

CHỦ ĐỀ 3: HÀM SỐ LŨY THỪA, MŨ VÀ LOGARIT

LÝ THUYẾT

I. HÀM SỐ LŨY THỪA

1. Định nghĩa

- Hàm số $y = x^\alpha$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ được gọi là hàm số lũy thừa.

2. Tập xác định

Tập xác định của hàm số $y = x^\alpha$ là:

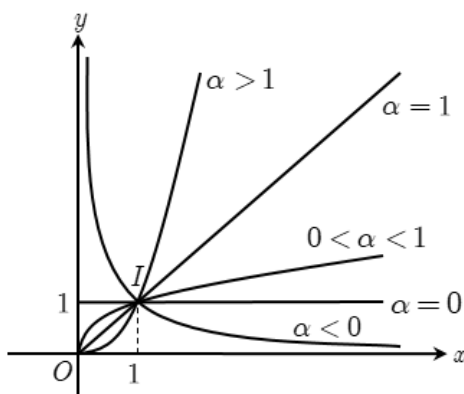
- $D = \mathbb{R}$ nếu α là số nguyên dương
- $D = \mathbb{R}$ nếu α là số nguyên âm hoặc bằng 0
- $D = \mathbb{R}$ nếu α không nguyên

3. Đạo hàm của hàm lũy thừa

- Hàm số $y = x^\alpha$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$
- Đạo hàm của hàm hợp $[u^\alpha(x)]' = \alpha \cdot u^{\alpha-1}(x) \cdot u'(x)$

4. Tính chất và đồ thị của hàm lũy thừa

- Đồ thị hàm số $y = x^\alpha$ với $(\alpha < 0)$ nhận Ox làm tiệm cận ngang, nhận Oy làm tiệm cận đứng. Khi $\alpha > 0$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận.



- Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm $I(1;1)$.
- Lưu ý:** Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó. Chẳng hạn: $y = x^3$, $y = x^{-2}$, $y = x^\pi$.

II. HÀM SỐ MŨ

1. Định nghĩa

- Hàm số $y = a^x$ với $a > 0, a \neq 1$ được gọi là hàm số mũ với cơ số a

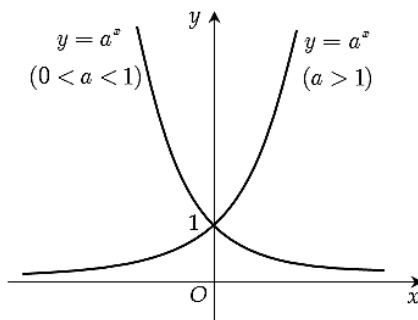
2. Tập xác định và tập giá trị

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Tập giá trị: $T = (0; +\infty)$

3. Tính đơn điệu và đồ thị

- Khi $a > 1$ thì hàm số $y = a^x$ đồng biến, khi đó ta có $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

- Khi $0 < a < 1$ thì hàm số $y = a^x$ nghịch biến, khi đó ta có $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$



Đồ thị nhận Ox là tiệm cận ngang, luôn đi qua điểm $(0;1)$ và $(1;a)$, nằm về phía trên trục hoành ($y = a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

4. Đạo hàm

$$\begin{aligned} \oplus (a^x)' &= a^x \cdot \ln a & \oplus (a^u)' &= u' \cdot a^u \cdot \ln a \\ \oplus (\sqrt[n]{u})' &= \frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}} & \oplus (e^x)' &= e^x & \oplus (e^u)' &= u \cdot e^u \end{aligned}$$

III. HÀM SỐ LOGARIT

1. Định nghĩa

- Hàm số dạng $y = \log_a x$, ($a > 0; a \neq 1$) được gọi là hàm số logarit cơ số a .

2. Tập xác định và tập giá trị

- Tập xác định: $D = (0; +\infty)$
- Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$.

