ta có

$$0 \leqslant \Delta = 15y_o^2 - 8y_o + 4 \leftrightarrow \frac{-4+2\sqrt{19}}{15} \leqslant y_o \leqslant \frac{-4-2\sqrt{19}}{15}$$

Từ đó $\rightarrow$ MGT là $\left[\frac{-4-2\sqrt{19}}{15}, \frac{-4+2\sqrt{19}}{15}\right]$

109II.1 : Cho $y = \dfrac{x^2\cos\alpha - 2x + \cos\alpha}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$ với $\alpha \in (o, \pi)$

CMR : $\forall x$ ta có $-1 \leqslant y \leqslant 1$

Giải

$y_o \in$ MGT $\leftrightarrow (y_o - \cos\alpha)x^2 - 2(y_o\cos\alpha - 1)x + y_o - \cos\alpha = 0$

Nếu $y_o = \cos\alpha \rightarrow x = 0$

Nếu $y_o \neq \cos\alpha \rightarrow 0 \leqslant \Delta' = -\sin^2\alpha(y^2 - 1) \leftrightarrow -1 \leqslant y \leqslant 1$

115III.1 Tìm Max $y = \left[\dfrac{12x(x-a)}{x^2+36}\right]^{3/4}$

Giải

Đặt $t = \dfrac{12x(x-a)}{x^2+36} \rightarrow (12 - t)x^2 - 12ax - 36t = 0$ có nghiệm

$\leftrightarrow 0 \leqslant \Delta' = 36a^2 + 36t(12 - t)$

$\leftrightarrow 6 - \sqrt{36+a^2} \leqslant t \leqslant 6 + \sqrt{36+a^2}$

Từ đó suy ra Max $y = \left[6 + \sqrt{36+a^2}\right]^{3/4}$

75II.2 : Tìm a, b để $y = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$ đạt Max bằng 4, Min bằng -1

Giải

$$y_o \in \text{MGT} \leftrightarrow y_o x^2 - ax + y_o - b = 0 \qquad (1)$$

Nếu $y_o = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = 0 \\ a \neq 0,\ x = -\dfrac{b}{a} \end{array}\right.$

Nếu $y_o \neq 0 \rightarrow$ phương trình (1) phải có nghiệm. Khi đó

$$0 \leqslant \Delta = -4y_o^2 + 4by_o + a^2$$

Để Max y = 4 và Min y = −1 ta phải có

phương trình $-4y_0^2 + 4by_0 + a^2 = 0$ có 2 nghiệm (−1) và 4

Khi đó $a = \pm 4$ và $b = 3$

32 IV.a : Cho phương trình :

$$x^2 + (2a - 6)x + a - 13 = 0 \quad (1 \le a < +\infty)$$

Tìm a để nghiệm lớn của phương trình nhận giá trị max

Giải

Phương trình $\leftrightarrow a(2x + 1) = -x^2 + 6x + 13$

Gọi x_0 là 1 nghiệm $\rightarrow a = \dfrac{-x_0^2 + 6x_0 + 13}{2x_0 + 1} \ge 1$

$$\rightarrow a = \frac{-x_0^2 - 4x_0 - 12}{2x_0 + 1} \le 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 \le -2 \\ -\dfrac{1}{2} < x_0 \le 6 \end{array}\right.$$

Do đó $\text{Max}(x_0) = 6 \rightarrow a = \dfrac{-6^2 + 6.6 + 13}{2.6 + 1} = 1$

§5. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA VÀ BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

5.1 15II.2 : CMR :

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \ge a(b + c + d + e)$ $\forall a, b, c, d, e$

Giải

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b + c + d + e)$

$$= \sum_{b,c,d,e}\left(\frac{a^2}{4} - ab + b^2\right) = \sum_{b,c,d,e}\left(\frac{a}{2} - b\right)^2 \ge 0 \rightarrow \text{(đpcm)}$$

5.2. *2III.2* : Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

CMR $abc + 2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) \geq 0$

Giải

Ta có $abc + 2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) =$

$= (1+a)(1+b)(1+c) + a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c + ab + bc + ca$

$$= (1 + a)(1 + b)(1 + c) + \frac{(1 + a + b + c)^2}{2} \geq 0$$

(Ở đây ta đã sử dụng giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ để suy ra $a^2, b^2, c^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq a, b, c \Rightarrow 1 + a, 1 + b, 1 + c \geq 0$)

5.3. *1061I.2* Cho $a, b, c \in [0, 1]$.

CMR : $a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + a^2b + b^2c + c^2a$

Giải

Vì $a, b, c \in [0, 1]$ nên $0 \leq a^2 \leq a \leq 1$, $0 \leq b^2 \leq b \leq 1$,

$0 \leq c^2 \leq c \leq 1$. Do đó ta có

$0 \leq (1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2) =$

$= 1 - (a^2 + b^2 + c^2) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2c^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq$

$\leq 1 + a^2b + b^2c + c^2a$ (đpcm)

5.4. *128I.2* Cho $a, b, c \in [0, 2]$ và $a + b + c = 3$.

CMR : $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$

Giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = 1 + \alpha \\ b = 1 + \beta \\ c = 1 + \gamma \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha, \beta, \gamma \in [-1, 1] \end{cases} \text{BĐT} \leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \leq 2$$

Trong 3 số α, β, γ luôn $\exists$ 2 số hoặc cùng ≥ 0 hoặc cùng ≤ 0, giả sử 2 số đó là α, β. Khi đó

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta + \gamma^2 = (\alpha + \beta)^2 + \gamma^2 = 2\gamma^2 \leq 2$$

5.5. ***112II.2*** : ΔABC có $a < b < c$.

CMR : $a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) < 0$

Giải

$$a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2) =$$

$= a^3(b^2 - c^2) - a^2(b^3 - c^3) + b^2c^2(b - c)$

$= (b - c)[a^3(b + c) - a^2(b^2 + bc + c^2) + b^2c^2]$

$= (b - c)[a^2b(a - b) + a^2c(a - b) - c^2(a^2 - b^2)]$

$= (b - c)(a - b)[a^2b + a^2c - c^2(a + b)]$

$= (b - c)(a - b)(a - c)(ab + bc + ca) < 0$ (Vì $0 < a < b < c$)

5.6. ***136II.1*** : ΔABC.

CMR : $a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a + b)^2 > a^3 + b^3 + c^3$

Giải

$a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a + b)^2 - (a^3 + b^3 + c^3)$

$= a[(b - c)^2 - a^2] + b[(c - a)^2 - b^2] + c[(a + b)^2 - c^2]$

$= (b - c + a)[a(b - c - a) - b(c - a + b) + c(a + b + c)]$

$= (b - c + a)[c^2 - (a - b)^2]$

$= (b - c + a)(c + a - b)(c - a + b) > 0$. Do đó

$a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a + b)^2 > a^3 + b^3 + c^3$

5.7. ***130II.2*** ΔABC. CMR $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

Giải

$$2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2) =$$

$= (bc + ca - c^2) = (ca + ab - a^2) + (ab + bc - b^2)$

$= c(a + b - c) + a(b + c - a) + b(c + a - b) > 0$

Do đó $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

5.8. ***17III.2*** : ΔABC có $a \leq b \leq c$. CMR : $(a + b + c)^2 \leq 9bc$

Giải

Ta có $(a + b + c)^2 \leq (b + b + c)^2 = (2b + c)^2$

Ta sẽ chứng minh $(2b + c)^2 \leq 9bc \leftrightarrow (2b + c)^2 - 8bc \leq bc$

$\leftrightarrow (2b - c)^2 \leq bc$. Ta có $\begin{cases} 2b - c \leq b \leftrightarrow b \leq c \\ 2b - c \leq c \leftrightarrow b \leq c \end{cases}$ Đúng

Do đó $(2b - c)^2 \leq bc$. Từ đó $(a + b + c)^2 \leq 9bc$

5.9. ***92III*** : ΔABC có $A \geq B \geq C$.

CMR : $\dfrac{h_a}{h_b} + \dfrac{h_b}{h_c} + \dfrac{h_c}{h_a} \geq \dfrac{h_b}{h_a} + \dfrac{h_c}{h_b} + \dfrac{h_a}{h_c}$

Giải

$\leftrightarrow \dfrac{2S/a}{2S/b} + \dfrac{2S/b}{2S/c} + \dfrac{2S/c}{2S/a} \geq \dfrac{2S/b}{2S/a} + \dfrac{2S/c}{2S/b} + \dfrac{2S/a}{2S/c}$

$\leftrightarrow \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c} \geq \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$

$\leftrightarrow b^2c + c^2a + a^2b \geq a^2c + b^2a + c^2b$

$\leftrightarrow b^2(c - a) + ca(c - a) - b(c^2 - a^2) \geq 0$

$\leftrightarrow (c - a)[b^2 + ca - b(c + a)] \geq 0$

$\leftrightarrow (c - a)(b - c)(b - a) \geq 0$

Theo (gt) $A \geq B \geq C \leftrightarrow a \geq b \geq c \rightarrow \begin{cases} c - a \leq 0 \\ b - a \leq 0 \\ b - c \geq 0 \end{cases}$

Do đó $(c - a)(b - c)(b - a) \geq 0 \rightarrow$ (đpcm)

5.10 ***(140III.2)*** ΔABC (a, b, c). *CMR* : $\left| \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} - \dfrac{a}{c} - \dfrac{c}{b} - \dfrac{b}{a} \right| < 1$

Giải

Biến đổi tương tự như bài trên ta có

$$\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{a}{c} - \frac{c}{b} - \frac{b}{a} \right| = \left| \frac{(a - c)(c - b)(a - b)}{abc} \right|$$

$$= \frac{|b - c| \cdot |c - a| \cdot |a - b|}{abc} < \frac{a \cdot b \cdot c}{abc} = 1 \text{ (đpcm)}$$

22II.2. ΔABC (a, b, c) diện tích bằng 1. *CMR* : $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16$.

