PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 1. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT.

1) PHƯƠNG PHÁP

- Bước 1: Để tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên miền $[a;b]$ ta sử dụng máy tính Casio với lệnh MODE 7 (Lập bảng giá trị)

- Bước 2: Quan sát bảng giá trị máy tính hiển thị, giá trị lớn nhất xuất hiện là max , giá trị nhỏ nhất xuất hiện là min

- Chú ý:

Ta thiết lập miền giá trị của biến x Start a End b Step $\frac{b-a}{19}$ (có thể làm tròn để Step đẹp)

Khi đề bài liên có các yếu tố lượng giác $\sin x, \cos x, \tan x...$ ta chuyển máy tính về chế độ Radian

2) VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1.[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-2x^2-4x+1$ trên đoạn $[1;3]$

A. $\max=\frac{67}{27}$ **B.** $\max=-2$ **C.** $\max=-7$ **D.** $\max=-4$

Hướng dẫn giải

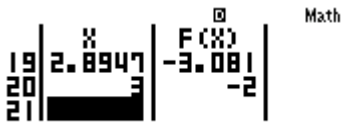
❖ **Cách 1: CASIO**

➢ Sử dụng chức năng MODE 7 của máy tính Casio với thiết lập Start 1 End 3 Step $\frac{3-1}{19}$

MODE 7 ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 3 ▶ − 2 ALPHA) x^2 − 4 ALPHA) + 1 = = 1 = 3 = (3 − 1) ÷ 1 9 =

1

➢ Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy giá trị lớn nhất $F(X)$ có thể đạt được là $f(3)=-2$



Vậy $\max=-2$, dấu = đạt được khi $x=3$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

▪ Tính đạo hàm $y'=3x^2-4x-4$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-\frac{2}{3}\end{array}\right.$

▪ Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
y'			0		
y		$f(1)=-4$		$f(3)=-2$	

- Nhìn bảng biến thiên ta kết luận $\max = f(3) = -2$

❖ **Bình luận:**

- Qua ví dụ 1 ta đã thấy ngay sức mạnh của máy tính Casio, việc tìm Max chỉ cần quan sát bảng giá trị là xong.
- Phương pháp tự luận tìm Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số được tiến hành theo 3 bước:
  +)Bước 1: Tìm miền xác định của biến x.
  +)Bước 2: Tính đạo hàm và xác định khoảng đồng biến nghịch biến.
  +)Bước 3: Lập bảng biến thiên, nhìn vào bảng biến thiên để kết luận.
- Trong bài toán trên đề bài đã cho sẵn miền giá trị của biến x là $[1;3]$ nên ta bỏ qua bước 1.

Ví dụ 2. [Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]
Hàm số $y=|3\cos x-4\sin x+8|$ với $x\in[0;2\pi]$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số . Khi đó tổng $M+m$ bằng bao nhiêu ?

A. $8\sqrt{2}$ **B.** $7\sqrt{3}$ **C.** $8\sqrt{3}$ **D.** 16

Hướng dẫn giải

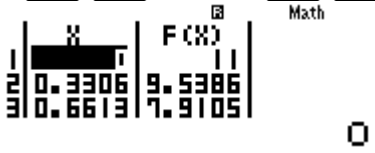
❖ **Cách 1: CASIO**

➢ Để tính toán các bài toán liên quan đến lượng giác ta chuyển máy tính về chế độ Radian

SHIFT MODE 4

➢ Sử dụng chức năng MODE 7 của máy tính Casio với thiết lập Start 0 End 2π Step $\frac{2\pi-0}{19}$

MODE 7 SHIFT hyp 3 cos ALPHA)) − 4 sin ALPHA)) + 8 = = 0 =
2 SHIFT ×10^x = 2 SHIFT ×10^x ÷ 1 9 =



O

➢ Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy giá trị lớn nhất $F(X)$ có thể đạt được là $f(5.2911)=12.989\approx 13=M$

Ta thấy giá trị nhỏ nhất $F(X)$ có thể đạt được là $f(2.314)=3.0252\approx 3=m$

Vậy $M+m=16 \Rightarrow$ Đáp số **D** là chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được :

  $(3\cos x-4\sin x)^2 \le \left(3^2+(-4)^2\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=25$

  $\Rightarrow |3\cos x-4\sin x| \le 5 \Leftrightarrow -5 \le 3\cos x-4\sin x \le 5 \Leftrightarrow 3 \le 3\cos x-4\sin x=8 \le 13$

- Vậy $3 \le |3\cos x-4\sin x+8| \le 13$

❖ **Bình luận:**

- Nếu bài toán liên quan đến các đại lượng lượng giác ta nên chuyển máy tính về chế độ Radian để được kết quả chính xác nhất.
- Trong Bất đẳng thức Bunhiacopxki có dạng $(ax+by)^2 \le \left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)$. Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

Ví dụ 3. [Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]
Cho các số x,y thỏa mãn điều kiện $y \le 0, x^2+x-y-12=0$ Tìm giá trị nhỏ nhất : $P=xy+x+2y+17$

A. -12 **B**. -9 **C**. -15 **D**. -5

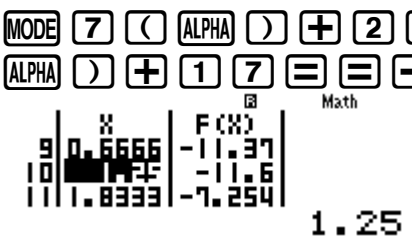
Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1: CASIO**

➢ Từ $x^2+x-y-12=0$ ta rút được $y=x^2+x-12$ Lắp vào P ta được : $P=(x+2)\left(x^2+x-12\right)+x+17$

➢ Để tìm Min của P ta sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7, tuy nhiên việc còn thiếu của chúng ta là miền giá trị của x . Để tìm điều này ta xét $y \le 0 \Leftrightarrow x^2+x-12 \le 0 \Leftrightarrow -4 \le x \le 3$

Sử dụng MODE 7 với thiết lập Start -4 End 3 Start $\frac{7}{19}$ ta được:



Quan sát bảng giá trị ta thấy giá trị nhỏ nhất là $f(1.25)=-11.6 \approx -12$

Vậy đáp số chính xác là **A**

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Dùng phương pháp dồn biến đưa biểu thức P chứa 2 biến trở thành biểu thức P chứa 1 biến x

  $\Rightarrow P=(x+2)\left(x^2+x-12\right)+x+17=x^3+3x^2-9x-7$

  Đặt $f(x)=x^3+3x^2-9x-7$

- Tìm miền giá trị của biến x ta có : $y \le 0 \Leftrightarrow x^2+x-12 \le 0 \Leftrightarrow -4 \le x \le 3$
- Khảo sát hàm $f(x)$ ta có : $f'(x)=3x^2+6x-9$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$

  So sánh $f(1)=-12; f(-3)=20; f(-4)=13; f(3)=20$

Vậy giá trị nhỏ nhất $f(\max)=-12$ đạt được khi $x=1$

❖ **Bình luận:**

- Một bài tìm Min max sử dụng phương pháp dồn biến hay. Việc tìm cận và tìm giá trị nhỏ nhất có sự đóng góp rất lớn của Casio để tiết kiệm thời gian.

Ví dụ 4. [Khảo sát chất lượng chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm 2017]

Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{2mx+1}{m-x}$ trên đoạn $[2;3]$ là $-\dfrac{1}{3}$ khi m nhận giá trị bằng :

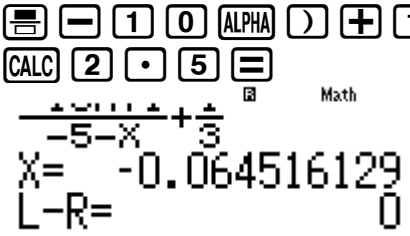
A. -5 **B.** 1 **C.** 0 **D.** -2

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1: CASIO**

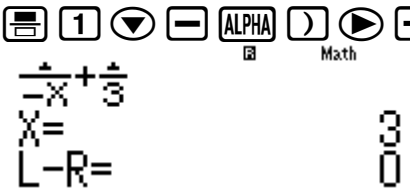
➢ Ta hiểu nếu giá trị nhỏ nhất của $y=-\dfrac{1}{3}$ trên đoạn $[2;3]$ có nghĩa là phương trình $y+\dfrac{1}{3}=0$ có nghiệm thuộc đoạn $[2;3]$

➢ Thử nghiệm đáp án A với $m=-5$ ta thiết lập $\dfrac{-10x+1}{-5-x}+\dfrac{1}{3}=0$. Sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE



Ta thấy khi $y=\dfrac{1}{3}$ thì $x=-0.064...$ không phải là giá trị thuộc đoạn $[2;3]$ vậy đáp án **A** sai

➢ Tương tự như vậy ta thấy đáp án C đúng với $m=0$ khi đó y có dạng $\dfrac{1}{-x}$



Ta thấy khi $y=\dfrac{1}{3}$ khi $x=3$ là giá trị thuộc đoạn $[2;3]$ $\Rightarrow$ đáp án **C** chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

▪ Tính đạo hàm $y'=\dfrac{2m(m-x)-(2mx+1)(-1)}{(m-x)^2}=\dfrac{2m^2+1}{(m-x)^2}>0$ với mọi $x\in D$

$\Rightarrow$ Hàm y luôn đồng biến

$\Rightarrow$ Hàm y đạt giá trị lớn nhất tại cận trên $x=3$

▪ Vậy $y(3)=-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{6m+1}{m-3}=\dfrac{-1}{3}\Leftrightarrow m=0$

❖ **Bình luận:**

- Ta có thể sử dụng máy tính Casio theo VD1 và VD2 với chức năng MODE 7

Ta thấy với đán án C hàm số $y=-\dfrac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất $-\dfrac{1}{3}$ khi $x=3$

MODE 7 ▼ 1 ▼ − ALPHA) = = 2 = 3 = 1 ÷ 1 9 =

Ví dụ 5. [Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Cho hàm số $y = a\sin x + b\cos x + x \ \left(0 < x < 2\pi\right)$ đạt cực đại tại các điểm $x = \dfrac{\pi}{3}$ và $x = \pi$.

Tính giá trị của biểu thức $T = a + b\sqrt{3}$

A. $T = 2\sqrt{3}$ **B.** $T = 3\sqrt{3} + 1$ **C.** $T = 2$ **D.** $T = 4$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1: CASIO**

➢ Ta hiểu hàm số đạt cực trị tại $x = x_0$ thì x_0 là nghiệm của phương trình $y' = 0$

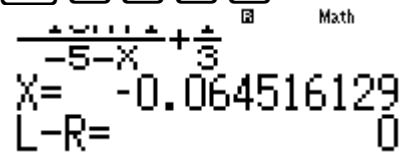
➢ Tính $y' = a\cos x - b\sin x + 1$.