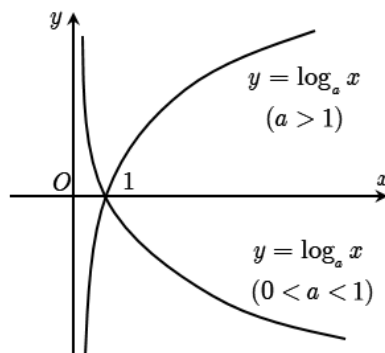
3. Tính đơn điệu và đồ thị

- Khi $a > 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên D , khi đó nếu:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x).$$

- Khi $0 < a < 1$ thì hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên D , khi đó nếu:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x).$$



4. Đạo hàm

$$\oplus (\log_a |x|)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \Rightarrow (\log_a |u|)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad \oplus (\ln x)' = \frac{1}{x} (x > 0) \Rightarrow (\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$$

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Tìm tập hợp giá trị của m để hàm số $y = (m^2 - 3m + 1)^x$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

A. $\left(0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 3\right)$.

B. $\left(-\infty; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right) \setminus \{0; 3\}$.

C. $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

D. $(0; 3)$.

Lời giải**Chọn A**

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ khi và chỉ khi $0 < m^2 - 3m + 1 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 1 > 0 \\ m^2 - 3m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ m < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3+\sqrt{5}}{2} < m < 3 \\ 0 < m < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

VÍ DỤ 2: Cho hàm số $y = \frac{e^x}{\cos x}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y'' - 2y = 2y' \tan x$.

B. $y'' = -2y' \tan x$.

C. $y'' = 2y' \tan x$.

D. $y'' + 2y = 2y' \tan x$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có: $y' = \frac{e^x (\cos x + \sin x)}{\cos^2 x} = y + y \tan x$

Đạo hàm cấp hai: $y'' = y' + y' \cdot \tan x + (1 + \tan^2 x) = 2 \frac{e^x}{\cos x} + 2 \frac{e^x}{\cos x} \tan x + 2 \frac{e^x}{\cos x} \tan^2 x$
 $= 2y + 2y \tan x + 2y \tan^2 x \Rightarrow y'' - 2y = 2(y + y \tan x) \tan x = 2y' \cdot \tan x$

VÍ DỤ 3: Cho hàm số $y = \frac{1}{(x-m) \ln(x^2 - 2(3m-1)x + 9m^2)}$. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số xác định trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. 12.

B. 18.

C. 11.

D. 8.

Lời giải**Chọn A**

Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x - m \neq 0 \\ x^2 - 2(3m-1)x + 9m^2 > 0, \forall x \in (2; +\infty) \\ x^2 - 2(3m-1)x + 9m^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ x^2 - 2(3m-1)x + 9m^2 > 0, \forall x \in (2; +\infty) \\ x^2 - 2(3m-1)x + 9m^2 \neq 1 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} m \leq 2 \\ g(x) = x^2 - 2(3m-1)x + 9m^2 > 0, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases} \cdot (*)$

Xét $\Delta' = (3m-1)^2 - 9m^2 = 1 - 6m$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} m \leq 2 \\ \Delta' = 1 - 6m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{6} < m \leq 2$. Khi đó $g(x) > 0, \forall x \in (2; +\infty)$.

Trường hợp 2: $\begin{cases} m \leq 2 \\ \Delta' = 1 - 6m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{6}$.

Ta có $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3m - 1 = -\frac{1}{2} \notin (2; +\infty)$. Khi đó $g(x) > 0, \forall x \in (2; +\infty)$.

Trường hợp 3: $\begin{cases} m \leq 2 \\ \Delta' = 1 - 6m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{6}$. Gọi $x_1; x_2 (x_1 < x_2)$ là các nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

Khi đó $g(x) > 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow x_1 < x_2 \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1. g(2) \geq 0 \\ \frac{x_1 + x_2}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{6} \\ 9m^2 - 12m + 8 \geq 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{6}$.