81III.3 : ΔABC diện tích S. Tìm số thực p nhỏ nhất thỏa mãn

$$S^2 \leq p(a^4 + b^4 + c^4)$$

Giải

Ta sẽ chứng minh $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$. Thật vậy

$$16S^2 = 16p(p - a)(p - b)(p - c) =$$

$$= (b + c + a)(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)$$

$$= [(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2] \leq [(1^2 + 1^2)(b^2 + c^2) - a^2]a^2$$

$$= [2b^2 + 2c^2 - a^2]a^2 = 2b^2a^2 + 2c^2a^2 - a^4 \leq$$

$$\leq (b^4 + a^4) + (c^4 + a^4) - a^4 = a^4 + b^4 + c^4$$

Vậy $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$

Áp dụng : 22II.2 : Vì $S = 1 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq 16$

81III.3 : Ta có $S^2 \leq \dfrac{1}{16}(a^4 + b^4 + c^4)$

Dấu bằng xảy ra $\leftrightarrow a = b = c$. Vậy Min $p = \dfrac{1}{16}$

5.11. **136III.2** : *CMR* : Nếu $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ thì $-\dfrac{1}{2} \overset{(1)}{\leq} xy + yz + zx \overset{(2)}{\leq} 1$

Giải

$(1) \leftrightarrow -(x^2 + y^2 + z^2) \leq 2(xy + yz + zx)$

$\leftrightarrow 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2$ Đúng $\rightarrow$ (đpcm)

$(2) \leftrightarrow xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2$

$\leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) \geq 0$

$$\leftrightarrow \frac{[x^2 + y^2 - 2xy] + [y^2 + z^2 - 2yz] + [z^2 + x^2 - 2zx]}{2} \geq 0$$

$\leftrightarrow \dfrac{1}{2}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] \geq 0$ Đúng $\rightarrow$ (đpcm)

5.12. *77V (Bộ đề 91): Cho a + b + c ≠ 0. CMR:* $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a+b+c} \geq 0$

Giải

Ta có $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b)^3 + c^3 - 3a^2b - 3ab^2 - 3abc =$

$= [(a+b)+c][(a+b)^2 - (a+b)c + c^2] - 3ab(a+b+c)$

$= [a+b+c][a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca]$

$= \dfrac{a+b+c}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

Do đó: $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a+b+c} = \dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2} \geq 0$ **(đpcm)**

5.13. *127H* **Cho a, b, c > 0 thỏa mãn** $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{b}$

CMR $\dfrac{a+b}{2a-b}+\dfrac{c+b}{2c-b} \geq 4$

Giải

Từ giả thiết $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{b} \Rightarrow b=\dfrac{2ac}{a+c}$

Do đó $\dfrac{a+b}{2a-b}=\dfrac{a+3c}{2a}$; $\dfrac{c+b}{2c-b}=\dfrac{c+3a}{2c}$. **Vì vậy**

$$\dfrac{a+b}{2a-b}+\dfrac{c+b}{2c-b}=\dfrac{a+3c}{2a}+\dfrac{c+3a}{2c}=\dfrac{2ac+3(a^2+c^2)}{2ac}$$

$$\geq \dfrac{2ac+6ac}{2ac}=\dfrac{8ac}{2ac}=4 \text{ (đpcm)}$$

5.14. *128U.2* **[Bộ đề 91]. Cho** $a \geq b > 0$ **và** $c \geq \sqrt{ab}$

CMR: $\dfrac{c+a}{\sqrt{c^2+a^2}} \geq \dfrac{c+b}{\sqrt{c^2+b^2}}$

Giải

BĐT $\Leftrightarrow \dfrac{(c+a)^2}{c^2+a^2} \geq \dfrac{(c+b)^2}{c^2+b^2} \Leftrightarrow 1+\dfrac{2ca}{c^2+a^2} \geq 1+\dfrac{2cb}{c^2+b^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a}{c^2+a^2} \geq \dfrac{b}{c^2+b^2} \Leftrightarrow a(c^2+b^2)-b(c^2+a^2) \geq 0$

$\leftrightarrow c^2(a - b) - ab(a - b) \geqslant 0 \leftrightarrow (a - b)(c^2 - ab) \geqslant 0$

Theo giả thiết $a > b > 0$ và $c \geqslant \sqrt{ab} \rightarrow \begin{cases} a - b > 0 \\ c^2 - ab \geqslant 0 \end{cases}$

Do đó $(a - b)(c^2 - ab) \geqslant 0$. Từ đó $\Rightarrow$ (đpcm)

CÂU CHUYỆN VỀ LỜI GIẢI NGẮN NHẤT TRONG CÁC KÌ THI TOÁN QUỐC TẾ

5.15 : Cho ΔABC (a, b, c).

CMR : $a^2b(a - b) + b^2c(b - c) + c^2a(c - a) \geqslant 0$

(Bài 6 – 6 điểm – Mỹ đề nghị – VĐTQT 1983 tại Pháp)

Nhận xét về kết quả thi. Chủ tịch hội đồng giám khảo người Pháp đã có nhận xét mang nhiều ý nghĩa : "Cả 6 bài thi giải bài toán số 6 của 6 học sinh Mỹ đều giống nhau và giống đáp án 1 cách kì lạ". Thật ra bài toán và Đáp án của Mỹ đều rất hay. Đáp án của Mỹ dựa vào nhận xét về quan hệ hình học trong Δ để suy ra phép đổi biến số trong Đại số.

Cụ thể là trong Δ luôn có vòng tròn nội tiếp do đó luôn $\exists x, y, z > 0$ để $a = x + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ (Xem thêm phần Bunhiacôpaki).

Điều hấp dẫn trong kỳ thi này là 1 học sinh 14 tuổi của CHLB Đức đã đoạt giải nhất tối đa 42/42 và đoạt giải đặc biệt nhờ lời giải độc đáo bài số 6: "Ngắn nhất trong các kỳ thi Toán Quốc Tế" cụ thể là:

Giả sử $a = \max(a, b, c)$ khi đó biến đổi vế trái ta được

$$a(b + c - a)(b - c)^2 + b(a - b)(a - c)(a + b - c) \geqslant 0$$

Lời giải này làm ta nhớ đến câu chuyện ngụ ngôn :

Một người triệu phú hỏi mua tranh và người bán tranh đã nói giá của bức tranh là một triệu đôla. Người triệu phú bèn hỏi ông vẽ bức tranh này mất bao nhiêu thời gian thì người bán tranh nói tôi vẽ trong 1 tuần. Người mua tranh bèn chê tranh đắt quá, còn người họa sĩ thì mỉm cười và nói rằng : "Thưa ông, nhưng để vẽ được bức tranh này trong 1 tuần thì tôi đã phải suy nghĩ mất ba năm".

§6. QUY NẠP CÔSI

Để chứng minh đề (BĐT) đúng với n = 3 ta chứng minh theo các bước :

Bước 1 : Chứng minh cho n = 2

Bước 2 : Sử dụng kết quả cho n = 2 để chứng minh cho n = 3

Bước 3 : Sử dụng kết quả cho n = 4 để chứng minh cho n = 3 bằng cách biểu diễn 1 biến số theo 3 biến số còn lại.

6.1. [120II] CMR : Nếu $0 \le x, y, z \le \pi$ thì

1) a) $\dfrac{\sin x + \sin y}{2} \le \sin\dfrac{x+y}{2}$ b) $\dfrac{\sin x + \sin y + \sin z}{3} \le \sin\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)$

2) Sử dụng kết quả trên để chứng minh

a) $(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 - \cos C) \le \dfrac{1}{8}$

b) $(1 - \sin A)(1 - \sin B)(1 - \sin C) \le \left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ $\forall$ ΔABC không tù

Giải

1) a) $\dfrac{\sin x + \sin y}{2} = \sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} \le \sin\dfrac{x+y}{2}$

b) Với $t \in [0, \pi]$ thì :

$$\frac{\sin x + \sin y + \sin z + \sin t}{4} = \frac{\dfrac{\sin x + \sin y}{2} + \dfrac{\sin z + \sin t}{2}}{2}$$

$$\le \frac{\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{z+t}{2}\right)}{2} \le \sin\left(\frac{\dfrac{x+y}{2} + \dfrac{z+t}{2}}{2}\right) = \sin\frac{x+y+z+t}{4}$$

Chọn $t = \dfrac{x+y+z}{3} \in [0, \pi]$ $\forall$ $x, y, z \in [0, \pi]$. Khi đó

$$\sin x + \sin y + \sin z + \sin\frac{x+y+z}{3} \leq 4\sin\frac{x+y+z+\frac{x+y+z}{3}}{4} =$$

$$= 4\sin\frac{x+y+z}{3} \leftrightarrow \frac{\sin x + \sin y + \sin z}{3} \leq \sin\frac{x+y+z}{3}$$

2) a) $(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) = 8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}$

Áp dụng BĐT Côsi và BĐT ở phần 1 ta có

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \left[\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{3}\right]^3 \leq \left[\sin\frac{A+B+C}{6}\right]^3 = \frac{1}{8}$$

Từ đó $8\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} \leq 8\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{8}$

b) Theo giả thiết ΔABC không tù $\Rightarrow A, B, C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

Đặt $\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{B}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{4} - \frac{C}{2}$

suy ra $\alpha, \beta, \gamma \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$ và $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$. Khi đó

$(1-\sin A)(1-\sin B)(1-\sin C) =$

$$= \left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\right]\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)\right]\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)\right]$$

$$8\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{2}\right) = 8\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$$

Áp dụng BĐT Côsi và BĐT ở phần 1 ta có

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leq \left[\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right]^3 \leq \left[\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right]^3 = \sin^3\frac{\pi}{12}$$

Từ đó $(1-\sin A)(1-\sin B)(1-\sin C) = 8\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma \leq$

$$= 8\sin^6\frac{\pi}{12} = \left(2\sin^2\frac{\pi}{12}\right)^3 = \left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)^3 = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

Sử dụng phương pháp tương tự ta có thể chứng minh các BĐT.

6.2 : *CMR* : $\forall\Delta ABC$ ta luôn có

a) $\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \dfrac{3}{2}$

c) $tg\dfrac{A}{2} + tg\dfrac{B}{2} + tg\dfrac{C}{2} \geqslant \sqrt{3}$

d) $cotgA + cotgB + cotgC \geqslant \sqrt{3}$

6.3 *110H* 1) Cho $ab \geqslant 1$. *CMR* : $\dfrac{1}{1+a^2} + \dfrac{1}{1+b^2} \geqslant \dfrac{2}{1+ab}$

2) Cho $a, b, c \geqslant 1$. *CMR* $\dfrac{1}{1+a^3} + \dfrac{1}{1+b^3} + \dfrac{1}{1+c^3} \geqslant \dfrac{3}{1+abc}$

Giải

1) BĐT $\leftrightarrow [(1+a^2) + (1+b^2)](ab+1) \geqslant 2(1+a^2+b^2+a^2b^2)$

$\leftrightarrow [(1+a^2) + (1+b^2)](ab-1) \geqslant 2(1+a^2+b^2+a^2b^2) - 2[(1+a^2) + (1+b^2)]$

$\leftrightarrow [(1+a^2) + (1+b^2)](ab-1) \geqslant 2(a^2b^2-1) = 2(ab+1)(ab-1)$

$\leftrightarrow (ab-1)(a^2+b^2-2ab) = (ab-1)(a-b)^2 \geqslant 0$ đúng $\rightarrow$ (đpcm)

2) Với $d \geqslant 1$ ta có $\dfrac{1}{1+a^3} + \dfrac{1}{1+b^3} + \dfrac{1}{1+c^3} + \dfrac{1}{1+d^3} \geqslant$

$\geqslant \dfrac{2}{1+\sqrt{a^3b^3}} + \dfrac{2}{1+\sqrt{c^3d^3}} = 2\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{a^3b^3}} + \dfrac{1}{1+\sqrt{c^3d^3}}\right)$

$\geqslant 2\dfrac{2}{1+\sqrt[4]{a^3b^3c^3d^3}} = \dfrac{4}{1+\sqrt[4]{a^3b^3c^3d^3}}$