Ta có $y'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}a - \dfrac{\sqrt{3}}{2}b + \dfrac{\pi}{3} = 0$ (1)

Lại có $y'\left(\pi\right) = 0 \Leftrightarrow -a + \pi = 0 \ \Rightarrow a = \pi$. Thế vào (1) ta được

➢ SHIFT SOLVE

− 1 0 ALPHA) + 1 ▼ − 5 − ALPHA) ▶ + 1 ▼ 3 SHIFT CALC 2 • 5 =



Ta thấy khi $y = \dfrac{1}{3}$ thì $x = -0.064...$ không phải là giá trị thuộc đoạn $\left[2;3\right]$ vậy đáp án **A** sai

➢ Tương tự như vậy ta thấy đáp án C đúng với $m = 0$ khi đó y có dạng $\dfrac{1}{-x}$

1 ▼ − ALPHA) ▶ + 1 ▼ 3 SHIFT CALC 2 • 5 =

Ta thấy khi $y = \dfrac{1}{3}$ khi $x = 3$ là giá trị thuộc đoạn $\left[2;3\right] \Rightarrow$ đáp án **C** chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

▪ Tính đạo hàm $y' = \dfrac{2m\left(m-x\right) - \left(2mx+1\right)\left(-1\right)}{\left(m-x\right)^2} = \dfrac{2m^2+1}{\left(m-x\right)^2} > 0$ với mọi $x \in D$

$\Rightarrow$ Hàm y luôn đồng biến

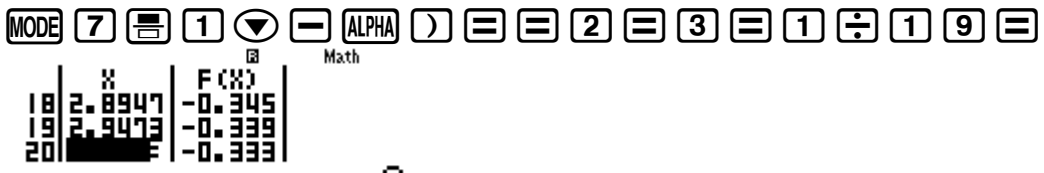
$\Rightarrow$ Hàm y đạt giá trị lớn nhất tại cận trên $x = 3$

▪ Vậy $y\left(3\right) = -\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \dfrac{6m+1}{m-3} = \dfrac{-1}{3} \Leftrightarrow m = 0$

❖ **Bình luận:**

• Ta có thể sử dụng máy tính Casio theo VD1 và VD2 với chức năng MODE 7

Ta thấy với đán án C hàm số $y=-\frac{1}{x}$ đạt giá trị lớn nhất $-\frac{1}{3}$ khi $x=3$



3

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. [Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Gọi M,m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{x^2}{e^x}$ trên đoạn $[-1;1]$. Khi đó

A. $M=\frac{1}{e};m=0$ **B.** $M=e;m=0$ **C.** $M=e,m=\frac{1}{e}$ **D.** $M=e;m=1$

Bài 2. [Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=\sqrt{x+3}+\sqrt{6-x}$

A. $M=3$ **B.** $M=3\sqrt{2}$ **C.** $M=2\sqrt{3}$ **D.** $M=2+\sqrt{3}$

Bài 3. [Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x^2-2x+3\right)^2-7$

A. $\min y=-5$ **B.** $\min y=-7$

C. $\min y=-3$ **D.** Không tồn tại min

Bài 4. [Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Tìm m để hàm số $y=\frac{mx-4}{x+m}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5 trên $[-2;6]$

A. $m=\frac{2}{6}$ **B.** $m=-\frac{4}{5}$ **C.** $m=\frac{3}{4}$ **D.** $m=\frac{6}{7}$

Bài 5. [Thi thử THPT Vũ Văn Hiếu –Nam Định lần 1 năm 2017]

Gọi M,n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x^2+1\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ thì :

A. $M=19;m=1$ **B.** $M=0;m=-19$ **C.** $M=0;m=-19$ **D.** Kết quả khác

Bài 6. [Thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc lần 1 năm 2017]

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}$ là :

A. $\min y=0$ **B.** $\min y=1$

C. $\min y=\sqrt{4-2\sqrt{2}}$ **D.** Không tồn tại GTNN

Bài 7. [Thi thử chuyên Trần Phú – Hải Phòng lần 1 năm 2017]

Cho hàm số $y=3\sin x-4\sin^3 x$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ bằng :

A. 1. **B.** 7 **C.** -1 **D.** 3

Bài 8. [Thi HK1 THPT chuyên Ngoại Ngữ - ĐHSP năm 2017]

Gọi M,n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left(x^2-3\right)e^x$ trên đoạn $[0;2]$. Giá trị của biểu thức $P=\left(m^2-4M\right)^{2016}$ là :

A. 0 **B.** e^{2016} **C.** 1 **D.** 2^{2016}

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. [Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

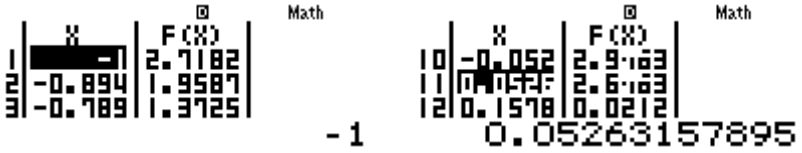
Gọi M, m là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{x^2}{e^x}$ trên đoạn $[-1;1]$. Khi đó

A. $M = \dfrac{1}{e}; m = 0$ **B.** $M = e; m = 0$ **C.** $M = e, m = \dfrac{1}{e}$ **D.** $M = e; m = 1$

Hướng dẫn giải

- Lập bảng giá trị cho $y = f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$ với lệnh MODE 7 Start -1 End 1 Step $\dfrac{2}{19}$

MODE 7 (ALPHA) x^2 ▼ ALPHA $\times 10^x$ $x^{\square}$ ALPHA) = = − 1 = 1 = 2 ÷ 1 9 =



- Quan sát bảng giá trị thấy ngay $M = 2.7182 = e$ đạt được khi $x = -1$ và $m = 2.6\text{x}10^{-3} \approx 0$ Sử dụng Casio

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Bài 2. [Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$

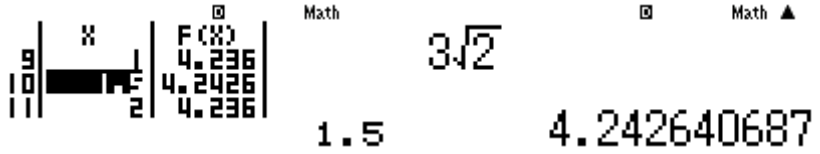
A. $M = 3$ **B.** $M = 3\sqrt{2}$ **C.** $M = 2\sqrt{3}$ **D.** $M = 2 + \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

- Theo điều kiện xác định thì $\begin{cases} x+3 \ge 0 \\ 6-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le k \le 6$

- Lập bảng giá trị cho $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{6-x}$ với lệnh MODE 7 Start -3 End 6 Step 0.5

MODE 7 $\sqrt{\square}$ ALPHA) + 3 ▶ + $\sqrt{\square}$ 6 − ALPHA) = = − 3 = 6 = 0 . 5 =



- Quan sát bảng giá trị thấy ngay $M = 4.2421 = 3\sqrt{2}$ đạt được khi $x = -1$ và $m = 2.6\text{x}10^{-3} \approx 0$ Sử dụng Casio

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Bài 3. [Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \left(x^2 - 2x + 3\right)^2 - 7$

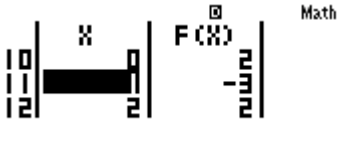
A. $\min y = -5$ **B.** $\min y = -7$

C. $\min y = -3$ **D.** Không tồn tại min

Hướng dẫn giải

- Đề bài không nói gì đến miền giá trị của x . Khi đó ta chọn Start -9 End 10 Step 1
- Lập bảng giá trị cho $y=\left(x^2-2x+3\right)^2-7$ với lệnh MODE 7

MODE 7 (ALPHA) x^2 − 2 ALPHA) + 3) x^2 − 7 = = − 9 = 1 0 = 1 =



1

- Quan sát bảng giá trị thấy ngay $\min y=-3$ đạt được khi $x=1$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 4. [Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Tìm m để hàm số $y=\dfrac{mx-4}{x+m}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 5 trên $[-2;6]$

A. $m=\dfrac{2}{6}$ **B.** $m=-\dfrac{4}{5}$ **C.** $m=\dfrac{3}{4}$ **D.** $m=\dfrac{6}{7}$

Hướng dẫn giải

- Thử với $m=\dfrac{2}{6}$ thì giá trị lớn nhất là 25 $\Rightarrow$ **A** sai

MODE 7 ▤ 2 ALPHA) ÷ 6 − 4 ▼ ALPHA) + 2 ÷ 6 = = − 2 = 6 = 0 • 5 =

-0.5

- Tương tự như vậy với $m=34$ thì giá trị lớn nhất là 5. $\Rightarrow$ Đáp số **C** chính xác

MODE 7 ▤ 3 4 ALPHA) − 4 ▼ ALPHA) + 3 4 = = − 2 = 6 = 0 • 5 =

6

Bài 5. [Thi thử THPT Vũ Văn Hiếu –Nam Định lần 1 năm 2017]

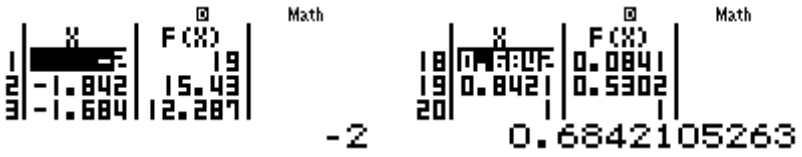
Gọi M,n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^3-3x^2+1\right|$ trên đoạn $[-2;1]$ thì :

A. $M=19;m=1$ **B.** $M=0;m=-19$ **C.** $M=0;m=-19$ **D.** Kết quả khác

Hướng dẫn giải

- Hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối ta thêm lệnh SHIFT HYP. Sử dụng MODE 7 với Start -2 End 1 Step $\dfrac{3}{19}$

MODE 7 SHIFT hyp ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 3 ▶ − 3 ALPHA) x^2 + 1 = = − 2 = 1 = 3 ÷ 1 9 =



- Quan sát bảng giá trị thấy $M=19; m=0$. $\Rightarrow$ Đáp số **C** chính xác

Bài 6. [Thi thử THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc lần 1 năm 2017]
Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}$ là :

A. $\min y=0$ **B**. $\min y=1$

C. $\min y=\sqrt{4-2\sqrt{2}}$ **D**. Không tồn tại GTNN

Hướng dẫn giải

- Vì chu kì của hàm sin, cos là 2π nên ta chọn Start -2π End 2π Step $\frac{4\pi}{19}$

- Lập bảng giá trị cho $y=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}$ với lệnh MODE 7

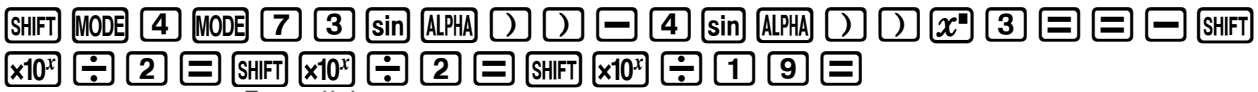
Quan sát bảng giá trị thấy ngay $M=1.0162\approx 1$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

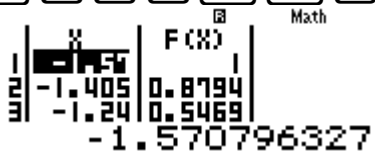
Bài 7. [Thi thử chuyên Trần Phú – Hải Phòng lần 1 năm 2017]
Cho hàm số $y=3\sin x-4\sin^3 x$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ bằng :

A. 1. **B**. 7 **C**. –1 **D**. 3

Hướng dẫn giải

- Lập bảng giá trị cho $y=3\sin x-4\sin^3 x$ với lệnh MODE 7 Start $-\frac{\pi}{2}$ End $\frac{\pi}{2}$ Step $\frac{\pi}{19}$





Quan sát bảng giá trị lớn nhất là $1\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 8. [Thi HK1 THPT chuyên Ngoại Ngữ - ĐHSP năm 2017]
Gọi M,n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left(x^2-3\right)e^x$ trên đoạn $[0;2]$. Giá trị của biểu thức $P=\left(m^2-4M\right)^{2016}$ là :

A. 0 **B**. e^{2016} **C**. 1 **D**. 2^{2016}

Hướng dẫn giải

- Lập bảng giá trị cho $y=\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1+\cos x}$ với lệnh MODE 7 Start 0 End 2 Step $\frac{2}{19}$

MODE 7 (ALPHA) x^2 − 3) ALPHA $\times 10^x$ $x^{\blacksquare}$ ALPHA) = = 0 = 2 = 2 ÷ 1 9 =

- Quan sát bảng giá trị ta thấy $m = -5.422$ và $M = 7.389$

  $\Rightarrow P = \left(m^2 - 4M\right)^{2016} = \left(-0.157916\right)^{2016} \approx 0$

  $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**.

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 2. TÌM NHANH KHOẢNG ĐỒNG BIẾN – NGHỊCH BIẾN.