Kết hợp cả 3 trường hợp ta có các giá trị m thỏa (*) là $m \leq 2$.

Với $\begin{cases} m \leq 2 \\ x^2 - 2(3m-1)x + 9m^2 \neq 1, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases} \cdot (**)$

Ta có $g'(x) = 2x - 2(3m-1) = 0 \Leftrightarrow x = 3m - 1$.

Nếu $2 \leq 3m - 1 \Leftrightarrow 1 \leq m$ ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$	2	$3m - 1$	$+\infty$
y'		-	0	+
y	$+\infty$			$+\infty$

$6m - 1$

Khi đó $(**) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m \leq 2 \\ 1 < 6m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$.

Nếu $2 > 3m - 1 \Leftrightarrow m < 1$ ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$3m - 1$	2	$+\infty$
y'		-	0	+
y	$+\infty$			$+\infty$

$6m - 1$ $9m^2 - 12m + 8$

Khi đó $(**) \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 1 \leq 9m^2 - 12m + 8 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1$.

Do đó $\begin{cases} m \leq 2 \\ x^2 - 2(3m-1)x + 9m^2 \neq 1, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 2$.

Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(2; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 2$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-10; 10) \Rightarrow m \in \{-9, -8, \dots, 2\} \\ m \leq 2 \end{cases} \text{ Suy ra có 12 giá trị nguyên của } m \text{ thỏa đề bài.}$$

VÍ DỤ 4: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{m \ln x^2 - 2 \ln x + 3 + m}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$. Gọi $a \in S$, $b \in S$ lần lượt là số nguyên dương nhỏ nhất và số nguyên âm lớn nhất. Tính $P = 2a + 3b$.

A. $P = -10$.

B. $P = 4$.

C. $P = 10$.

D. $P = -4$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$.

Đề hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ thì phương trình $m \ln x^2 - 2 \ln x + 3 + m = 0$ vô nghiệm với mọi $x \in (0; +\infty)$.

Trường hợp 1: $m = 0$ thì phương trình trở thành $-2 \ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$.

Vậy $m = 0$ không thỏa mãn.

Trường hợp 2: $m \neq 0$ đặt $t = \ln x$, khi đó $x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow t \in \mathbb{R}$.

Phương trình $m \ln x^2 - 2 \ln x + 3 + m = 0$ trở thành $mt^2 - 2t + 3 + m = 0$

Để phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = (-2)^2 - 4m(3+m) < 0$

$$\Leftrightarrow -4m^2 - 12m + 4 < 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{-3 + \sqrt{13}}{2}; +\infty\right).$$

Do đó $a = 1$; $b = -4 \Rightarrow P = 2a + 3b = 2 - 12 = -10$.

VÍ DỤ 5: Với các số thực dương a, b để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{2}}{x-2}$ có đúng một đường tiệm cận, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_{(a+1)} \frac{b}{2}$.

A. -2 .

B. 2 .

C. 1 .

D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Do $a, b > 0$ nên hàm số luôn có tập xác định $D = \left(-\frac{a}{b}; +\infty\right) \setminus \{2\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 0$.

$$\text{Mà } y = \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{2}}{x-2} = \frac{a+bx-2}{(x-2)(\sqrt{a+bx} + \sqrt{2})}, \text{ đặt } f(x) = a+bx-2.$$

Để đồ thị hàm số trên có đúng một đường tiệm cận thì $f(2) = 0 \Leftrightarrow a + 2b = 2$.

Đặt $a+1=x$, $\frac{b}{2}=y$ ta suy ra $x+4y=3 \Rightarrow P=\log_x y$, (do $a>0$ nên $x>1$).

Lại có $3=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+4y \geq 3\sqrt[3]{x^2y} \Leftrightarrow x^2y \leq 1 \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{x^2}$.

Vậy $P=\log_x y \leq \log_x \left(\frac{1}{x^2}\right) = -2$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \end{cases}$.