Chọn $d = \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc$. Khi đó ta có

$\dfrac{1}{1+a^3} + \dfrac{1}{1+b^3} + \dfrac{1}{1+c^3} + \dfrac{1}{1+abc} \geqslant \dfrac{4}{1+\sqrt[4]{a^4b^4c^4}} = \dfrac{4}{1+abc}$

$\leftrightarrow \dfrac{1}{1+a^3} + \dfrac{1}{1+b^3} + \dfrac{1}{1+c^3} \geqslant \dfrac{3}{1+abc}$

6.4. 116III2 : CMR : Nếu $x + y \geq 0$ ta có $\dfrac{1}{1+4^x} + \dfrac{1}{1+4^y} \geq \dfrac{2}{1+2^{x+y}}$

Giải

Đặt $a = 2^x$, $b = 2^y \to ab = 2^{x+y} \geq 1$

Do đó theo 110.II 1 thì :

$$\frac{1}{1+4^x} + \frac{1}{1+4^y} = \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab} = \frac{2}{1+2^{x+y}}$$

6.5 Cho $a_1, a_2, \dots a_n \geq 1$.

CMR : $\dfrac{1}{1+a_1} + \dfrac{1}{1+a_2} + \dots + \dfrac{1}{1+a_n} \geq \dfrac{n}{1+\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n}}$

Giải

Ta sẽ chứng minh BĐT bằng phương pháp Qui Nạp Cô Si tổng quát

n = 2 : Dễ dàng chứng minh

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} \geq \frac{2}{1+\sqrt{a_1a_2}} \quad \forall\, a_1, a_2 \geq 1$$

Giả sử BĐT đúng với $n = k$. Ta sẽ chứng minh BĐT cũng đúng với $n = 2k$

Sử dụng kết quả BĐT đúng với $n = k$ và với $n = 2$ ta có

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_{2k}} = \left(\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_k}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{1+a_{k+1}} + \frac{1}{1+a_{k+2}} + \dots + \frac{1}{1+a_{2k}}\right)$$

$$\geq \frac{k}{1+\sqrt[k]{a_1a_2\dots a_k}} + \frac{k}{1+\sqrt[k]{a_{k+1}\dots a_{2k}}} =$$

$$= k\left(\frac{1}{1+\sqrt[k]{a_1\dots a_k}} + \frac{1}{1+\sqrt[k]{a_{k+1}\dots a_{2k}}}\right)$$

$$\geq k\,\frac{2}{1+\sqrt{\sqrt[k]{a_1\dots a_k}\cdot\sqrt[k]{a_{k+1}a_{k+2}\dots a_{2k}}}} = \frac{2k}{1+\sqrt[2k]{a_1a_2\dots a_{2k}}} \quad \text{(đpcm)}$$

Giả sử BĐT đúng với $n = h$. Ta sẽ chứng minh BĐT đúng với $n = h - 1$

Ta có $\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_h} \geq \frac{h}{1 + \sqrt[h]{a_1a_2\dots a_h}}$.

Chọn $a_h = \sqrt[h-1]{a_1a_2\dots a_{h-1}}$. Khi đó

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_{h-1}} + \frac{1}{1 + \sqrt[h-1]{a_1a_2\dots a_{h-1}}}$$

$$\geq \frac{h}{1 + \sqrt[h-1]{a_1a_2\dots a_{h-1}}}$$

$$\leftrightarrow \frac{1}{1+a_1} + \dots + \frac{1}{1+a_{h-1}} \geq \frac{h-1}{1 + \sqrt[h-1]{a_1a_2\dots a_{h-1}}} \text{ (đpcm)}$$

Rõ ràng theo nguyên lý qui nạp thì BĐT đã cho đúng $\forall n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$

6.6 CMR : $\frac{a_1a_2a_3}{(a_1+a_2+a_3)^2} \leq \frac{(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)}{(3-a_1-a_2-a_3)^2}$ $\forall 0 \leq a_1, a_2, a_3 \leq \frac{1}{2}$

Giải

Bước 1 : $n = 2$: Ta phải chứng minh (Bạn đọc tự chứng minh)

$$\frac{a_1a_2}{(a_1+a_2)^2} \leq \frac{(1-a_1)(1-a_2)}{(2-a_1-a_2)^2} \quad \forall\, 0 \leq a_1, a_2 \leq \frac{1}{2}$$

Bước 2 : $n = 4$. Ta phải chứng minh $\forall\, 0 \leq a_1, a_2, a_3, a_4 \leq \frac{1}{2}$ thì

$$\frac{a_1a_2a_3a_4}{(a_1+a_2+a_3+a_4)^4} \leq \frac{(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)}{(4-a_1-a_2-a_3-a_4)^4}$$

Sử dụng với $n = 2$ ta có $\sqrt{\frac{a_1a_2}{(1-a_1)(1-a_2)}} \leq \frac{a_1+a_2}{(2-a_1-a_2)}$

$\forall 0 \leq a_1, a_2 \leq \frac{1}{2}$.

suy ra $\sqrt{\dfrac{a_1a_2a_3a_4}{(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)}} \leqslant \dfrac{(a_1+a_2)(a_3+a_4)}{(2-a_1-a_2)(2-a_3-a_4)} =$

$$= \frac{\dfrac{a_1+a_2}{2}\cdot\dfrac{a_3+a_4}{2}}{\left(1-\dfrac{a_1+a_2}{2}\right)\left(1-\dfrac{a_3+a_4}{2}\right)}$$

$$\leqslant \left[\frac{\dfrac{a_1+a_2}{2}+\dfrac{a_3+a_4}{2}}{2-\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{2}}\right]^2 = \left[\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4-a_1-a_2-a_3-a_4}\right]^2 \rightarrow \text{(dpcm)}$$

Bước 3 : n = 3 : Chọn $a_4 = \dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$ và thay vào BĐT với $n = 4$ ta có

$$\frac{a_1a_2a_3\left(\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)}{(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\left(1-\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{a_1+a_2+a_3+\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}}{3-a_1-a_2-a_3+1-\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}}\right]^4$$

$$= \left[\frac{a_1+a_2+a_3}{3-a_1-a_2-a_3}\right]^4 \leftrightarrow \frac{a_1a_2a_3}{(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{a_1+a_2+a_3}{3-a_1-a_2-a_3}\right]^3$$

Từ đó $\Rightarrow \dfrac{a_1a_2a_3}{(a_1+a_2+a_3)^2} \leqslant \dfrac{(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)}{3-a_1-a_2-a_3)^3}$

6.7 : CMR : $\dfrac{a_1a_2\dots a_n}{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2} \leqslant \dfrac{(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n)}{(n-a_1-a_2-\dots-a_n)^2}$

$\forall a_i \in \left[0\ ,\ \dfrac{1}{2}\right]$

§7. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ ĐẠI DIỆN

7.1 : 139 III

CMR : $1 < \dfrac{a}{a+b+c} + \dfrac{b}{b+c+d} + \dfrac{c}{c+d+a} + \dfrac{d}{d+a+b} < 2$

$\forall$ a, b, c, d > 0

Giải

Theo qui tắc so sánh phân số ta có

$$+\begin{cases} \dfrac{a}{a+b+c+1} < \dfrac{a}{a+b+c} < \dfrac{a}{a+c} \\ \dfrac{b}{a+b+c+d} < \dfrac{b}{b+c+d} < \dfrac{b}{b+d} \\ \dfrac{c}{a+b+c+d} < \dfrac{c}{c+d+a} < \dfrac{c}{c+a} \\ \dfrac{d}{a+b+c+d} < \dfrac{d}{d+a+b} < \dfrac{d}{d+b} \end{cases}$$

$$1 = \frac{a+b+c+d}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < \frac{a+c}{a+c} + \frac{b+d}{b+d} = 2$$

7.2 [35 III.2]

CMR : $\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \dfrac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geqslant \dfrac{a+b+c}{3}\ \forall$

a, b, c > 0

Giải

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geqslant \dfrac{2a-b}{3}$. Thật vậy

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}-\frac{2a-b}{3}=\frac{3a^3-a(a^2+ab+b^2)-(a^3-b^3)}{3(a^2+ab+b^2)}$$

$$=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)}{3(a^2+ab+b^2)}=\frac{(a+b)(a-b)^2}{3(a^2+ab+b^2)}\geqslant 0\rightarrow \text{(đpcm)}$$

Tương tự ta có $\dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2}\geqslant\dfrac{2b-c}{3}$ và $\dfrac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant\dfrac{2c-a}{3}$

Vậy $\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant\dfrac{2a-b}{3}+\dfrac{2b-c}{3}+\dfrac{2c-a}{3}$

$=\dfrac{a+b+c}{3}$

7.3 CMR $\dfrac{a}{bc+1}+\dfrac{b}{ca+1}+\dfrac{c}{ab+1}\leqslant 2\ \forall a, b, c, \in [0, 1]$

Bạn đọc tự giải

7.4 Cho $\begin{cases} a, b, c \geqslant 0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$

CMR : $\dfrac{a}{1+b-a}+\dfrac{b}{1+c-b}+\dfrac{c}{1+a-c}\geqslant 1$

Bạn đọc tự giải

7.5 [55III.2] *CMR* : $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2$

Giải :

Ta có $\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k}}=\dfrac{(k+1)-k}{(k+1)\sqrt{k}}=\dfrac{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{(k+1)\sqrt{k}}$

$<\dfrac{2\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{(k+1)\sqrt{k}}=2\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$. Do đó

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<$

$$< 2\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\dots+2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$= 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < 2$$

7.6 : CMR $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2} < 2$

Ta có $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$. Do đó

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2} < \frac{1}{1^2}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\dots+\frac{1}{(n-1)n}$$

$$= 1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 2-\frac{1}{n} < 2$$

7.7 CMR : $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2} < \frac{5}{3}$

Giải

Ta có $\frac{1}{k^2} = \frac{4}{4k^2} < \frac{4}{4k^2-1} = 2\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$ Do đó

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{n^2} < \frac{1}{1^2}+2\left(\frac{1}{2.2-1}-\frac{1}{2.2+1}\right)+2\left(\frac{1}{2.3-1}-\frac{1}{2.3+1}\right)$$

$$+\dots+2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) = 1+2\left(\frac{1}{2.2-1}-\frac{1}{2n+1}\right) < 1+\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

7.8 : CMR : $\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}$.