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Tính đồng biến nghịch biến : Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng I. Nếu $f'(x)\ge 0$ với mọi $x\in I$ (hoặc $f'(x)\le 0$ với mọi $x\in I$) và $f'(x)=0$ tại hữu hạn điểm của I thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên I

2. Cách 1 Casio : Sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của máy tính Casio . Quan sát bảng kết quả nhận được , khoảng nào làm cho hàm số luôn tăng thì là khoảng đồng biến, khoảng nào làm cho hàm số luôn giảm là khoảng ngịch biến.

3. Cách 2 Casio : Tính đạo hàm, thiết lập bất phương trình đạo hàm, cô lập m và đưa về dạng $m\ge f(x)$ hoặc $m\le f(x)$. Tìm Min, Max của hàm $f(x)$ rồi kết luận.

4. Cách 3 Casio : Tính đạo hàm, thiết lập bất phương trình đạo hàm. Sử dụng tính năng giải bất phương trình INEQ của máy tính Casio (đôi với bất phương trình bậc hai, bậc ba)

2) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Đề minh họa thi THPT Quốc Gian lần 1 năm 2017]

Hỏi hàm số $y=2x^4+1$ đồng biến trên khoảng nào ?

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ **B.** $(0;+\infty)$ **C.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ **D.** $(-\infty;0)$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO MODE 7**

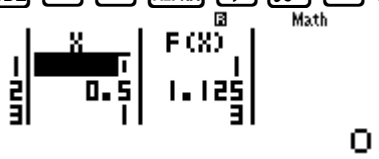
➢ Để kiểm tra đáp án A ta sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 với thiết lập Start -10 End $-\frac{1}{2}$ Step 0.5

MODE 7 2 ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 4 ▶ + 1 = = − 1 0 = − 0 • 5 = 0 • 5 =

Ta thấy ngay khi x càng tăng thì $f(x)$ càng giảm $\Rightarrow$ Đáp án **A** sai

➢ Tương tự như vậy, để kiểm tra đáp án B ta cũng sử dụng chức năng MODE 7 với thiết lập Start 0 End 9 Step 0.5

MODE 7 2 ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 4 ▶ + 1 = = 0 = 9 = 0 • 5 =



Ta thấy khi x càng tăng thì tương ứng $f(x)$ càng tăng $\Rightarrow$ Đáp án **B** đúng

❖ **Cách 2 : CASIO ĐẠO HÀM**

➢ Kiểm tra khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ ta tính $f'\left(-\frac{1}{2}-0.1\right)$

SHIFT ∫ 2 ALPHA) $x^{\square}$ 4 ▶ + 1 ▶ − ▤ 1 ▼ 2 ▶ − 0 • 1 =

$\frac{d}{dx}(2X^{-}+1)|_{x=-\frac{1}{2}}$ Math ▲ ▷

$-\frac{216}{125}$

Đạo hàm ra âm (hàm số nghịch biến) $\Rightarrow$ Giá trị $-\frac{1}{2}-0.1$ vi phạm $\Rightarrow$ Đáp án **A** sai

- Kiểm tra khoảng $(-\infty;0)$ ta tính $f'(0-0.1)$

◀ ◀ ◀ ◀ ◀ ◀ DEL DEL DEL DEL DEL DEL =

$\frac{d}{dx}(2X^4+1)|_{x=-0.1}$ ▷

$-\frac{1}{125}$

Điểm $0-0.1$ vi phạm $\Rightarrow$ Đáp án **D** sai và **C** cũng sai $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

- Xác minh thêm 1 lần nữa xem B đúng không . Ta tính $f'(1+0.1)=\frac{1331}{125}$ $\Rightarrow$ Chính xác

◀ ◀ ◀ ◀ ◀ DEL 1 + =

$\frac{d}{dx}(2X^4+1)|_{x=1+0.1}$ ▷

$\frac{1331}{125}$

❖ **Cách 3 : CASIO MODE 5 INEQ**

- Hàm số bậc 4 khi đạo hàm sẽ ra bậc 3. Ta nhẩm các hệ số này trong đầu. Sử dụng máy tính Casio để giải bất phương trình bậc 3

MODE ▼ 1 2 3 8 = 0 = 0 = 0 = =

$A\leq X$

$0\leq X$

Rõ ràng $x\geq 0$

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Tính đạo hàm $y'=8x^3$
- Để hàm số đồng biến thì $y'\geq 0\Leftrightarrow x^3\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$.
  Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

❖ **Bình luận :**

- Khi sử dụng Casio ta phải để ý : Hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$ thì sẽ **luôn tăng** khi x tăng. Nếu lúc tăng lúc giảm thì không đúng .

Bài 2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m$ đồng biến trên tập xác định khi giá trị của m là :

A. $m\leq 1$ **B.** $m\geq 3$ **C.** $-1\leq m\leq 3$ **D.** $m<3$

Hướng dẫn giải

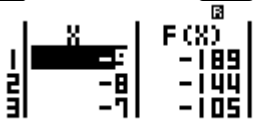
❖ **Cách 1 : CASIO**

- Để giải các bài toán liên quan đến tham số m thì ta phải cô lập m
  Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow y'\geq 0\Leftrightarrow 3x^2+6x+m\geq 0\Leftrightarrow m\geq -3x^3-6x=f(x)$

Vậy để hàm số y đồng biến trên tập xác định thì $m \ge f(x)$ hay $m \ge f(\max)$ với mọi x thuộc R

- Để tìm Giá trị lớn nhất của $f(x)$ ta vẫn dùng chức năng MODE 7 nhưng theo cách dùng của kỹ thuật Casio tìm min - max

MODE 7 − 3 ALPHA) x^2 − 6 ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =



-9

- Quan sát bảng giá trị ta thấy giá trị lớn nhất của $f(x)$ là 3 khi $x=-1$

-1

Vậy $m \ge 3$

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Tính đạo hàm $y' = 3x^2 + 6x + m$
- Để hàm số đồng biến thì $y' \ge 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + m \ge 0$ với mọi $x \in R$ (*)
  $\Leftrightarrow \Delta' \le 0 \Leftrightarrow 9 - 3m \le 0 \Leftrightarrow m \ge 3$

❖ **Bình luận :**

- Kiến thức (*) áp dụng định lý về dấu của tam thức bậc 2 : "Nếu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có $\Delta \le 0$ thì dấu của tam thức bậc 2 luôn cùng dấu với a" .

VD3-[Đề minh họa thi THPT Quốc Gian lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{4}\right)$

A. $\left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ 1 \le m < 2 \end{array}\right.$ **B.** $m < 2$ **C.** $1 \le m < 2$ **D.** $m \ge 2$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Để bài toán dễ nhìn hơn ta tiến hành đặt ẩn phụ : Đặt $\tan x = t$. Đổi biến thì phải tìm miền giá trị của biến mới. Để làm điều này ta sử dụng chức năng MODE 7 cho hàm $f(x) = \tan x$.

SHIFT MODE 4 MODE 7 tan ALPHA)) = = 0 = SHIFT $\times 10^x$ ÷ 4 = (SHIFT $\times 10^x$ ÷ 4) ÷ 1 9 =

0

Ta thấy $0 \le \tan x \le 1$ vậy $t \in (0;1)$

Bài toán trở thành tìm m để hàm số $y = \dfrac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$

- Tính đạo hàm : $y' = \dfrac{(t-m)-(t-2)}{(t-m)^2} = \dfrac{2-m}{(t-m)^2}$

$y'>0\Leftrightarrow\dfrac{2-m}{(t-m)^2}>0\Leftrightarrow m<2$ (1)

➢ Kết hợp điều kiện xác định $t-m\neq 0\Leftrightarrow m\neq t\Rightarrow m\notin(0;1)$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ 1\le m<2 \end{array}\right.\Rightarrow$ Đáp án **A** là chính xác

❖ **Bình luận :**

- Bài toán chứa tham số m ở dưới mẫu thường đánh lừa chúng ta. Nếu không tỉnh táo chúng ta sẽ chọn luôn đáp án **B**
- Tuy nhiên điểm nhấn của bài toán này là phải kết hợp điều kiện ở mẫu số. $m\neq t$ mà $t\in(0;1)$ vậy $m\notin(0;1)$.

VD4-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y=\sin x-\cos x+2017\sqrt{2}mx$ đồng biến trên R

A. $m\ge 2017$ **B.** $m<0$ **C.** $m\ge\dfrac{1}{2017}$ **D.** $m\ge-\dfrac{1}{2017}$

Hướng dẫn giải

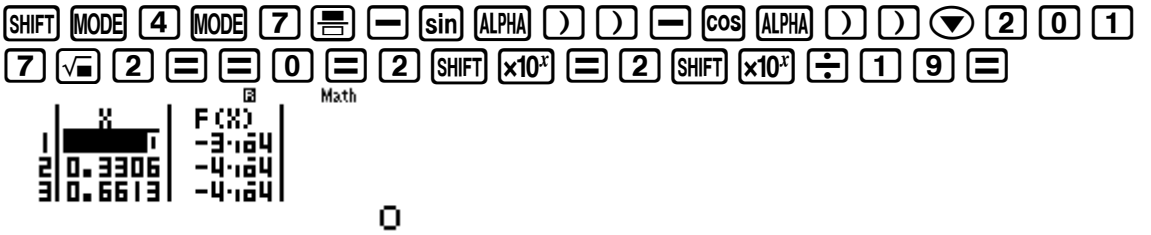
❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Tính đạo hàm $y'=\cos x+\sin x+2017\sqrt{2}m$

$y'\ge 0\Leftrightarrow m\ge\dfrac{-\sin x-\cos x}{2017\sqrt{2}}=f(x)$

Để hàm số luôn đồng biến trên R thì $m\ge f(x)$ đúng với mọi $x\in R$ hay $m\ge f(\max)$

➢ Để tìm giá trị lớn nhất của hàm số ta lại sử dụng chức năng MODE 7. Vì hàm $f(x)$ là hàm lượng giác mà hàm lượng giác $\sin x,\cos x$ thì tuần hoàn với chu kì 2π vậy ta sẽ thiết lập Start 0 End 2π Step $\dfrac{2\pi}{19}$



Quan sát bảng giá trị của $F(X)$ ta thấy $f(\max)=f(3.9683)\approx 5.10^{-4}$

Đây là 1 giá trị $\approx\dfrac{1}{2017}$ vậy $m\ge\dfrac{1}{2017}\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Tính đạo hàm $y'=\cos x+\sin x+2017\sqrt{2}m$. $y'\ge 0\Leftrightarrow m\ge\dfrac{-\sin x-\cos x}{2017\sqrt{2}}=f(x)$
- Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki thì $(-\sin x-\cos x)^2\le\left((-1)^2+(-1)^2\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=2$

$\Rightarrow -\sqrt{2} \le \left(-\sin x-\cos x\right) \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow \dfrac{-\sqrt{2}}{2017\sqrt{2}} \le f\left(x\right) \le \dfrac{\sqrt{2}}{2017\sqrt{2}}$

$f\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất là $\dfrac{\sqrt{2}}{2017\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2017} \Rightarrow m \ge f\left(\max\right) = \dfrac{1}{2017}$

❖ **Bình luận :**

- Vì chu kì của hàm $\sin x, \cos x$ là 2π nên ngoài thiết lập Start 0 End 2π thì ta có thể thiết lập Start $-\pi$ End $-\pi$
- Nếu chỉ xuất hiện hàm $\tan x, \cot x$ mà hai hàm này tuần hoàn theo chu kì π thì ta có thể thiết lập Start 0 End π Step $\dfrac{\pi}{19}$

VD5-[Thi thử chuyên Trần Phú – Hải Phòng lần 1 năm 2017]

Tìm m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ nghịch biến trên đoạn có độ dài đúng bằng 2.