Giải

Ta có $(k-1)k(k+1) = k(k^2-1) < k^3$. Do đó

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3} = 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3} < 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k(k+1)}$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)}\right] = 1 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}\right] < \frac{5}{4}$$

7.9 : CMR : $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{1994}{1995!} < 1$

Giải : Ta có $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$. Do đó

$$\sum_{k=1}^{1994} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{1994}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{1994} < 1$$

7.10 CMR $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n^2} > 1 \ \forall n \in \mathbf{N}$

Giải :

$$VT = \underbrace{\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2-n}\right]}_{(n^2 - 2n + 1) \text{ số}} + \underbrace{\left[\frac{1}{n^2-n+1} + \frac{1}{n^2-n+2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right]}_{n \text{ số}}$$

$$\geq (n^2 - 2n + 1)\frac{1}{n^2 - n} + n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{(n-1)}{n} + \frac{1}{n} = 1.$$

§8. PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC

CÁC PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC

Dạng 1a Nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì đặt $\begin{cases} x = \sin\alpha \\ y = \cos\alpha \end{cases}$ với $\alpha \in [0, 2\pi]$

Dạng 1b Nếu $x^2 + y^2 = m^2$ $(m > 0)$ thì đặt $\begin{cases} x = m\sin\alpha \\ y = m\cos\alpha \end{cases}$ với $\alpha \in [0, 2\pi]$

Dạng 2a Nếu $|x| \leq 1$ thì đặt $\left[\begin{array}{l} x = \sin\alpha \text{ với } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x = \cos\alpha \text{ với } \alpha \in [0, \pi] \end{array}\right.$

Dạng 2b Nếu $|x| \leq m$ thì đặt $\left[\begin{array}{l} x = m\sin\alpha \text{ với } \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x = m\cos\alpha \text{ với } \alpha \in [0, \pi] \end{array}\right.$

Dạng 3a : Nếu $|x| \geq 1$ hoặc bài toán có chứa biểu thức $\sqrt{x^2 - 1}$ thì đặt $x = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ với $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

Dạng 3b : Nếu $|x| \geq m$ hoặc bài toán có chứa biểu thức $\sqrt{x^2 - m^2}$ thì đặt $x = \dfrac{m}{\cos\alpha}$ với $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

Dạng 4a : Nếu không ràng buộc điều kiện cho biến số thì đặt

$$x = \operatorname{tg}\alpha \text{ với } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Dạng 4b : Nếu không ràng buộc điều kiện cho biến số và bài toán có chứa biểu thức $(x^2 + m^2)$ thì đặt

$$x = m\operatorname{tg}\alpha \text{ với } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

7.1 122 III.2 : CMR : Nếu $|x| < 1$ và $2 \leq n \in \mathbb{N}$ thì

$$(1 + x)^n + (1 - x)^n < 2^n$$

Giải :

Đặt $x = \cos\alpha$ với $\alpha \in (0, \pi)$. Khi đó

$$(1 + x)^n + (1 - x)^n = (1 + \cos\alpha)^n + (1 - \cos\alpha)^n =$$

$$= \left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^n + \left(2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^n = 2^n\left(\cos^{2n}\frac{\alpha}{2} + \sin^{2n}\frac{\alpha}{2}\right) \leq$$

$$\leq 2^n\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2^n$$

Rõ ràng dấu bằng không xảy ra với $\alpha \in (0, \pi)$

$$\rightarrow (1 + x)^n + (1 - x)^n < 2^n$$

7.2 : 146 I.1 : CMR : $-\frac{1}{2} \leq \frac{(a + b)(1 - ab)}{(1 + a^2)(1 + b^2)} \leq \frac{1}{2}\ \forall\ a, b$

Giải

Đặt $a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\beta$. Khi đó

$$\left|\frac{(a + b)(1 - ab)}{(1 + a^2)(1 + b^2)}\right| = \left|\frac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}{(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\beta)}\right|$$

$$= \left|\cos^2\alpha\cos^2\beta \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \cdot \frac{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\right|$$

$$= |\sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha + \beta)| = \left|\frac{1}{2}\sin\left[2(\alpha + \beta)\right]\right| \leq \frac{1}{2}$$

7.3 : Chứng minh các bất đẳng thức sau đúng $\forall$ a, b

a) $\left|\frac{(a^2 - b^2)(1 - a^2b^2)}{(1 + a^2)^2(1 + b^2)^2}\right| \leq \frac{1}{4}$

b) $\left|\frac{(1 - ab)^2 - (a + b)^2}{(1 + a^2)(1 + b^2)}\right| \leq 1$

c) $\left|\frac{2(a + b)(1 - ab)}{(1 + a^2)(1 + b^2)}\right| \leq 1$

Bạn đọc tự giải bằng cách đặt $a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\beta$

7.4 : Gọi $f(x, y) = \dfrac{|x - y|}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}}$

CMR : $f(a, b) + f(b, c) \geq f(a, c)$

Giải

Đặt $a = tg\alpha$, $b = tg\beta$, $c = tg\gamma$. Khi đó

$$f(a, b) = \frac{|tg\alpha - tg\beta|}{\sqrt{(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\beta)}} = \left| \cos\alpha\cos\beta \cdot \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \right| = |\sin(\alpha-\beta)|$$

$$f(b, c) = \frac{|tg\beta - tg\gamma|}{\sqrt{(1+tg^2\beta)(1+tg^2\gamma)}} = \left| \cos\beta\cos\gamma \cdot \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cos\gamma} \right| = |\sin(\beta-\gamma)|$$

$$f(a, c) = \frac{|tg\alpha - tg\gamma|}{\sqrt{(1+tg^2\alpha)(1+tg^2\alpha)}} = \left| \cos\alpha\cos\gamma \cdot \frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\cos\alpha\cos\gamma} \right| = |\sin(\alpha-\gamma)|$$

Ta có : $|\sin(\alpha - \gamma)| = |\sin[(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)]|$

$= |\sin(\alpha - \beta)\cos(\beta - \gamma) + \sin(\beta - \gamma)\cos(\alpha - \beta)| \leq$

$\leq |\sin(\alpha - \beta)\cos(\beta - \gamma)| + |\sin(\beta - \gamma)\cos(\alpha - \beta)|$

$= |\sin(\alpha - \beta)| \cdot |\cos(\beta - \gamma)| + |\sin(\beta - \gamma)| \cdot |\cos(\alpha - \beta)|$

$\leq |\sin(\alpha - \beta)| + |\sin(\beta - \gamma)|$.

Vậy $f(a, b) + f(b, c) \geq f(a, c)$

7.5 ***291.2***. Cho m, n nguyên dương thỏa mãn $\sqrt{7} - \dfrac{m}{n} > 0$

a) *CMR* : $\sqrt{7}n - m > \dfrac{1}{m}$

b) Giả sử thêm rằng $n \leq m$. Hãy chứng minh

$$\sqrt{m^2 - n^2} + \sqrt{2mn - n^2} > \frac{1}{\sqrt{7}n - m}$$

(Vô địch Rumani)

Giải

a) Ta có $\sqrt{7} - \dfrac{m}{n} > 0 \leftrightarrow 7n^2 > m^2 \leftrightarrow 7n^2 - m^2 > 0$

Mà m, n $\in \mathbf{Z}^+ \to 7n^2 - m^2 \geqslant 1$ hay $7n^2 \geqslant m^2 + 1$

Mặt khác $7n^2 \vdots 7$ nhưng $(m^2 + 1)$ và $(m^2 + 2)$ đều $\not\vdots\ 7$ $\forall m \in \mathbf{Z}^+$

Do đó $7n^2 \geqslant m^2 + 3 \Rightarrow 7n^2 \geqslant m^2 + \dfrac{1}{m^2} + 2 = \left(m + \dfrac{1}{m}\right)^2$

Vậy $\quad \sqrt{7}n - m > \dfrac{1}{m}$

b) Vì $\sqrt{7}n - m > \dfrac{1}{m} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{7}n - m} < m$

Ta sẽ chứng minh $\sqrt{m^2 - n^2} + \sqrt{2mn - n^2} \geqslant m$

$\leftrightarrow \sqrt{\dfrac{m^2}{n^2} - 1} + \sqrt{2\dfrac{m}{n} - 1} \geqslant \dfrac{m}{n}$. Đặt $\dfrac{m}{n} = \mathrm{tg}\alpha \geqslant 1$

$\leftrightarrow \sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha - 1} + \sqrt{2\mathrm{tg}\alpha - 1} \geqslant \mathrm{tg}\alpha$

$\leftrightarrow (\mathrm{tg}^2\alpha - 1) + (2\mathrm{tg}\alpha - 1) + 2\sqrt{(\mathrm{tg}^2\alpha - 1)(2\mathrm{tg}\alpha - 1)} \geqslant \mathrm{tg}^2\alpha$

$\leftrightarrow 2(\mathrm{tg}\alpha - 1) + 2\sqrt{(\mathrm{tg}^2\alpha - 1)(2\mathrm{tg}\alpha - 1)} \geqslant 0$

Luôn đúng vì $\mathrm{tg}\alpha \geqslant 1$ $(n \leqslant m)$. Vậy

$$\sqrt{m^2 - n^2} + \sqrt{2mn - n^2} \geqslant m > \frac{1}{\sqrt{7}n - m}$$

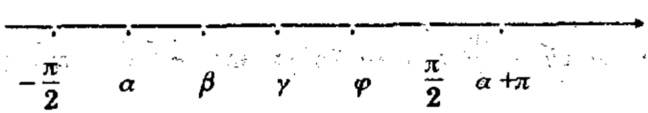
7.6 12.II.2 : CMR : Từ bốn số cho trước luôn luôn có thể chọn được 2 số x, y sao cho

$$0 \leqslant \frac{x - y}{1 + xy} \leqslant 1$$

Giải : Giả sử ta có 4 số $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$.

Khi đó luôn $\exists\ \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \varphi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ sao cho

$$a = \mathrm{tg}\alpha,\ b = \mathrm{tg}\beta,\ c = \mathrm{tg}\gamma,\ d = \mathrm{tg}\varphi$$



Các điểm β, γ, φ chia $[\alpha, \alpha + \pi]$ làm 4 đoạn $\Rightarrow \exists$ ít nhất 1 đoạn có độ dài $\leqslant \frac{\pi}{4}$. Xét 2 khả năng sau :

1) Đoạn có độ dài $\leqslant \frac{\pi}{4}$ có 2 đầu mút $\in \{\beta, \gamma, \varphi\}$ chẳng hạn

$$0 \leqslant \varphi - \gamma \leqslant \frac{\pi}{4} \rightarrow 0 \leqslant tg(\varphi - \gamma) = \frac{tg\varphi - tg\gamma}{1 + tg\varphi tg\gamma} \leqslant 1$$

Khi đó chọn $x = tg\varphi = d$, $y = tg\gamma = c \rightarrow 0 \leqslant \frac{x - y}{1 + xy} \leqslant 1$

2) Đoạn có độ dài $\leqslant \frac{\pi}{4}$ là đoạn $[\varphi, \alpha + \pi]$.

$$\Rightarrow 0 \leqslant (\alpha + \pi) - \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant tg[(\alpha + \pi) - \varphi] = tg(\alpha - \varphi) = \frac{tg\alpha - tg\varphi}{1 + tg\alpha tg\varphi} \leqslant 1$$

Khi đó chọn $x = tg\alpha = a$, $y = tg\varphi = d$ thì $0 \leqslant \frac{x - y}{1 + xy} \leqslant 1$

Kết hợp (1) và (2) $\rightarrow$ (đpcm)

7.7 : Cho 13 số thực phân biệt $a_1, a_2, \ldots a_{13}$.

CMR : tồn tại a_k, a_l $1 \leqslant k \neq l \leqslant 13$ sao cho

$$0 < \frac{a_k - a_l}{1 + a_k a_l} < \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$$

Giải

Đặt $a_i = tg\alpha_i$ với $\alpha_i \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $(i = 1, 2, \ldots 13)$

Giả sử $a_1 < a_2 < \ldots < a_{13}$. Khi đó

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{13} < \frac{\pi}{2} < \alpha_1 + \pi$$

Các điểm $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{13}$ chia đoạn $[\alpha_1, \alpha_1 + \pi]$ thành 13 đoạn do đó luôn tồn tại đoạn có độ dài $\leqslant \frac{\pi}{13}$. Xét 2 khả năng

1) Nếu $0 < \alpha_i - \alpha_{i-1} \leq \frac{\pi}{13} < \frac{\pi}{12}$ ($i \in \{2, 3, \ldots 13\}$) thì

$$0 < tg(\alpha_i - \alpha_{i-1}) = \frac{tg\alpha_i - tg\alpha_{i-1}}{1 + tg\alpha_i \cdot tg\alpha_{i-1}} < tg\frac{\pi}{12}$$

$$\leftrightarrow 0 < \frac{a_i - a_{i-1}}{1 + a_i a_{i-1}} < tg\frac{\pi}{12} = tg\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$$

2) Nếu $0 < (\alpha_1 + \pi) - \alpha_{13} \leq \frac{\pi}{13} < \frac{\pi}{12}$ thì

$$0 < tg[(\alpha_1 + \pi) - \alpha_{13}] = tg(\alpha_1 - \alpha_{13}) = \frac{a_1 - a_{13}}{1 + a_1 a_{13}} < tg\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$$

Tóm lại trong cả 2 trường hợp luôn $\exists$ a_k, a_l sao cho

$$0 < \frac{a_k - a_l}{1 + a_k a_l} < \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}}$$

§9. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ :

Phương pháp : Sử dụng tính chất $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$

6Vb : CMR : $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}$

Giải

$$VT = \sqrt{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2} + \sqrt{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}z^2}.$$

Xét véctơ $\vec{u} = \left(x + \frac{y}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$, $\vec{v} = \left(-\left(x + \frac{z}{2}\right), \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$

$$\leftrightarrow \vec{u} + \vec{v} = \left(\frac{y - z}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}(y + z)\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow |\vec{u}| + |\vec{v}| = \sqrt{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2} + \sqrt{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}z^2} \geq$$

$$\geq |\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{y-z}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y+z)^2} = \sqrt{y^2+yz+z^2}$$

45II.2 : CMR $\forall x$, y ta đều có

$$\sqrt{4\cos^2 x\cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x\sin^2 y + \sin^2(x-y)} \geq 2$$

Đặt $\vec{u} = (2\cos x\cos y, \sin(x-y))$; $\vec{v} = (2\sin x\sin y, \sin(x-y))$

$$\rightarrow \vec{u}+\vec{v} = (2\cos(x-y), 2\sin(x-y))$$

$$\rightarrow |\vec{u}| + |\vec{v}| = \sqrt{4\cos^2\cos^2 y + \sin^2(x-y)} + \sqrt{4\sin^2 x\sin^2 x + \sin^2(x-y)} \geq$$

$$\geq \sqrt{4\cos^2(x-y) + 4\sin^2(x-y)} = 2 = |\vec{u}+\vec{v}|$$

89III.2 : Tìm Min của $y = \sqrt{x^2-2px+2p^2} + \sqrt{x^2-2qx+2q^2}$ trong đó $p \neq q$

$$y = \sqrt{(x-p)^2+p^2} + \sqrt{(x-q)^2+q^2}.$$

Đặt $A(x-p, |p|)$ và $B(x-q, -|q|) \rightarrow \vec{AB}(p-q, -(|p|+|q|))$

Ta có $|\vec{OA}| + |\vec{OB}| \geq |\vec{AB}| \leftrightarrow y = \sqrt{(x-p)^2+p^2} + \sqrt{(x-q)^2+q^2} \geq$

$$\geq \sqrt{(p-q)^2+(|p|+|q|)^2} = |\vec{AB}| \rightarrow \text{Min}y = \sqrt{(p-q)^2+(|p|+|q|)^2}$$

§10. ĐÁNH GIÁ TRÊN ĐA THỨC

104V(Bộ đề 91) : Cho $f(x) = ax^2+bx+c$ thỏa mãn $|f(x)| \leq 1$ $\forall x \in [-1, 1]$.

Tìm Max $A = \frac{8}{3}a^2 + 2b^2$

Giải

Ta có $|f(-1)| = |a-b+c| \leq 1$;

$|f(1)| = |a+b+c| \leq 1$ và

$|f(0)| = |c| \leq 1$

$\rightarrow |a+b| = |(a+b+c) - c| \leqslant |a+b+c| + |c| \leqslant 2 \rightarrow$

$\rightarrow (a+b)^2 = |a+b|^2 \leqslant 4$

$\rightarrow |a-b| = |(a-b+c) - c| \leqslant |a-b+c| + |c| \leqslant 2 \rightarrow$

$\rightarrow (a-b)^2 = |a-b|^2 \leqslant 4 \rightarrow$

$$\rightarrow A = \frac{8}{3}a^2 + 2b^2 \leqslant \frac{8}{3}(a^2+b^2) \leqslant \frac{8}{3}.4 = \frac{32}{3}$$

65II. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $|f(x)| \leqslant h\ \forall x \in [-1, 1]$

CMR $|a| + |b| + |c| \leqslant 4h$

Ta có $\left.\begin{array}{ll} f(1) & = a+b+c \\ f(-1) & = a-b+c \\ f(0) & = c \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} a = \dfrac{f(1)+f(-1)}{2} - f(0) \\ b = \dfrac{f(1)-f(-1)}{2},\ c = f(0) \end{array}$

Sử dụng $|f(1)| \leqslant h$, $|f(-1)| \leqslant h$ và $|f(0)| \leqslant h$ ta có

$$|a| + |b| + |c| = \left|\frac{f(1)+f(-1)}{2} - f(0)\right| + \left|\frac{f(1)-f(-1)}{2}\right| + |f(0)| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{f(1)}{2}\right| + \left|\frac{f(-1)}{2}\right| + |f(0)| + \left|\frac{f(1)}{2}\right| + \left|\frac{f(-1)}{2}\right| + |f(0)| \leqslant 4h$$

61Vb Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn

$$|f(-1)| \leqslant 1;\ |f(0)| \leqslant 1;\ |f(1)| \leqslant 1.$$

CMR $|f(x)| \leqslant \frac{5}{4}\ \forall x \in [-1, 1]$

Ta có $f(x) = \left[\dfrac{f(1)+f(-1)}{2} - f(0)\right]x^2 + \left[\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}\right]x + f(0) =$

$$= \frac{f(1)}{2}(x^2+x) + \frac{f(-1)}{2}(x^2-x) + f(0)(1-x^2)$$

$$\rightarrow |f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|x^2+x| + \frac{1}{2}|x^2-x| + |1-x^2| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(|x^2+x| + |x^2-x|\right) + |1-x^2| \qquad (*)$$

Vì $x \in [-1, 1] \to (x^2 + x)(x^2 - x) = x^2(x^2 - 1) \leq 0 \to$

$$(*) = \frac{1}{2}|(x^2 + x) - (x^2 - x)| + (1 - x^2) =$$

$$= |x| + 1 - x^2 = -\left(|x| - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}$$

47I.2. Cho $y = 4x^3 + mx$. Xác định m để $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$

$$\left.\begin{array}{l} |y(1)| = |m + 4| \leq 1 \leftrightarrow -1 \leq m + 4 \leq 1 \leftrightarrow -5 \leq m \leq -3 \\ \left|y\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}m\right| \leq 1 \leftrightarrow -2 \leq m + 1 \leq 2 \leftrightarrow -3 \leq m \leq 1 \end{array}\right\}$$

$\to m = -3$. *Với* $m = -3$. *Đặt* $x = \cos\alpha$

khi đó $|y| = |4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha| = |\cos 3\alpha| \leq 1$

84I.2. Cho $y = 4x^3 + (a + 3)x^2 + ax$. Xác định a để $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$

Giải

$$\left.\begin{array}{r} |y(1)| = |7 + 2a| \leq 1 \leftrightarrow -1 \leq 7 + 2a \leq 1 \leftrightarrow -4 \leq a \leq -3 \\ \left|y\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \left|\frac{5}{4} + \frac{3}{4}a\right| \leq 1 \leftrightarrow -4 \leq 5 + 3a \leq 4 \leftrightarrow -3 \leq a \leq -\frac{1}{3} \end{array}\right\}$$

$\to a = -3$. Đặt $x = \cos\alpha$, khi đó $|y| = |4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha| = |\cos 3\alpha| \leq 1$

137II : Tìm a, b, c để $|4x^3 + ax^2 + bx + c| \leq 1 \ \forall x \in [-1, 1]$

Giải

Ta c/m mệnh đề $|4x^3 + bx| \leq 1 \ \forall x \in [-1, 1] \leftrightarrow b = -3$ (xem 47I.2)

Đặt $f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c \to f(-x) = -4x^3 + ax^2 - bx + c$

$\to \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = 4x^3 + bx$. Ta có $\begin{cases} |f(x)| \leq 1 \\ |f(-x)| \leq 1 \end{cases} \forall x \in [-1, 1]$

Do đó

$$|4x^3 + bx| = \left|\frac{f(x) - f(-x)}{2}\right| \leq \frac{|f(x)| + |f(-x)|}{2} \leq 1 \ \forall x \in [-1, 1]$$

$\to b = -3$. Vậy $-1 \leq 4x^3 + ax^2 - 3x + c \leq 1 \ \forall x \in [-1, 1]$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Với } x = 1 \to -1 \leq 4 + a - 3 + c \leq 1 \to a + c \leq 0 \\ \text{Với } x = -1 \to -1 \leq -4 + a + 3 + c \leq \ \to a + c \geq 0\end{array}\right\} \to a + c = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}x = \frac{1}{2} : -1 \leq \frac{1}{2} + \frac{a}{4} - \frac{3}{2} + c \leq 1 \to \frac{a}{4} + c \geq 0 \\ x = -\frac{1}{2} : -1 \leq -\frac{1}{2} + \frac{a}{4} + \frac{3}{2} + c \leq 1 \to \frac{a}{4} + c \leq 0\end{array}\right\} \to \frac{a}{4} + c = 0$$

Từ $a + c = 0$ và $\frac{a}{4} + c = 0 \to a = c = 0$.