A. $m = 0$ **B.** $m < 3$ **C.** $m = 2$ **D.** $m > 3$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Tính $y' = 3x^3 + 6x^2 + m$

Ta nhớ công thức tính nhanh "Nếu hàm bậc 3 nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng α thì phương trình đạo hàm có hai nghiệm và hiệu hai nghiệm bằng α"

Với α là một số xác định thì m cũng là 1 số xác định chứ không thể là khoảng $\Rightarrow$ Đáp số phải là **A** hoặc **C .**

Với $m = 0$ phương trình đạo hàm $3x^2 + 6x = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 0 \end{array}\right.$ và khoảng cách giữa chúng bằng 2

$\Rightarrow$ Đáp án **A** là chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Tính $y' = 3x^3 + 6x^2 + m$. Để hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2 thì phương trình đạo hàm có 2 nghiệm x_1, x_2 và $\left|x_1 - x_2\right| = 0$
- Theo Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = \dfrac{m}{3} \end{cases}$
- Giải $\left|x_1 - x_2\right| = 2 \Leftrightarrow \left(x_1 - x_2\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left(x_1 + x_2\right)^2 - 4x_1 x_2 = 4$

$\Leftrightarrow 4 - \dfrac{4m}{3} = 4 \Leftrightarrow m = 0$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]

Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. Mệnh đền nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -1\right)$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; 0\right)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; +\infty\right)$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(1; +\infty\right)$

Bài 2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Trong các hàng số sau, hãy chỉ ra hàm số giảm (nghịch biến) trên R

A. $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ **B.** $y=\left(\frac{5}{3e}\right)^{-x}$ **C.** $y=(\pi)^{3x}$ **D.** $y=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^x$

Bài 3-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{(m-1)x+1}{2x+m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định

A. $m<2$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.$ **C.** $m\neq 2$ **D.** $-1<m<2$

Bài 4-[Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]

Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{m-\sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{6}\right)$

A. $m\geq\frac{5}{2}$ **B.** $m\leq\frac{5}{2}$ **C.** $m\leq\frac{5}{4}$ **D.** $m\geq\frac{5}{4}$

Bài 5-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=2\sin^3 x-3\sin^2 x+m\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

A. $m>0$ **B.** $m<\frac{3}{2}$ **C.** $m\geq\frac{3}{2}$ **D.** $m>\frac{3}{2}$

Bài 6-[Thi thử chuyên Lương Văn Tụy lần 1 năm 2017]

Tìm m để hàm số $y=mx^3-x^2+3x+m-2$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$?

A. $m=0$ **B.** $m=\pm 1$ **C.** $3m\neq\pm 1$ **D.** $m=1$

Bài 7-[Thi thử THPT Bảo Lâm – Lâm Đồng lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{e^x-m-2}{e^x-m^2}$ đồng biến trong khoảng $\left(\ln\frac{1}{4};0\right)$

A. $m\in[-1;2]$ **B.** $m\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ **C.** $m\in(1;2)$ **D.** $m\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\cup[1;2)$

Bài 8-[Thi thử chuyên Trần Phú – Hải Phòng lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực m để hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x+3$ nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3.

A. $\left[\begin{array}{l} m>6 \\ m<0 \end{array}\right.$ **B.** $m>6$ **C.** $m<0$ **D.** $m=9$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]

Cho hàm số $y=-x^4+2x^2+1$. Mệnh đền nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

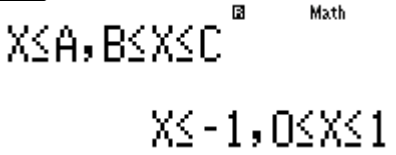
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Hướng dẫn giải

- Giải bất phương trình đạo hàm với lệnh MODE 5 INEQ

MODE ▼ 1 2 3 − 4 = 0 = 4 = 0 = =



- Rõ ràng hàm số đồng biến trên miền $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

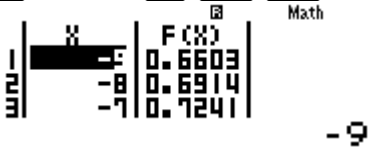
Trong các hàng số sau, hãy chỉ ra hàm số giảm (nghịch biến) trên R

A. $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ **B.** $y=\left(\frac{5}{3e}\right)^{-x}$ **C.** $y=(\pi)^{3x}$ **D.** $y=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^x$

Hướng dẫn giải

- Hàm số ngịch biến trên R tức là luôn giảm
- Kiểm tra tính nghịch biến $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ của hàm với chức năng MODE 7 Start -9 End 10 Step 1

MODE 7 (▤ SHIFT ×10^x ▼ 3 ▶) $x^{\blacksquare}$ ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =



Ta thấy $f(x)$ luôn tăng $\Rightarrow$ A sai

- Tương tự như vậy , với hàm $y=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^x$ ta thấy $f(x)$ luôn giảm $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **D**

MODE 7 (▤ 1 ▼ 2 √ 2 ▶ ▶) $x^{\blacksquare}$ ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =

Bài 3-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

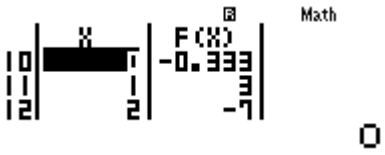
Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{(m-1)x+1}{2x+m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định

A. $m<2$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.$ **C.** $m\neq 2$ **D.** $-1<m<2$

Hướng dẫn giải

- Chọn $m=-3$. Khảo sát hàm $y=\frac{(-3-1)x+1}{x-3}$ với chức năng MODE 7

MODE 7 ▤ (− 3 − 1) ALPHA) + 1 ▼ 2 ALPHA) − 3 = = − 9 = 1 0 = 1 =



Ta thấy hàm số lúc tăng lúc giảm $\Rightarrow$ $m=-3$ sai $\Rightarrow$ **A**, **B**, **C** đều sai

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Chú ý : Việc chọn m khéo léo sẽ rút ngắn quá trình thử đáp án

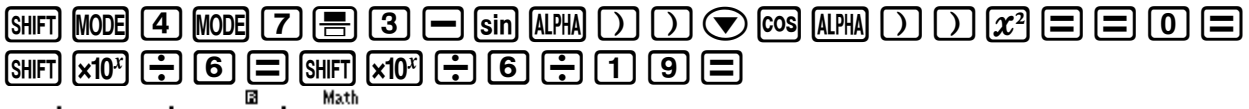
Bài 4-[Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]

Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m-\sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$

A. $m\ge\dfrac{5}{2}$ **B.** $m\le\dfrac{5}{2}$ **C.** $m\le\dfrac{5}{4}$ **D.** $m\ge\dfrac{5}{4}$

Hướng dẫn giải

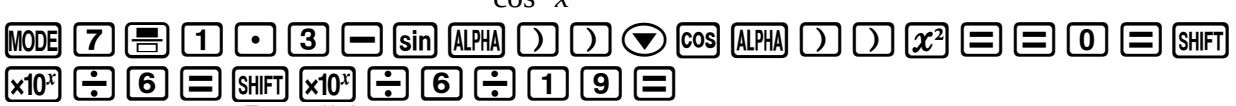
- Chọn $m=3$. Khảo sát hàm $y=\dfrac{3-\sin x}{\cos^2 x}$ với chức năng MODE 7

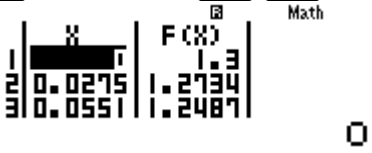


0.3306939635

Ta thấy hàm số lúc tăng lúc giảm $\Rightarrow$ $m=3$ sai $\Rightarrow$ **A**, **D** đều sai

- Chọn $m=1.3$. Khảo sát hàm $y=\dfrac{1.3-\sin x}{\cos^2 x}$ với chức năng MODE 7





0

Ta thấy hàm số luôn $\Rightarrow$ $m=1.3$ đúng $\Rightarrow$ **B** là đáp số chính xác (Đáp án **C** không chứa 1.3 nên sai)

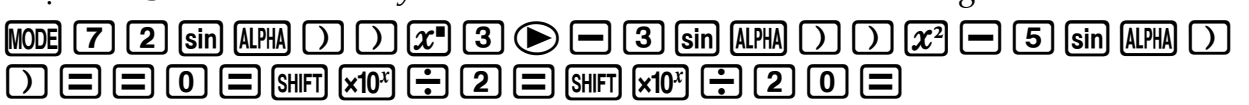
Bài 5-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

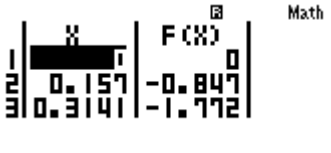
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=2\sin^3 x-3\sin^2 x+m\sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

A. $m>0$ **B.** $m<\dfrac{3}{2}$ **C.** $m\ge\dfrac{3}{2}$ **D.** $m>\dfrac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

- Chọn $m=5$. Khảo sát hàm $y=2\sin^3 x-3\sin^2 x+5\sin x$ với chức năng MODE 7

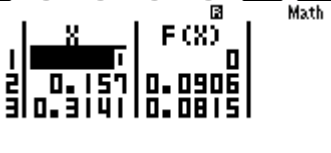




Ta thấy hàm số luôn giảm $\Rightarrow m=-5$ sai $\Rightarrow$ **B** sai

- Chọn $m=1$. Khảo sát hàm $y=2\sin^3 x-3\sin^2 x+\sin x$ với chức năng MODE 7

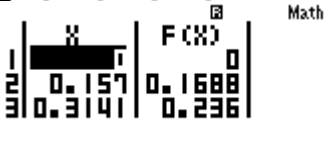
AC ◀ ◀ ◀ ◀ DEL DEL + = = = = = =



Ta thấy hàm số lúc tăng lúc giảm $\Rightarrow m=1$ sai $\Rightarrow$ **A** sai

- Chọn $m=\frac{3}{2}$. Khảo sát hàm $y=2\sin^3 x-3\sin^2 x+\frac{3}{2}\sin x$ với chức năng MODE 7

AC ◀ ◀ ◀ ◀ (3 ÷ 2) = = = = =



Ta thấy hàm số luôn tăng $\Rightarrow m=\frac{3}{2}$ đúng $\Rightarrow$ **C** sai

Bài 6-[Thi thử chuyên Lương Văn Tụy lần 1 năm 2017]

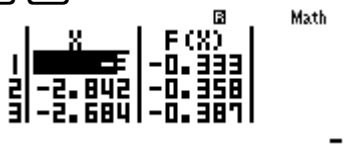
Tìm m để hàm số $y=mx^3-x^2+3x+m-2$ đồng biến trên khoảng $(-3;0)$?

A. $m=0$ **B.** $m=\pm 1$ **C.** $3m\neq\pm 1$ **D.** $m=1$

Hướng dẫn giải

- Tính đạo hàm $y'=3mx^2-2x+3$. Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow 3mx^2-2x+3\geq 0\Leftrightarrow m\geq\frac{2x-3}{3x^2}=f(x)$
- Vậy $m\geq f(\max)$ trên miền $(-3;0)$. Tìm $f(\max)$ bằng lệnh MODE 7

MODE 7 ⊞ 2 ALPHA) (−) 3 ▼ 3 ALPHA) x^2 = = (−) 3 = 0 = 3 ÷ 1 9 =



-3

Ta thấy $f(\max)=0.3333...=\frac{1}{3}\Rightarrow m\geq\frac{1}{3}$ sai $\Rightarrow$ **D** là đáp số chính xác

Bài 7-[Thi thử THPT Bảo Lâm – Lâm Đồng lần 1 năm 2017]

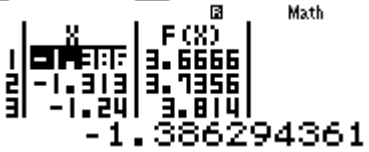
Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{e^x-m-2}{e^x-m^2}$ đồng biến trong khoảng $\left(\ln\frac{1}{4};0\right)$

A. $m\in[-1;2]$ **B.** $m\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ **C.** $m\in(1;2)$ **D.** $m\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\cup[1;2)$

Hướng dẫn giải

- Chọn $m=1$. Khảo sát hàm $y=\dfrac{e^x-1-2}{e^x-1^2}$ với chức năng MODE 7

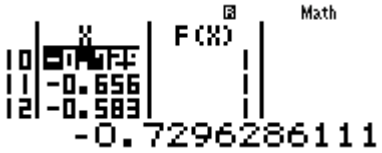
MODE 7 ALPHA x10^x x^■ ALPHA) ▶ − 1 − 2 ▼ ALPHA x10^x x^■ ALPHA) ▶ − 1
x² = = ln 1 ÷ 4) = 0 = − ln 1 ÷ 4) ÷ 1 9 =



Ta thấy hàm số luôn tăng trên $\Rightarrow$ $m=1$ nhận $\Rightarrow$ **A**, **D** có thể đúng

- Chọn $m=-1$. Khảo sát hàm $y=\dfrac{e^x-(-1)-2}{e^x-(-1)^2}$ với chức năng MODE 7

AC ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ (− ▶) ▼ ▶ ▶ ▶ ▶ ▶ (− ▶) = =
= = =



Ta thấy hàm số luôn không đổi (hàm hằng) $\Rightarrow$ $m=-1$ loại $\Rightarrow$ **A** sai và **D** là đáp số chính xác

Bài 8-[Thi thử chuyên Trần Phú – Hải Phòng lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực m để hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x+3$ nghịch biến trên khoảng có độ dài lớn hơn 3.