Đáp số $a = c = 0$, $b = -3$

58II (bộ đề 91) Cho pt $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(ad \neq 0)$

Gọi $\alpha = \max\left(\left|\frac{b}{a}\right|, \left|\frac{c}{a}\right|, \left|\frac{d}{a}\right|\right)$ và

$$\beta = \max\left(\left|\frac{a}{d}\right|, \left|\frac{b}{d}\right|, \left|\frac{c}{d}\right|\right).$$

CMR : Nếu x_o là nghiệm phương trình thì $\frac{1}{1+\beta} < |x_o| < 1 + \alpha$

Giải

Ta sẽ chứng minh $|x_o| < 1 + \alpha$. Thật vậy nếu $|x_o| \leq 1 \to$ (đpcm)

Nếu $|x_o| > 1$ khi đó $ax_o^3 + bx_o^2 + cx_o + d = 0$

$$\leftrightarrow x_o^3 = -\left(\frac{b}{a}x_o^2 + \frac{c}{a}x_o + \frac{d}{a}\right) \to |x_o^3| = \left|\frac{b}{a}x_o^2 + \frac{c}{a}x_o + \frac{d}{a}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{b}{a}\right||x_o^2| + \left|\frac{c}{a}\right||x_o| + \left|\frac{d}{a}\right| \leq \alpha(|x_o|^2 + |x_o| + 1) =$$

$$= \alpha.\frac{|x_o|^3 - 1}{|x_o| - 1} < \frac{|x_o|^3}{|x_o| - 1}.\alpha \to |x_o| < 1 + \alpha$$

Để ý rằng $y_o = \frac{1}{x_o}$ là nghiệm của phương trình

$$dx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

$\to$ làm tương tự $\to |y_o| = \frac{1}{|x_o|} < 1 + \beta \to \frac{1}{1+\beta} < |x_o|$

120III.2 : CMR : Nếu phương trình $x^4 + bx^3 + cx^2 + bx + 1 = 0$ có nghiệm thì

1) $b^2 + (c - 2)^2 > 3$

2) $b^2 + (c - 2)^2 > \frac{16}{5}$

3) $b^2 + c^2 \geqslant \frac{4}{5}$

§11. SỬ DỤNG ĐẠO HÀM

1. Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

113I.2 : CMR : $x - \frac{x^3}{6} \overset{(1)}{<} \sin x \overset{(2)}{<} x \ \forall\ x > 0$

Giải

Ta có 2) $\leftrightarrow f(x) = x - \sin x > 0\ \forall\ x > 0$

Vì $f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0\ \forall\ x > 0$ nên $f(0) = 0 \Rightarrow \sin x < x$

(1) $\leftrightarrow g(x) = \sin x + \frac{x^3}{6} - x > 0$

Ta có $g'(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1 \Rightarrow g''(x) = x - \sin x > 0$

Do đó $g'(x)$ đồng biến $\rightarrow g'(x) > g'(0) = \frac{0^2}{2} + \cos 0 - 1 = 0$

$\Rightarrow g(x)$ đồng biến $\Rightarrow g(x) > g(0) = \sin 0 + \frac{0^3}{6} - 0 = 0$

Vậy $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$. Từ đó $\rightarrow$ (đpcm)

78II.2 : CMR nếu $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì $2^{\sin x} + 2^{tgx} \geq 2^{x+1}$

Giải

Theo BĐT Côsi ta có $2^{\sin x} + 2^{tgx} \geq 2\sqrt{2^{\sin x} . 2^{tgx}} = 2^{\frac{\sin x + tgx}{2} + 1}$

Ta sẽ chứng minh

$$2^{\frac{\sin x + tgx}{2} + 1} \geq 2^{x+1} \leftrightarrow \sin x + tgx > 2x \ \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\leftrightarrow f(x) = \sin x + tgx - 2x > 0 \ \forall \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Ta có $f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 > \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \geq$

$$\geq 2\sqrt{\cos^2 x . \frac{1}{\cos^2 x}} - 2 = 0$$

$\Rightarrow$ f(x) đồng biến $\Rightarrow f(x) > f(0) = \sin 0 + tg0 - 2.0 = 0$

$\Rightarrow \sin x + tgx > 2x$. Từ đó $\Rightarrow$ (đpcm)

113III.2 : CMR. Nếu $0 < x < \frac{\pi}{2}$ thì $2^{2\sin x} + 2^{tgx} > 2^{\frac{3x}{2} + 1}$

Giải

Theo BĐT Côsi ta có

$$2^{2\sin x} + 2^{tgx} \geq 2\sqrt{2^{2\sin x} . 2^{tgx}} = 2^{\frac{2\sin x + tgx}{2} + 1}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\leftrightarrow 2\sin x + tgx > 3x \ \forall \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\leftrightarrow f(x) = 2\sin x + tgx - 3x > 0 \ \forall \ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Ta có $f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 = \cos x + \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 \overset{\text{Côsi}}{\geqslant}$

$$\overset{\text{(Côsi)}}{\geqslant} 3\sqrt[3]{\cos x \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} - 3 = 0$$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến $\Rightarrow f(x) > f(0) = 0 \Rightarrow 2\sin x + \operatorname{tg}x > 3x$

Từ đó $\Rightarrow$ (đpcm)

101IVa : CMR nếu $x > 0$ thì $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\ \forall\ n \in N$

Giải

Ta sẽ chứng minh

$$f_n(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) > 0\ \forall\ x > 0$$

Với $n = 0$ ta có $f_0(x) = e^x - 1 > 0\ \forall\ x > 0$

Giả sử ta có $f_k(x) > 0\ \forall\ x > 0$.

Khi đó $f'_{k+1}(x) = f_K(x) > 0\ \forall\ x > 0$

$$\Rightarrow f_{k+1}(x) \text{ đồng biến} \Rightarrow f_{k+1}(x) > f_{k+1}(0) = 0$$

Theo nguyên lí qui nạp thì $f_n(x) > 0\ \forall\ x > 0,\ \forall n \in N$

Vậy $\quad e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\ \forall n \in N$

15II.2 : Cho $a \leqslant 6$, $b \leqslant -8$, $c \leqslant 3$.

CMR. $x^4 - ax^2 - bx \geqslant c\ \forall x \geqslant 1$

Giải

Đặt $f(x) = x^4 - ax^2 - bx \rightarrow f'(x) = 4x^3 - 2ax - b$

$$\rightarrow f''(x) = 2(6x^2 - a) \geqslant 2(6.1^2 - 6) = 0$$

$\Rightarrow f'(x)$ đồng biến/$[1, +\infty) \Rightarrow f(x) \geqslant f(1) = 4 - (2a + b) \geqslant$

$$\geqslant 4 - (2.6 - 8) = 0$$

Do đó $f(x)$ đồng biến/$[1, +\infty)$

$$\Rightarrow f(x) \geqslant f(1) = 1 - (a + b) \geqslant 3 \geqslant c$$

77I : CMR $f(x) = x^4 + px + q \geq 0\ \forall x \in R \leftrightarrow 256q^3 \geq 27p^4$

Giải

$$f'(x) = 4x^3 + p \rightarrow f'(x) = 0 \leftrightarrow x_o = -\sqrt[3]{\frac{p}{4}}$$

Khi đi qua $x = x_o$ dấu $f'(x)$ đổi dấu từ - sang + do đó

$$\text{Min } f(x) = f\left(-\frac{3p}{4}\right) = x_o(x_o^3 + p) + q = -\frac{3p}{4}\sqrt[3]{\frac{p}{4}} + q$$

Ta có $f(x) \geq 0\ \forall x \in R \leftrightarrow \text{Min } f(x) \geq 0 \leftrightarrow q \geq \frac{3p}{4}\sqrt[3]{\frac{p}{4}}$

$$\leftrightarrow 256q^3 \geq 27p^4$$

10I : CMR $f(x) = x^4 + px^3 + q \geq 0\ \forall x \in R \leftrightarrow 256\ q \geq 27p^4$

Giải

$f'(x) = x^2(4x + 3p) \Rightarrow f'(x)$ triệt tiêu và đổi dấu từ - sang +

Khi x đi qua $x_o = -\frac{3p}{4}$. Do đó

$$\text{Min } f(x) = f\left(-\frac{3p}{4}\right) = \frac{256q - 27p^4}{256}$$

Ta có $f(x) \geq 0\ \forall x \in R \leftrightarrow \text{Min } f(x) \geq 0 \leftrightarrow 256q \geq 27p^4$

69IVa : CMR $\text{arctg}x - \frac{\pi}{4} \geq \ln(x^2 + 1) - \ln 2\ \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Giải

Xét $f(x) = \text{arctg}x - \ln(x^2 + 1)\ \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Ta có $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1-2x}{1+x^2} \leq 0\ \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow$
f(x) đồng biến

$\rightarrow \text{Min } f(x) = f(1) = \text{arctg}1 - \ln(1+1) = \frac{\pi}{4} - \ln 2$. Từ đó $\rightarrow$ (đpcm)

121. Cho hàm số $f(x) = x^n + (c - x)^n$ với $c > 0$ và $2 \leq n \in Z^+$

Khảo sát sự biến thiên và từ đó chứng minh

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2} \ \forall\ a + b \geq 0$$

Giải

$$f'(x) = n\,[x^{n-1} - (c - x)^{n-1}].$$

Ta có $f'(x) = 0 \leftrightarrow x^{n-1} = (c - x)^{n-1}$

Nếu n chẳn $\rightarrow (n - 1)$ lẻ $\rightarrow$ pt $\leftrightarrow x = c - x \leftrightarrow x = \dfrac{c}{2}$

Nếu n lẻ $\rightarrow (n - 1)$ chẳn $\rightarrow$ pt $\leftrightarrow |x| = |c-x| \leftrightarrow x^2 = (c - x)^2$

$\leftrightarrow x^2 - (c - x)^2 = (2x - c)c = 0 \leftrightarrow x = \dfrac{c}{2}$

Mặt khác $f''(x) = n(n - 1)[x^{n-2} + (c - x)^{n-2}]$

$\Rightarrow f''\left(\dfrac{c}{2}\right) = 2n(2n - 1)\left(\dfrac{c}{2}\right)^{n-2} > 0$

$\rightarrow f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = \dfrac{c}{2}$ và $f\left(\dfrac{c}{2}\right) = 2\left(\dfrac{c}{2}\right)^n$

Theo khảo sát $\Rightarrow f(x) = x^n + (c - x)^n \geq 2\left(\dfrac{c}{2}\right)^n$. Lấy $\begin{cases} x = a \\ c = a + b \end{cases}$

thì $\quad a^n + b^n \geq 2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n \leftrightarrow \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n \leq \dfrac{a^n + b^n}{2}$ (đpcm)

26II.2: Cho $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$

CMR : $\quad \dfrac{a}{b^2 + c^2} + \dfrac{b}{c^2 + a^2} + \dfrac{c}{a^2 + b^2} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Giải

Từ giả thiết suy ra $0 < a, b, c < 1$

Ta có $1 \leftrightarrow \dfrac{a^2}{a(1 - a^2)} + \dfrac{b^2}{b(1 - b^2)} + \dfrac{c^2}{c(1 - c^2)} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{a^2}{a(1-a^2)} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \leftrightarrow 0 < a(1-a^2) \leq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

Xét hàm số $f(x) = x(1-x^2)$ với $0 < x < 1$

Ta có $f'(x) = -3x^2 + 1 \Rightarrow$ Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
f'		+	0	-	
f	0	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	0

Nhìn vào bảng biến thiên ta có

$$0 < f(x) = x(1-x^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

Từ đó $\dfrac{a^2}{a(1-a^2)} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

Do đó $\dfrac{a^2}{a(1-a^2)} + \dfrac{b^2}{b(1-b^2)} + \dfrac{c^2}{c(1-c^2)} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}(a^2+b^2+c^2) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

2. Sử dụng Định lý Lagrange

Định lý Lagrange : Nếu $y = f(x)$ liên tục/[a, b] và có đạo hàm/(a,b) thì $\exists\ c \in (a, b)$ để

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ hay } f(b) - f(a) = (b - a)\, f'(c)$$

2.1 (72 IV a) : CMR Nếu $0 < b < a$ thì

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$$

Giải

Xét hàm $f(x) = \ln x$ với $x \in (0, +\infty)$. Ta có $y = f(x)$ liên tục/(b, a) và $f'(x) = \frac{1}{x}$ nên theo định lý Lagrange thì $\exists\ c \in (b, a)$ để

$$f(a)-f(b) = f'(c)(a-b) \leftrightarrow \ln a - \ln b = \frac{1}{c}(a-b) \leftrightarrow \ln\frac{a}{b} = \frac{a-b}{c}$$

Vì $0 < b < c < a$ nên $\frac{a-b}{a} < \frac{a-b}{c} = \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$

2.2 (100 IV a) : CMR $|\text{arc tg}a - \text{arc tg}b| \leq |a - b|\ \forall\ a, b$

Giải

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b$. Xét hàm $f(x) = \text{arctg}x$. Theo định lý Lagrange thì $\exists\ c \in (b, a)$ sao cho

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a - b) \leftrightarrow \text{arctg}a - \text{arctg}b = \frac{1}{1+c^2}(a - b)$$

suy ra $|\text{arc tg}a - \text{arc tg}b| = \left|\frac{1}{1+c^2}\right| |a - b| \leq |a - b|$

2.3 : CMR $\frac{1}{1 + (n+1)^2} < \text{arctg}\frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{1+n^2}$

Giải

Xét $f(x) = \text{arc tg}x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Theo định lý Lagrange thì $\exists\ c \in [n, n+1]$ sao cho

$$f(n+1) - f(n) = f'(c)[(n+1) - n] \leftrightarrow \text{arctg}(n+1) - \text{arctg}n = \frac{1}{1+c^2}$$

Mà $\text{tg}(\text{arc tg}\alpha - \text{arc tg}\beta) = \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}$

$\rightarrow \text{arc tg}\alpha - \text{arc tg}\beta = \text{arctg}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}$ Do đó

$$\text{arctg}\frac{1}{n^2+n+1} = \text{arctg}(n+1) - \text{arctg}n = \frac{1}{1+c^2}$$

Mà $n < c < n + 1 \rightarrow \dfrac{1}{1 + (n+1)^2} < \text{arctg}\,\dfrac{1}{n^2 + n + 1} < \dfrac{1}{1 + n^2}$

8IVa : Cho $n \in Z^+$. CMR : $x^n \sqrt{1 - x} < \dfrac{1}{\sqrt{2ne}}$ $\forall x \in (0, 1)$

Giải

x	0		2n/2n+1		1
f'		+	0	−	
f	0	↗	CĐ	↘	0

BĐT $\leftrightarrow 2nx^{2n}(1 - x) < \dfrac{1}{e}$. Đặt $f(x) = 2nx^{2n}(1 - x)$ với $x \in (0, 1)$

Ta có $f'(x) = 2nx^{2n-1}[2n - (2n + 1)x]$

$$\rightarrow f'(x) = 0 \leftrightarrow x = \frac{2n}{2n + 1}$$

Từ đó $f(x) \leqslant f\left(\dfrac{2n}{2n + 1}\right) = \left(\dfrac{2n}{2n + 1}\right)^{2n+1}$ $\forall x \in (0,1)$.

Đặt $m = 2n$ ta sẽ c/m $\left(\dfrac{m}{m+1}\right)^{m+1} < \dfrac{1}{e}$

$$\leftrightarrow (m + 1)\ln\frac{m}{m+1} < \ln\frac{1}{e} = -1$$

$$\leftrightarrow \ln(m + 1) - \ln m > \frac{1}{m + 1}$$

Sử dụng định lý Lagrange : $\exists\, c \in [m, m + 1]$ sao cho

$g(m + 1) - g(m) = g'(c)\,[(m + 1) - m]$ với $g(x) = \ln x$

$\leftrightarrow \ln(m + 1) - \ln m = \dfrac{1}{c} > \dfrac{1}{m + 1}$. Từ đó $\rightarrow$ (đpcm)

§ 12. BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

Phương pháp : Sử dụng các tính chất sau

1. Nếu $f(x) \le g(x)$ thì $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

2. Nếu $m \le f(x) \le M$ thì $\displaystyle m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$

3. Nếu $f(x)$ là một hàm số liên tục và $f(x) \ge 0\ \forall x \in [a, b]$ khi đó nếu $f(x)$ không đồng nhất bằng $0\ \forall x \in [a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0 \qquad \text{(Tức là không xảy ra dấu bằng)}$$

Hệ quả : Nếu $f(x)$ và $g(x)$ liên tục và $f(x) \le g(x)$ đồng thời $f(x) \not\equiv g(x)\ \forall x \in [a, b]$ thì $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$

Chứng minh tính chất 3 :

Vì $f(x) \not\equiv 0\quad \forall x \in [a, b]$ nên $\exists x_0 \in [a, b]$ sao cho $f(x_0) > 0$. Mà $f(x)$ liên tục nên $\exists$ 1 lân cận của x_0 là $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ sao cho $f(x) \ge \frac{1}{2}f(x_0)\ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

(*Chú ý* : $x_0 = a$ thì lấy lân cận bên phải x_0, $x_0 = b$ thì lấy lân cận bên trái x_0)

Từ đó ta có

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \ge$$

$$\ge 0 + \int_{x_0+\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{1}{2}f(x_0)\,dx + 0 = \frac{1}{2}f(x_0).2\varepsilon = f(x_0)\varepsilon > 0$$

Chứng minh hệ quả : Đặt $h(x) = g(x) - f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]$ và $h(x) \not\equiv 0\ \forall x \in [a, b]$

$$\rightarrow \quad \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b h(x)\,dx > 0$$

Ý nghĩa hình học : Hình thang cong chắn về phía trên trục hoành bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có diện tích dương

12.1 [43IVa] :

CMR $\qquad \dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^{2n}}} < \dfrac{\pi}{6} \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots)$

Giải

$\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ ta có $0 < 1 - x^2 \leq 1 - x^{2n} \leq 1$

$$\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{\sqrt{1 - x^{2n}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{2n}}} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = x\Big|_0^{\frac{1}{2}} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{2n}}} < \arcsin x\,\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{6}$$

12.2 [71IVa]

CMR $\dfrac{\pi}{6} < \displaystyle\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} < \dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}$

Giải

$\forall x \in [0, 1] \ \Rightarrow\ 0 \leq x^3 \leq x^2 \leq 1$

$$\Rightarrow 4 - x^2 - x^2 \leq 4 - x^2 - x^3 \leq 4 - x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \le \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} \le \frac{1}{\sqrt{4 - 2x^2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} < \frac{dx}{\sqrt{4 - 2x^2}}$$

$$\Rightarrow \left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

12.3 [28IVa]

CMR : $\frac{\sqrt{3}}{4} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}dx < \frac{1}{2}$

Giải

Đặt $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ với $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ $\Rightarrow g'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$

Ta có :

$$h'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x < 0 \ \forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$$

$\Rightarrow$ h(x) nghịch biến $\Rightarrow h(x) < h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi\sqrt{3}}{6} - 1\right] < 0$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) \le f(x) \le f\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{3}{\pi} \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}dx < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}dx < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3}{\pi}dx$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}dx < \frac{1}{2}$$

12.4 [102Va]

Cho hai hàm số liên tục f, g : [0, 1] → [0, 1]

CMR : $$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \int_0^1 f(x)\,dx \,.\int_0^1 g(x)\,dx$$

Giải

Vì f, g : [0, 1] → [0, 1] nên $\begin{cases} 0 \le f(x) \le 1 \\ 0 \le g(x) \le 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \le f(x)g(x) \le f(x) \\ 0 \le f(x)g(x) \le g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \int_0^1 f(x)g(x)\,dx < \int_0^1 f(x)\,dx \\ 0 \le \int_0^1 f(x)g(x)\,dx < \int_0^1 g(x)\,dx \end{cases}$$

⇒ (đpcm)

12.5 [106IVa]

CMR Nếu f(x), g(x) là hai hàm số liên tục xác định trên [a, b] thì

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx.\int_a^b g^2(x)\,dx$$

Bất đẳng thức Bunhiacôpski

Giải

$$0 \le [tf(x) + g(x)]^2 = t^2f^2(x) + 2tf(x)g(x) + g^2(x) \quad \forall t \in R$$

$$\Rightarrow 0 \le t^2\int_a^b (x)\,dx + 2t\int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx$$

Coi vế phải là tam thức bậc 2 ẩn t ta có

$$\Delta' = \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 - \int_a^b f^2(x)\,dx.\int_a^b g^2(x)\,dx \le 0$$

⇒ (đpcm)

12.6 [21IVa]

1. CMR $\forall n \in N$ thì $\int_0^n \sqrt{x}\,dx < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < \int_1^{n+1} \sqrt{x}\,dx$

2. Từ đó suy ra : a) $666{,}6 < \sum_{k=1}^{100} \sqrt{k} < 676$

b) $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^3}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \right) = \frac{2}{3}$

Giải

Ta có : $\sqrt{x} \le \sqrt{k} \quad \forall x \in [k-1, k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$

$\sqrt{k} \le \sqrt{x} \quad \forall x \in [k, k+1]$

Suy ra :

$$\int_{k-1}^{k} \sqrt{x}\,dx < \int_{k-1}^{k} \sqrt{k}\,dx = \sqrt{k} = \int_{k}^{k+1} \sqrt{k}\,dx < \int_{k}^{k+1} \sqrt{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^n \sqrt{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{k-1}^{k} \sqrt{x}\,dx \right) < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} <$$

$$< \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{k}^{k+1} \sqrt{x}\,dx \right) = \int_1^{n+1} \sqrt{x}\,dx \text{ (đpcm)}$$

2. Để ý $\int_0^n \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}})\Big|_0^n = \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}$

$$\int_1^{n+1} \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}(x^{\frac{3}{2}})\Big|_1^{n+1} = \frac{2}{3}\left[(n+1)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$$

do đó theo 1) $\Rightarrow \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} < \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} < \frac{2}{3}\left[(n+1)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$ (*)

a) Cho n = 100 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{100}\sqrt{k} > \frac{2}{3}(100)^{\frac{3}{2}} > 666,6$

Với n = 99 $\Rightarrow \sum_{k=1}^{99}\sqrt{k} < \frac{2}{3}\left[(99+1)^{\frac{3}{2}} - 1\right] < 666$

Do đó $666,6 < \sum_{k=1}^{100}\sqrt{k} = \sum_{k=1}^{99}\sqrt{k} + \sqrt{100} < 666 + 10 = 676$

b) Theo kết quả (*)

$$\Rightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} < \frac{2}{3}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Theo nguyên lý giới hạn kẹp giữa $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right)=\frac{2}{3}$