A. $\left[\begin{array}{l} m>6 \\ m<0 \end{array}\right.$ **B.** $m>6$ **C.** $m<0$ **D.** $m=9$

Hướng dẫn giải

- Tính $y'=6x^2+6(m-1)x+6(m-2)$. Theo Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1+x_2=1-m \\ x_1x_2=m-2 \end{cases}$
- Khoảng nghịch biến lớn hơn 3 $\Rightarrow |x_1-x_2|>3 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2>9 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2-9>0$
$\Leftrightarrow (1-m)^2-4(m-2)-9>0$

Sử dụng MODE 7 với Start -3 End 10 Step 1 để giải bất phương trình trên

MODE 7 (1 − ALPHA)) x² − 4 (ALPHA) − 2) − 9 = = − 3
= 1 0 = 1 =

Ta nhận được $\left[\begin{array}{l} m>6 \\ m<0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ **A** là đáp số chính xác

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 3. CỰC TRỊ HÀM SỐ.

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1.Điểm cực đại, cực tiểu : Hàm số f liên tục trên $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó :

Nếu $f'(x_0)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0

Nếu $f'(x_0)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0

2.Lệnh Casio tính đạo hàm SHIFT ∫

2) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]

Cho hàm số $y=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$

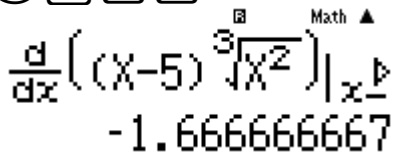
D. Hàm số không có cực tiểu

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Để kiểm tra đáp án **A** ta tính đạo hàm của y tại $x=1$ (tiếp tục màn hình Casio đang dùng)

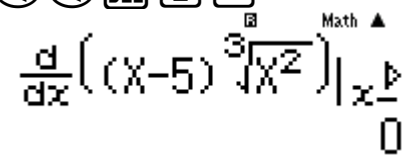
◀ DEL 1 =



Ta thấy đạo hàm $y'(1)\neq 0$ vậy đáp số **A** sai

➢ Tương tự với đáp án **B** (tiếp tục màn hình Casio đang dùng)

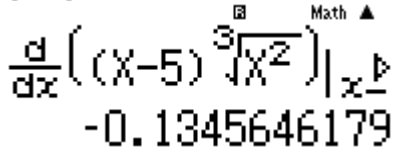
◀ ◀ DEL 2 =



Ta thấy $y'(2)=0$. Đây là điều kiện cần để $x=2$ là điểm cực tiểu của hàm số y

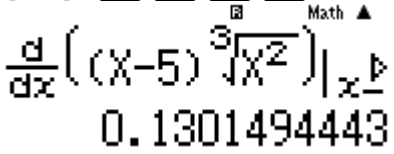
Kiểm tra $y'(2-0.1)=-0.1345...<0$

◀ ◀ (−) 0 . 1 =



Kiểm tra $y'(2+0.1)=0.1301...>0$

◀ ◀ DEL DEL DEL DEL + 0 . 1 =



Tóm lại $f'(2)=0$ và dấu của y' đổi từ $-$ sang $+$ vậy hàm số y đạt cực tiểu tại $x=2$

$\Rightarrow$ Đáp án **B** là chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Tính đạo hàm : $y'=\sqrt[3]{x^2}+(x-5).\frac{2}{3}.\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{3x+2(x-5)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$
- Ta có $y'=0\Leftrightarrow 5(x-2)=0\Leftrightarrow x=0$
- $y'>0\Leftrightarrow \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}>0\Leftrightarrow \left[\begin{cases}x-2>0\\x>0\end{cases}\begin{cases}x-2<0\\x<0\end{cases}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>2\\x<0\end{array}\right.$

$y'<0\Leftrightarrow 0<x<2$

Vậy $y'(2)=0$ và y' đổi dấu từ âm sang dương qua điểm $x=2$

❖ **Bình luận :**

- Trong các bài toán tính đạo hàm phức tạp thì cách Casio càng tỏ ra có hiệu quả vì tránh được nhầm lẫn khi tính đạo hàm và xét dấu của đạo hàm.

VD2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Với giá trị nguyên nào của k thì hàm số $y=kx^4+(4k-5)x^2+2017$ có 3 cực trị

A. $k=1$ **B.** $k=2$ **C.** $k=3$ **D.** $k=4$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

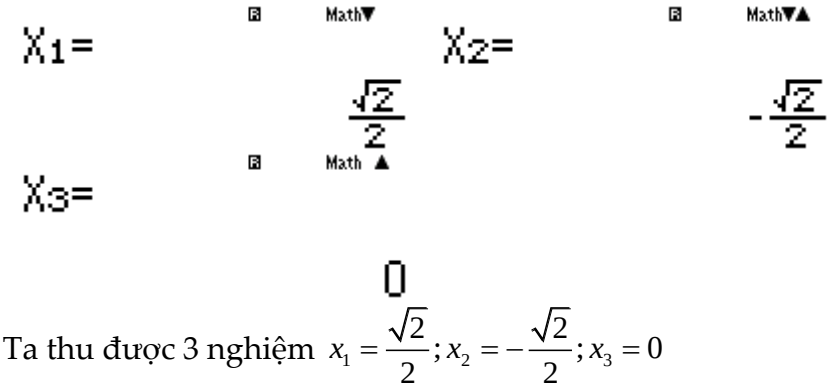
➢ Tính đạo hàm $y'=4kx^3+2(4k-5)x$

Ta hiểu : Để hàm số y có 3 cực trị thì $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt (khi đó đương nhiên sẽ không có nghiệm kép nào)

Ta chỉ cần giải phương trình bậc 3 : $4kx^3+2(4k-5)x=0$ với $a=4k,b=0,c=8k-10,d=0$. Để làm việc này ta sử dụng máy tính Casio với chức năng giải phương trình bậc 3 : MODE 5

➢ Thử đáp án A với $k=1$

MODE 5 4 4 = 0 = 8 − 1 0 = 0 = =



Ta thu được 3 nghiệm $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2};x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2};x_3=0$

$\Rightarrow$ Đáp án **A** là chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Tính đạo hàm $y' = 4kx^3 + 2(4k-5)x$
- Ta hiểu : Để hàm y có 3 cực trị thì $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (khi đó đương nhiên sẽ không có nghiệm kép nào)
- $y' = 0 \Leftrightarrow 4kx^3 + 2(4k-5)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 4kx^2 - (10-8k) = 0 \ (2) \end{array}\right.$

  Để $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0

  $\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{18-8k}{4k} > 0 \Leftrightarrow 0 < k < 2$

  Vậy $k = 1$ thỏa mãn

❖ **Bình luận :**

- Đạo hàm là phương trình bậc 3 có dạng $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \ (a \neq 0)$ nếu có 3 nghiệm thì sẽ tách được thành $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$ nên vế trái luôn đổi dấu qua các nghiệm. $\Rightarrow$ Có 3 cực trị

  Tuy nhiên nếu đạo hàm là phương trình bậc 3 chỉ có 2 nghiệm thì sẽ tách thành $a(x-x_1)(x-x_2)^2 = 0$ và sẽ có 1 nghiệm kép. $\Rightarrow$ có 1 cực trị

  Mở rộng thêm : nếu đạo hàm là 1 phương trình bậc 3 có 1 nghiệm thì chỉ đổi dấu 1 lần $\Rightarrow$ có 1 cực trị

VD3-[Thi thử THPT Kim Liên – Hà Nội lần 1 năm 2017]

Số điểm cực trị của hàm số $y = |x|^3 - 4x^2 + 3$ bằng :

A. 2 **B.** 0 **C.** 3 **D.** 4

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : T. CASIO**

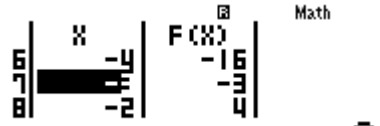
➢ Tính đạo hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối

$$\left(|x|^3\right)' = \left[\left(\sqrt{x^2}\right)^3\right]' = \left[\left(x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]' = \frac{3}{2}\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}}.2x = 3x|x|$$

Vậy $y' = \left(|x|^3 - 4x^2 + 3\right)' = 3x|x| - 8x$

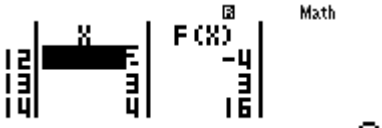
➢ Số điểm cực trị tương ứng với số nghiệm của phương trình $y' = 0$. Ta sử dụng chức năng MODE 7 để dò nghiệm và sự đổi dấu của y' qua nghiệm.

MODE 7 3 ALPHA) SHIFT hyp ALPHA) ▶ − 8 ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =



-3

0



2

Ta thấy y' đổi dấu 3 lần $\Rightarrow$ Có 3 cực trị

$\Rightarrow$ Đáp án **C** là chính xác

VD4-[Khảo sát chất lượng chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm 2017]

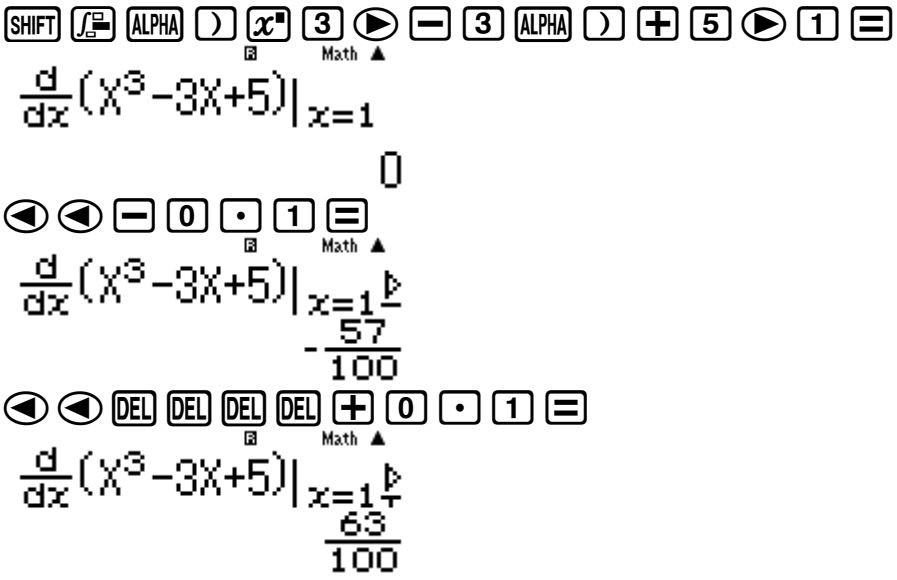
Tìm tất các các giá trị thực của m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2+5$ đạt cực đại tại $x=1$

A. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$ **B.** $m=2$ **C.** $m=1$ **D.** $m=0$

Hướng dẫn giải

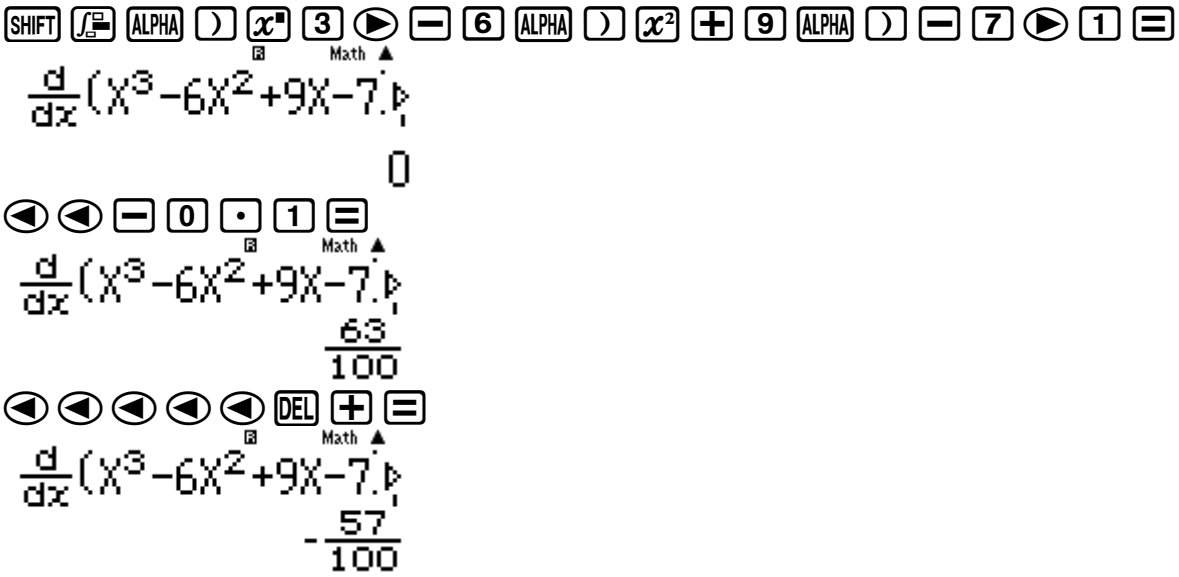
❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Kiểm tra khi $m=0$ thì hàm số có đạt cực đại tại $x=1$ không.



Vậy y' đổi dấu từ âm sang dương qua giá trị $x=1 \Rightarrow m=0$ loại $\Rightarrow$ Đáp án **A** hoặc **D** sai

➢ Tương tự kiểm tra khi $m=2$



Ta thấy y' đổi dấu từ dương sang âm $\Rightarrow$ hàm y đạt cực đại tại $x=1 \Rightarrow$ Đáp án **B** chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

▪ Tính đạo hàm : $y'=3x^2-6mx+3\left(m^2-1\right)$

▪ Ta có $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-1 \\ x=m+1 \end{array}\right.$

Điều kiện cần : $x=1$ là nghiệm của phương trình $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-1=1 \\ m+1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=0 \end{array}\right.$

- Thử lại với $m=2$ khi đó $y'=3x^2-12x+9$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

$y'>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\x<1\end{array}\right.$ và $y'<0\Leftrightarrow 1<x<3$

Vậy y' đổi dấu từ dương sang âm qua điểm $x=1\Rightarrow$ Hàm y đạt cực đại tại $x=1$

❖ **Bình luận :**

- Việc chọn giá trị m một cách khéo léo sẽ giúp chúng ta rút ngắn quá trình chọn để tìm đáp án đúng.

VD5-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Cho hàm số $y=a\sin x+b\cos x+x\ \ (0<x<2\pi)$ đạt cực đại tại các điểm $x=\frac{\pi}{3}$ và $x=\pi$. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b\sqrt{3}$

A. $T=2\sqrt{3}$ **B.** $T=3\sqrt{3}+1$ **C.** $T=2$ **D.** $T=4$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : T. CASIO**

➢ Tính đạo hàm $y'=(a\sin x+b\cos x+x)'=a\cos x-b\sin x+1$

Hàm số đạt cực trị tại $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow a\cos\frac{\pi}{3}-b\sin\frac{\pi}{3}+1=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b+1=0$ (1)

Hàm số đạt cực trị tại $x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow a\cos\pi-b\sin\pi+1=0\Leftrightarrow -a-0b+1=0$ (2)

Từ (2) ta có $a=1$. Thế vào (1) $\Rightarrow b=\sqrt{3}$

Vậy $T=a+b\sqrt{3}=4\Rightarrow$ Đáp án **D** là chính xác

VD6-[Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]

Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$

A. $2x+3y+9=0$ **B.** $2x+3y-6=0$ **C.** $2x-3y+9=0$ **D.** $-2x+3y+6=0$

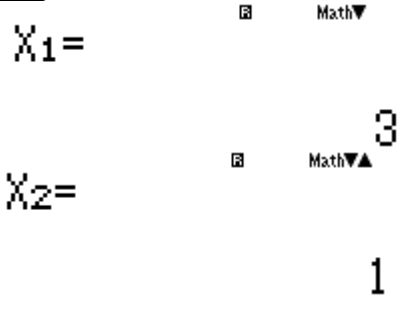
Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Gọi 2 điểm cực trị của đồ thị là $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$. Ta không quan tâm đâu là điểm cực đại, đâu là điểm cực tiểu. Chúng ta chỉ cần biết đường thẳng cần tìm sẽ đi qua 2 điểm cực trị trên.

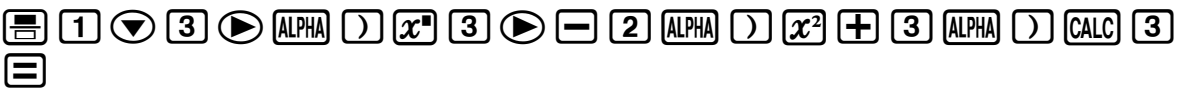
$x_1;x_2$ là nghiệm của phương trình $y'=0$. Để tìm 2 nghiệm này ta sử dụng chức năng giải phương trình bậc 2 MODE

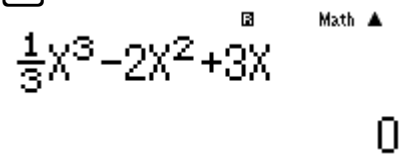
MODE 5 3 1 = − 4 = 3 = =



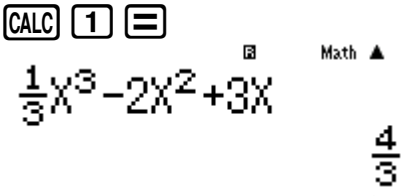
Ta tìm được $x_1 = 3; x_2 = 1$

- Để tìm $y_1; y_2$ ta sử dụng chức năng gán giá trị CALC





Khi $x = 3$ thì $y = 0$ vậy $A(3;0)$



Khi $x = 1$ thì $y = \frac{4}{3}$ vậy $B\left(1;\frac{4}{3}\right)$

Ta thấy đường thẳng $2x + 3y - 6 = 0$ đi qua A và $B \Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

❖ **<u>Cách tham khảo</u> : Tự luận**

- Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là phần dư của phép chia y cho y'
- Tính $y' = x^2 - 4x + 3$

Thực hiện phép chia được : $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x = \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right)\left(x^2 - 4x + 3\right) - \frac{2}{3}x - 2$

Vậy phương trình cần tìm có dạng $y = -\frac{2}{3}x + 2 \Leftrightarrow 2x + 3y - 6 = 0$

❖ **<u>Bình luận</u> :**

- Cách Casio có vẻ hơi dài hơn nhưng lại có ưu điểm tránh phải thực hiện phép chia y cho y' .

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

<u>Bài 1</u>-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Hàm số $y = x^4 + x^2 + 1$ đạt cực tiểu tại :

A. $x = -1$ **B.** $x = 1$ **C.** $x = 0$ **D.** $x = -2$

<u>Bài 2</u>-[Thi thử THPT Yên Thế – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Giá trị của m để hàm số $y = -x^3 - 2x^2 + mx + 2m$ đạt cực tiểu tại $x = -1$ là :

A. $m < -1$ **B.** $m \neq -1$ **C.** $m = -1$ **D.** $m > -1$

<u>Bài 3</u>-[Đề minh họa thi THPT Quốc Gian lần 1 năm 2017]

Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$

A. 4 **B.** 1 **C.** 0 **D.** -1

<u>Bài 4</u>-[Thi HK1 THPT Chu Văn An – Hà Nội năm 2017]

Đồ thị hàm số $y = e^x\left(x^2 - 3x - 5\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

<u>Bài 5</u>-[Thi HK1 THPT Việt Đức – Hà Nội năm 2017]

Hàm số $y = |x|^3 - x^2 + 4$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Bài 6-[Khảo sát chất lượng chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm 2017]

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(2x+3)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là :

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Bài 7-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Cho hàm số $y=(x-1)(x+2)^2$. Trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm trên đường thẳng nào dưới đây.

Bài 8-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx$ có 2 điểm cực trị trái dấu .

A. $m<0$ **B.** $0<m<3$ **C.** $m<3$ **D.** Không có m thỏa

Bài 9-[Thi HK1 THPT Chu Văn An – Hà Nội năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+2$ có đúng 1 cực đại và không có cực tiểu

A. $m<1$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m>1 \end{array}\right.$ **C.** $m<0$ **D.** $m\ge 1$

Bài 10-[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]

Tìm tập hợp tất cả các tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+x^2+mx-m-2$ có 2 cực trị nằm ở hai nửa mặt phẳng khác nhau với bờ là trục hoành

A. $(-\infty;0)$ **B.** $(-\infty;-1)\setminus\{-5\}$ **C.** $(-\infty;0]$ **D.** $(-\infty;1)\setminus\{-5\}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

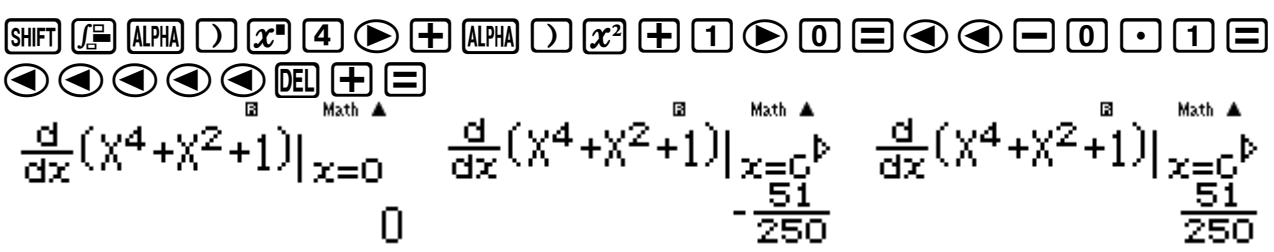
Bài 1-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Hàm số $y=x^4+x^2+1$ đạt cực tiểu tại :

A. $x=-1$ **B.** $x=1$ **C.** $x=0$ **D.** $x=-2$

Hướng dẫn giải

- Ngoài cách thử lần lượt từng đáp án để lấy kết quả. Nếu ta áp dụng một chút tư duy thì phép thử sẽ diễn ra nhanh hơn. Đồ thị hàm bậc 4 đối xứng nhau qua trục tung. Nếu hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$ thì sẽ đạt cực tiểu tại $x=1$. $\Rightarrow$ Đáp án A và B loại vì ta chỉ được chọn 1 đáp án.
- Thử với $x=0$



Ta thấy $f'(0)=0$, $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương $\Rightarrow$ $x=-1$ là cực tiểu $\Rightarrow$Đáp án **C** chính xác