MỘT SAI LẦM CƠ BẢN CỦA BỘ ĐỀ

33 III.2 : Tìm Max, Min $A = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$ với $x^2 + y^2 = 1$

1) ***Max A*** [Bộ đề làm đúng nhưng quá dài]

Giải

$$A = x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} \overset{BCS}{\leq} \sqrt{(x^2+y^2)[(\sqrt{1+y})^2 + (\sqrt{1+x})^2]} =$$

$$= \sqrt{2+x+y} \overset{BCS}{\leq} \sqrt{2 + \sqrt{(1^2+1^2)(x^2+y^2)}} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Từ đó Max $A = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ với $x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2) ***Min A*** : Đáp số Bộ Đề :

Min $A = -1$ đạt được khi $\left[\begin{array}{l} x = 0\ ,\ y = -1 \\ x = -1\ ,\ y = 0 \end{array}\right.$

Đáp số này sai vì với phản ví dụ : $x = \dfrac{1}{4}$, $y = \dfrac{-\sqrt{15}}{4} \rightarrow$

$A < -1 \rightarrow$ Min $A < -1$

Lời giải đúng : Xét 2 trường hợp sau

2.1 $xy \geq 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 0\ ,\ y \geq 0 \\ x \leq 0\ ,\ y \leq 0 \end{array}\right.$

Để tìm Min A ta chỉ cần xét với $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$

Khi đó dễ c/m Min $A = -1$ khi $\left[\begin{array}{l} x = 0\ ,\ y = -1 \\ x = -1\ ,\ y = 0 \end{array}\right.$

2.2 $xy < 0$: Đặt $\begin{cases} x + y = t \\ \rightarrow xy = \dfrac{t^2-1}{2} \end{cases}$ vì $xy = \dfrac{t^2-1}{2} < 0 \rightarrow -1 < t < 1$

Khi đó $A^2 = \left[x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}\right]^2 =$

$$= (x^2 + y^2) + xy\ (x + y) + 2xy\ \sqrt{(1 + x)(1 + y)}$$

$\rightarrow f(t) = 2A^2 = (\sqrt{2}+1)t^3 + \sqrt{2}t^2 - (\sqrt{2}+1)t + (2-\sqrt{2})$ với $-1 < t < 1$

$f'(t) = 3(\sqrt{2}+1)t^2 + 2\sqrt{2}t - (\sqrt{2}+1)$

$f'(t) = 0$ có 2 nghiệm

$$t_1 = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{11+6\sqrt{2}}}{3(\sqrt{2}+1)},\quad t_2 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{11+6\sqrt{2}}}{3(\sqrt{2}+1)}$$

t	-1		t_1		t_2		1
f'		+	0	-	0	+	
f		↗	CĐ	↘		↗	2
	2				CT		

Do đó Max $f(t) = f(t_1) = f\left(\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{11+6\sqrt{2}}}{3(\sqrt{2}+1)}\right)$

Ta có

$$f(t) = \left(\frac{t}{3} + \frac{\sqrt{2}}{9(\sqrt{2}+1)}\right)f'(t) - \left[\frac{2(\sqrt{2}+1)}{3} + \frac{4}{9(\sqrt{2}+1)}\right]t + 2 - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{9}$$

$$\rightarrow f(t_1) = -\left[\frac{6(\sqrt{2}+1)^2+4}{9(\sqrt{2}+1)}\right]\cdot\left(\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{3(\sqrt{2}+1)}\right) + 2 - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{9}$$

$$f(t_1) = \frac{2\sqrt{11+6\sqrt{2}}\,[\sqrt{22+12\sqrt{2}} + (11+6\sqrt{2})] + (3+2\sqrt{2})(27-24\sqrt{2})}{54(3+2\sqrt{2})}$$

Từ đó $|A| \leq \sqrt{\dfrac{2\sqrt{11+6\sqrt{2}}\,[\sqrt{22+12\sqrt{2}} + (11+6\sqrt{2})] + 66 + 26\sqrt{2}}{54(3+2\sqrt{2})}}$

$$\rightarrow \text{Min } A = -\sqrt{\frac{2\sqrt{11+6\sqrt{2}}\,[\sqrt{22+12\sqrt{2}} + (11+6\sqrt{2})] + 66 + 26\sqrt{2}}{54(3+2\sqrt{2})}}$$

Rõ ràng kết quả này < -1. Kết hợp 2.1 và 2.2

Suy ra

$$\text{Min } A = -\sqrt{\frac{2\sqrt{11+6\sqrt{2}}\,[\sqrt{22+12\sqrt{2}} + (11+6\sqrt{2})] + 66 + 26\sqrt{2}}{54(3+2\sqrt{2})}}$$

MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC CỦA CÁC NHÀ TOÁN HỌC

1) $$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \quad \forall\ a_1 \ldots a_n \geqslant 0$$

Bất đẳng thức Cô Si

Có 20 cách chứng minh Bất đẳng thức này

2) $$(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2 \quad \forall\ a_i,\ b_i \in \mathbf{R}$$

Bất đẳng thức Bunhiacôpski

Có 6 cách chứng minh Bất đẳng thức này

3) Giả sử $-1 < x \neq 0$. Khi đó

$$(1 + x)^a \geqslant 1 + ax \text{ nếu } a \geqslant 1 \text{ hoặc } a \leqslant 0$$

$$(1 + x)^a < 1 + ax \text{ nếu } 0 < a < 1$$

Bất đẳng thức Bec nu li

4) Cho $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ với $p, q \in \mathbf{Q}^+$ và $a_i,\ b_i \geqslant 0$ $(i = \overline{1, n})$ khi đó

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

Bất đẳng thức HöLDer

5) Cho $1 < p \in \mathbf{Q}$ và $a_i,\ b_i \geqslant 0$ $(i = \overline{1, n})$. Khi đó

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^p + b_i^p)^{1/p} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p + \sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}$$

Bất đẳng thức Mincôpski

6) Cho $a_1, \dots a_n > 0$. Đặt : $m = \min\limits_{i=\overline{1,n}} \{a_i\}$, $M = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \{a_i\}$

CMR : $n^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leqslant \frac{n^2(m+M)^2}{4mM}$

Bất đẳng thức Kantôrôvich

7) Cho $\begin{cases} 0 < a \leqslant a_1, a_2, \dots a_n \leqslant A \\ 0 < b \leqslant b_1, b_2, \dots b_n \leqslant B \end{cases}$ Khi đó

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}\right)^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

Bất đẳng thức G.Polya – G.Szegö

8) Cho $a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 > 0$. Khi đó $\forall\, b_1, \dots b_n \in \mathbb{R}$ ta có

$$(a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2) \leqslant (a_1 b_1 - \dots - a_n b_n)^2$$

Bất đẳng thức Aczela

9) Cho 2 bộ số $a_1, \dots a_n$ và $b_1 \dots b_n$ $(b_1 \geqslant b_2 \geqslant \dots \geqslant b_n \geqslant 0)$

Đặt $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$ $(k = \overline{1, n})$. Gọi $m = \min\{S_k\}$, $M = \max\{S_k\}$

Khi đó $\qquad mb_1 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant Mb_1$

Bất đẳng thức Abel

10) Cho $a_i \in \mathbb{R}^+$ $(i = \overline{1, n})$ và $n \geqslant$ Đại số $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.

Khi đó

1) $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) > 1 + S_n$

2) $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) > 1 - S_n$ $(0 < a_i < 1\ \forall\, i = \overline{1, n})$

3) $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) < \dfrac{1}{1 - S_n}$ $(S_n < 1)$

4) $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) < \dfrac{1}{1 - S_n}$ $(0 < a_i < 1 ; S_n < 1)$

Bất đẳng thức Vâyetstrat

11) Cho $0 < a \leq a_1, a_2, \dots a_n \leq A$.

$0 < b \leq b_1, b_2, \dots b_n \leq B$. Khi đó ta có

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \right| \leq \frac{1}{4} (A-a)(B-b)$$

Bất đẳng thức Grüssa

12) Cho $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$(n - 1) \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i^2} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2.$$

Bất đẳng thức Sieyfer

13) Cho $a_i, b_i > 0$ $(i = \overline{1, n})$ và $1 \leq p \leq 2$. Khi đó

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p}{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{p-1}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{p-1}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^p}{\sum_{i=1}^{n} b_i^{p-1}}$$

Bất đẳng thức BeckenBach

14) Cho 2 dãy $\{a_1, \dots a_n\}$ và $\{b_1, \dots b_n\}$. Khi đó

1 $n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$ nếu 2 dãy đã cho đơn điệu cùng chiều

2 $n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$ Nếu 2 dãy đã cho đơn điệu ngược chiều với nhau

Bất đẳng thức Trê Bư sep

15) Cho $0 < |\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Khi đó $\frac{2}{\pi} \leqslant \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$

Bất đẳng thức Jordana

16) Cho hàm $y = f(x)$ đơn điệu tăng và liên tục trên đoạn $[0, c]$ $(c > 0)$

Nếu $f(0) = 0$, $a \in [0, c]$ và $b \in [0, f(c)]$ thì

$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx \geqslant ab$$

Bất đẳng thức Younga

17) 1 Cho a, b, c, d $\geqslant 0$. Khi đó

$$\sqrt{\frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}}$$

2. Cho $a_1, \ldots a_n \geqslant 0$. Đặt $A_k^n = \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n}^{n} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$

và $S_k^n = \left(\frac{A_k^n}{C_n^k}\right)^{1/k}$. Khi đó $\forall\ k = \overline{1, n-1}$ ta có

$$S_k^n \geqslant S_{k+1}^n$$

Bất đẳng thức Niu Tơn - Macloranh

> **Chú ý :** Nói chung tất cả các sách xuất bản trong và ngoài nước đều dẫn ra cách chứng minh dựa trên định lý Lagrange. Tuy nhiên có thể sử dụng Bất đẳng thức Cô Si để chứng minh Bất đẳng thức này. Cách chứng minh mang đầy tính nghệ thuật này sẽ được trình bày ở Tập 2.

MỤC LỤC

Trang

Sổ tay Đại số cấp III

CÁC PHƯƠNG PHÁP VÀ KỸ THUẬT CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Tập 1 :

TRẦN PHƯƠNG

Chịu trách nhiệm xuất bản

VƯƠNG LAN

Chịu trách nhiệm bản thảo :

PHẠM HẬU

Biên tập :

ĐỨC NHÂN

Sửa bản in :

DƯƠNG LY

Bìa :

NGUYỄN NƯƠNG MINH HƯƠNG

NHÀ XUẤT BẢN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

62 Nguyễn Thị Minh Khai - Q. 1

Dây nói : 225340 - 296764 - 296713 - 222726

Số lượng in 3000 cuốn (đợt I in 1500 cuốn), khổ 14,5 x 20,5cm tại Xí nghiệp in Trường Văn Hóa. Số xuất bản : 75 TK/TP ngày 5 - 3 - 1994 Cục xuất bản. In xong và nộp lưu chiểu tháng 6.1994