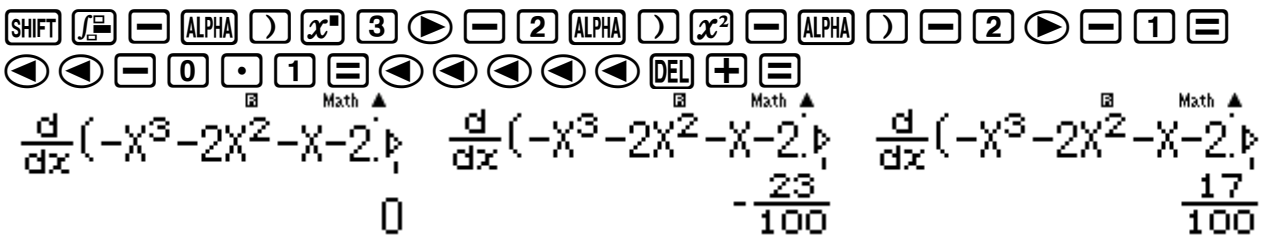
Bài 2-[Thi thử THPT Yên Thế – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Giá trị của m để hàm số $y=-x^3-2x^2+mx+2m$ đạt cực tiểu tại $x=-1$ là :

A. $m<-1$ **B.** $m\neq -1$ **C.** $m=-1$ **D.** $m>-1$

Hướng dẫn giải

- Thử đáp án, ưu tiên thử giá trị xác định trước. Với đáp án C khi $m=-1$ $\Rightarrow y=-x^3-2x^2-x-2$



Ta thấy $f'(-1)=0$, $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương $\Rightarrow$ $x=-1$ là cực tiểu $\Rightarrow$Đáp án **C** chính xác

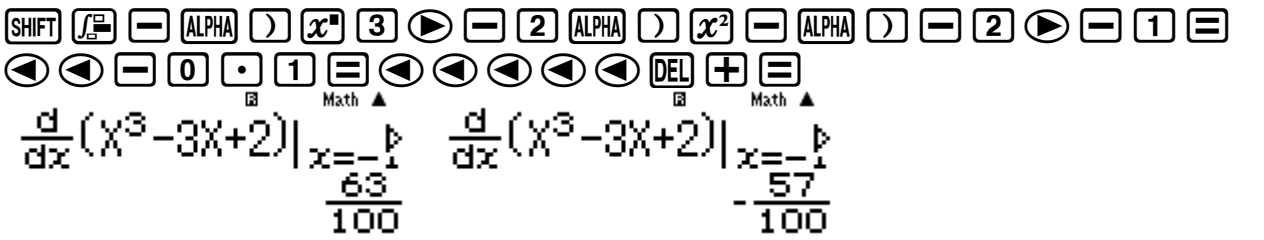
Bài 3-[Đề minh họa thi THPT Quốc Gian lần 1 năm 2017]

Tìm giá trị cực đại của hàm số $y=x^3-3x+2$

A. 4 **B.** 1 **C.** 0 **D.** -1

Hướng dẫn giải

- Tính $y'=3x^2-3$. Tìm điểm cực đại của hàm số là nghiệm phương trình $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$
- Khảo sát sự đổi dấu qua điểm cực trị $x=-1$ bằng cách tính $f'(-1-0.1)$ và $f'(-1+0.1)$



Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm $\Rightarrow$ $x=-1$ là điểm cực đại của hàm số

- Giá trị cực đại $f(-1)=(-1)^3-3(-1)+2=4$ $\Rightarrow$Đáp án chính xác là **A** chính xác

Bài 4-[Thi HK1 THPT Chu Văn An – Hà Nội năm 2017]

Đồ thị hàm số $y=e^x\left(x^2-3x-5\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 1 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 3

Hướng dẫn giải

- Tính $y'=e^x\left(x^2-3x-5\right)+e^x(2x-3)$
- Dùng MODE 7 để tìm điểm cực trị và khảo sát sự đổi dấu qua điểm cực trị

MODE 7 ALPHA $\times 10^x$ $x^{\blacksquare}$ ALPHA) ▶ (ALPHA) x^2 − 3 ALPHA) − 5) + ALPHA
$\times 10^x$ $x^{\blacksquare}$ ALPHA) ▶ (2 ALPHA) − 3) = = − 9 = 1 0 = 1 =

-3 3

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần $\Rightarrow$ Hàm số có hai điểm cực trị

$\Rightarrow$Đáp án chính xác là **A** chính xác

Bài 5-[Thi HK1 THPT Việt Đức – Hà Nội năm 2017]

Hàm số $y=|x|^3-x^2+4$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 0

Hướng dẫn giải

- Tính $y'=3x|x|-2x$. $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\frac{2}{3}\end{array}\right.$. Dùng MODE 7 với thiết lập sao cho x chạy qua 3 giá trị này ta sẽ khảo sát được sự đổi dấu của y'

MODE 7 3 ALPHA) SHIFT hyp ALPHA) ▶ − 2 ALPHA) = − DEL = − 2 = 2
= 1 ÷ 3 =

-0.6666666667 0 0.6666666667

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 3 lần $\Rightarrow$Đáp án chính xác là **C** chính xác

Bài 6-[Khảo sát chất lượng chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm 2017]

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2(2x+3)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là :

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Hướng dẫn giải

- Tính $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$. Dùng MODE 7 với thiết lập sao cho x chạy qua 3 giá trị này ta sẽ khảo sát được sự đổi dấu của y'

MODE 7 ALPHA) (ALPHA) − 1) x^2 (2 ALPHA) + 3) = = − 2 =
1 • 5 = 0 • 2 5 =

-1.5 0

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần $\Rightarrow$Đáp án chính xác là **A** chính xác

Chú ý : Nếu quan sát tinh tế thì ta thấy ngay $(x-1)^2$ là lũy thừa bậc chẵn nên y' không đổi dấu qua $x=1$ mà chỉ đổi dấu qua hai lũy thừa bậc lẻ x (hiểu là x^1) và $2x+3$ (hiểu là $(2x+3)^1$)

Bài 7-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Cho hàm số $y=(x-1)(x+2)^2$. Trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm trên đường thẳng nào dưới đây.

A. $2x-y-4=0$ **B.** $2x-y+4=0$ **C.** $2x+y+4=0$ **D.** $2x+y-4=0$

Hướng dẫn giải

- Hàm số có dạng $y=(x-1)(x+2)^2 \Leftrightarrow y=x^3+3x^2-4$ Có đạo hàm $y'=3x^2+6x$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=4 \end{array}\right.$$

- Vậy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $M(-2;0), N(0;4)$. Trung điểm của hai điểm cực trị này là $I(-1;2)$. Điểm này thuộc đường thẳng $2x+y+4=0$ $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

Bài 8-[Thi thử chuyên Vị Thanh – Hậu Giang lần 1 năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx$ có 2 điểm cực trị trái dấu .

A. $m<0$ **B.** $0<m<3$ **C.** $m<3$ **D.** Không có m thỏa

Hướng dẫn giải

- Tính $y'=3x^2-6x+m$. Để hàm số có 2 điểm cực trị trái dấu thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu $\Rightarrow$ Tích hai nghiệm là số âm $\Leftrightarrow \frac{m}{3}<0 \Leftrightarrow m<0$ $\Rightarrow$Đáp án chính xác là **A** chính xác

Chú ý : Nếu quên định lý Vi-et ta có thể dùng phép thử. Với đáp án A chọn $m=-5$ chẳng hạn sẽ thấy luôn $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và hai nghiệm này đổi dấu.

Bài 9-[Thi HK1 THPT Chu Văn An – Hà Nội năm 2017]

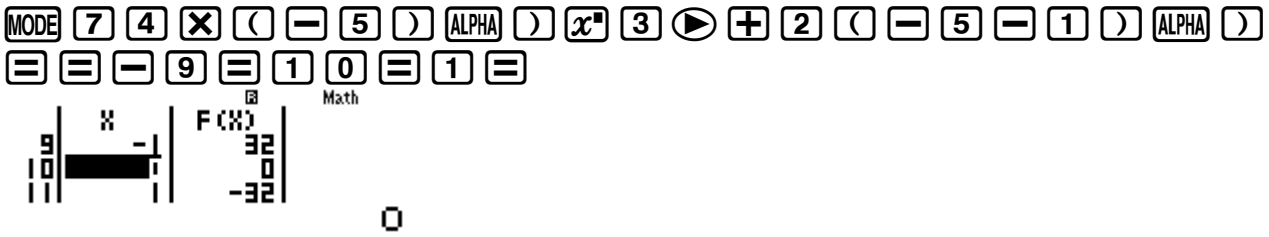
Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+2$ có đúng 1 cực đại và không có cực tiểu

A. $m<1$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m>1 \end{array}\right.$ **C.** $m<0$ **D.** $m\ge 1$

Hướng dẫn giải

- Tính $y'=4mx^3+2(m-1)x$. Để hàm số có đúng 1 cực đại và không có cực tiểu thì $y'=0$ có đúng 1 nghiệm và $y'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm qua điểm đó.

- Chọn $m=-5$. Dùng MODE 7 tính nghiệm $y'=0$ và khảo sát sự đổi dấu của $y'(x)$



Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 1 lần từ dương sang âm $\Rightarrow m=-5$ thỏa $\Rightarrow$ Đáp án đúng có thể là **A**, **B**, **C**

- Chọn $m=5$. Dùng MODE 7 tính nghiệm $y'=0$ và khảo sát sự đổi dấu của $y'(x)$

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 1 lần từ âm sang dương $\Rightarrow m=5$ loại $\Rightarrow$ Đáp án **B** sai

- Chọn $m=0.5$. Dùng MODE 7 tính nghiệm $y'=0$ và khảo sát sự đổi dấu của $y'(x)$

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 1 lần từ dương sang âm $\Rightarrow m=0.5$ thỏa $\Rightarrow$ Đáp án **A** chính xác

Bài 10-[Thi thử chuyên KHTN –HN lần 2 năm 2017]

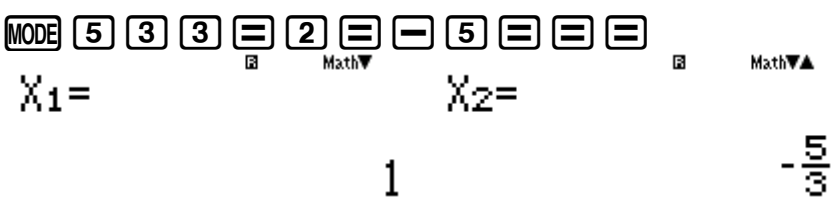
Tìm tập hợp tất cả các tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3+x^2+mx-m-2$ có 2 cực trị nằm ở hai nửa mặt phẳng khác nhau với bờ là trục hoành

A. $(-\infty;0)$ **B.** $(-\infty;-1)\setminus\{-5\}$ **C.** $(-\infty;0]$ **D.** $(-\infty;1)\setminus\{-5\}$

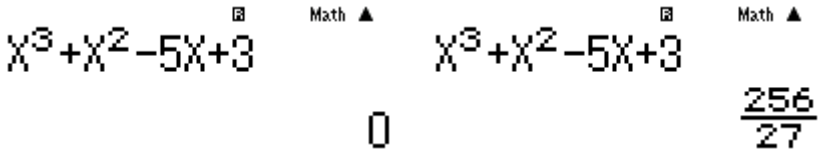
Hướng dẫn giải

- Tính $y'=3x^2+2x+m$. Để hàm số có đúng 2 cực đại thì $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=1-3m>0\Leftrightarrow m<\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ Cả 4 đáp án đều thỏa

- Chọn $m=-5$. Hàm số có dạng $y=x^3+x^2-5x+3$. Tính hai điểm cực trị của hàm số bằng lệnh giải phương trình MODE 5

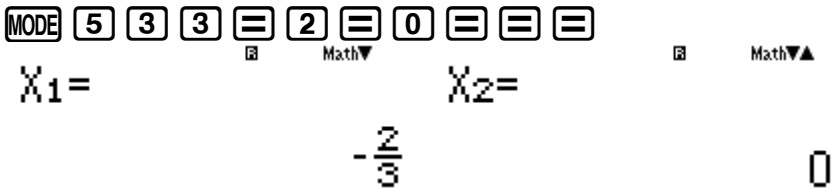


Từ đó suy ra $f(x_1)=f(1)=0; f(x_2)=f\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{256}{27}$

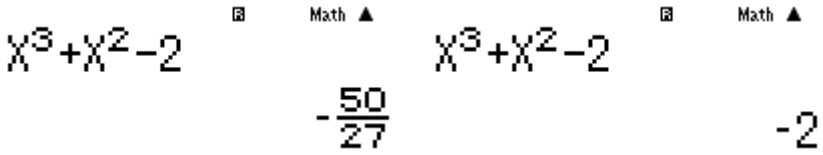


Để hai cực trị nằm về hai phía trục hoành thì $f(x_1)f(x_2)<0$. $\Rightarrow m=-5$ loại $\Rightarrow$ **B** hoặc **D** có thể đúng.

- Chọn $m=0$. Hàm số có dạng $y=x^3+x^2-2$. Tính hai điểm cực trị của hàm số bằng lệnh giải phương trình MODE 5



Từ đó suy ra $f(x_1)=f\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{50}{27}; f(x_2)=f(0)=-2$



- Để hai cực trị nằm về hai phía trục hoành thì $f(x_1)f(x_2)<0$. $\Rightarrow m=0$ loại $\Rightarrow$ **B** là đáp số chính xác

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 4. TIẾP TUYẾN CỦA HÀM SỐ.

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1.Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm : Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) và một điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc đồ thị (C) . Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại tiếp điểm M là đường thẳng d có phương trình : $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

2.Lệnh Casio : qy

2) VÍ DỤ MINH HỌA

Bài 1-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{x}-\ln x$ tại điểm có hoành độ bằng 2

A. $\frac{1}{2}-\ln 2$ **B.** $-\frac{1}{4}$ **C.** $-\frac{3}{4}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

➢ Sử dụng máy tính Casio để tính hệ số góc tiếp tuyên tại điểm có hoành độ bằng 2 $\Rightarrow k=f'(2)$

SHIFT ∫ − ▭ 1 ▼ ALPHA) ▶ − ln ALPHA)) ▶ 2 =

$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x}-\ln(X)\right)\Big|_{x=}$

-0.25

➢ Ta thấy $k=f'(2)=-0.25=-\frac{1}{4}$.

$\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

Bài 2-[Thi thử chuyên Hạ Long – Quảng Ninh lần 1 năm 2017]

Cho hàm số $y=-x^3+3x-2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

A. $y=-2x+1$ **B.** $y=3x-2$ **C.** $y=2x+1$ **D.** $y=-3x-2$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

➢ M là giao điểm của đồ thị (C) và trục tung $\Rightarrow$ M có tọa độ $(0;-2)$

Tính $f'(0)=0$

SHIFT ∫ − ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 3 ▶ + 3 ALPHA) − 2 ▶ 0 =

$\frac{d}{dx}\left(-X^3+3X-2\right)\Big|_{x=}$

3

➢ Thế vào phương trình tiếp tuyến có $y=3(x-0)-2\Leftrightarrow y=3x-2$

$\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

Bài 3-[Thi thử chuyên Nguyễn Thị Minh Khai lần 1 năm 2017]

Số tiếp tuyến với đồ thị $(C):\ y=x^3-3x^2+2$ đi qua điểm $M(1;0)$ là :

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 1

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ Trong đó hệ số góc $k=f'(x_0)=3x_0^2-6x_0$

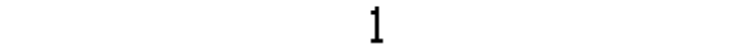
➢ Thế $f'(x_0)$ vào phương trình tiếp tuyến được $y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2+2$

Tiếp tuyến đi qua điểm $M(1;0)$ $\Rightarrow 0=(3x_0^2-6x_0)(1-x_0)+x_0^3-3x_0^2+2$

$\Leftrightarrow -2x_0^3+6x_0^2-6x_0+2=0$

Sử dụng máy tính với lệnh MODE 5 để giải phương trình bậc 3 trên

MODE 5 − 4 − 2 = 6 = − 6 = 2 =



➢ Ta thấy có 1 nghiệm x_0 $\Rightarrow$ Chỉ có 1 tiếp tuyến duy nhất.

$\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

Bài 4-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$ có đồ thị (C) . Đường thẳng nào sau đây là tiếp tuyến của (C) với hệ số góc nhỏ nhất

A. $y=-3x+3$ **B.** $y=-3x-3$ **C.** $y=-3x$ **D.** $y=0$

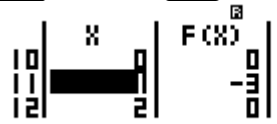
Hướng dẫn giải

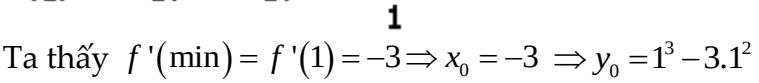
❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ Trong đó hệ số góc $k=f'(x_0)=3x_0^2-6x_0$

➢ Tìm giá trị nhỏ nhất của k bằng chức năng MODE 7

MODE 7 3 ALPHA) x^2 − 6 ALPHA) = = − 9 = 1 0 = 1 =





Ta thấy $f'(\min)=f'(1)=-3\Rightarrow x_0=-3$ $\Rightarrow y_0=1^3-3.1^2+2=0$

➢ Thế vào phương trình tiếp tuyến có $y=-3(x-1)+0\Leftrightarrow y=-3x+3$

$\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

Bài 5-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+1}$ (C) Gọi d là khoảng cách từ giao điểm hai tiệm cận của (C) đến một tiếp tuyến bất kì của (C) . Giá trị lớn nhất d có thể đạt được là :

A. $3\sqrt{3}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $2\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : T. CASIO**

➢ Gọi tiếp điểm là $M\left(x_0;y_0\right)$ $\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0$ Trong đó hệ số góc $k=f'\left(x_0\right)=-\dfrac{1}{\left(x_0+1\right)^2}$.

Thế k,y_0 vào phương trình tiếp tuyến có dạng : $y=-\dfrac{1}{\left(x_0+1\right)^2}\left(x-x_0\right)+\dfrac{x_0+2}{x_0+1}$

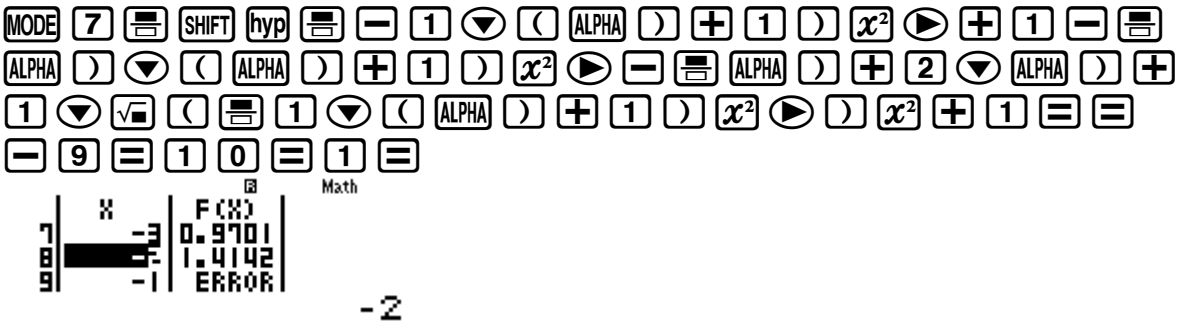
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\left(x_0+1\right)^2}x+y-\dfrac{x_0}{\left(x_0+1\right)^2}-\dfrac{x_0+2}{x_0+1}=0$

➢ Hàm số có tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận ngang $y=1$ nên giao điểm hai tiệm cận là $I\left(-1;1\right)$.

Áp dụng công thức tính khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng ta có :

$$h=d\left(I;\left(d\right)\right)=\frac{\left|\dfrac{1}{\left(x_0+1\right)^2}\left(-1\right)+1-\dfrac{x_0}{\left(x_0+1\right)^2}-\dfrac{x_0+2}{x_0+1}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{\left(x_0+1\right)^2}\right)^2+1^2}}$$

Dùng máy tính Casio với lệnh MODE 7 để tính các giá trị lớn nhất này.



➢ Ta thấy $h\left(\max\right)=\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ **C** là đáp án chính xác

Bài 6-[Thi HK1 THPT Việt Đức – Hà Nội năm 2017]

Hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ $\left(H\right)$, M là điểm bất kì và $M\in\left(H\right)$. Tiếp tuyến với $\left(H\right)$ tại M tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có diện tích bằng :

A. 4 **B.** 5 **C.** 3 **D.** 2

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Gọi tiếp điểm là $M\left(x_0;y_0\right)$ $\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến $y=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+y_0$ Trong đó hệ số góc $k=f'\left(x_0\right)=-\dfrac{1}{\left(x_0-1\right)^2}$.

Thế k,y_0 vào phương trình tiếp tuyến có dạng : $y=-\dfrac{1}{\left(x_0-1\right)^2}\left(x-x_0\right)+\dfrac{2x_0-1}{x_0-1}$ $\left(d\right)$

➢ Hàm số có tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang $y=2$ và giao điểm 2 tiệm cận là $I\left(1;2\right)$

Gọi E là giao điểm của tiếp tuyến d và tiệm cận đứng $\Rightarrow E\left(1;\frac{2x_0}{x_0-1}\right)$

Gọi F là giao điểm của tiếp tuyến d và tiệm cận ngang $\Rightarrow F\left(2x_0-1;2\right)$

- Độ dài $IE=\left|\overrightarrow{IE}\right|=\sqrt{(1-1)^2+\left(\frac{2x_0}{x_0-1}-2\right)}=\frac{2}{\left|x_0-1\right|}$

Độ dài $IF=\sqrt{\left(2x_0-1-1\right)^2+\left(2-2\right)^2}=2\left|x_0-1\right|$ Áp dụng công thức tính khoảng cách từ 1 điểm đến 1 đường thẳng ta có :

- Diện tích $\Delta IEF=\frac{1}{2}IE.IF=\frac{1}{2}.\frac{2}{\left|x_0-1\right|}.2\left|x_0-1\right|=2\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

BÀI TẬP T Ự LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Cho hàm số $y=\frac{x+1}{2x-1}$. Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng -1 có hệ số góc bằng :

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $-\frac{1}{3}$ **D.** $-\frac{1}{6}$

Bài 2-[Thi thử chuyên Quốc Học Huế lần 1 năm 2017]

Tìm tọa độ của tất cả các điểm M trên đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $d:\mathrm{y}=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

A. $(0;1),(2;3)$ **B.** $(1;0),(-3;2)$ **C.** $(-3;2)$ **D.** $(1;0)$

Bài 3-[Thi thử chuyên Thái Bình lần 1 năm 2017]

Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và trục hoành có phương trình là :

A. $y=3x$ **B.** $y=3x-3$ **C.** $y=x-3$ **D.** $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

Bài 4-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x-16$

A. $y=9x+16$ **B.** $y=9x+12$ **C.** $y=9x-10$ **D.** $y=9x-12$

Bài 5-[Thi thử Group nhóm toán Facebook lần 5 năm 2017]

Tìm tọa độ điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C):y=\frac{1}{3}x^2-x+\frac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$

A. $M(-2;0)$ **B.** $M\left(-3;-\frac{16}{3}\right)$ **C.** $\left(-1;\frac{4}{3}\right)$ **D.** $M\left(\frac{1}{2};\frac{9}{8}\right)$

Bài 6-[Thi tốt nghiệm THPT năm 2012]

Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=x_0$ biết $f''(x_0)=-1$

A. $\left[\begin{array}{l} y=-3x-\frac{5}{4} \\ y=3x+\frac{5}{4} \end{array}\right.$	**B.** $\left[\begin{array}{l} y=3x-\frac{5}{4} \\ y=-3x+\frac{5}{4} \end{array}\right.$	**C.** $\left[\begin{array}{l} y=-3x-\frac{5}{4} \\ y=3x-\frac{5}{4} \end{array}\right.$	**D.** $\left[\begin{array}{l} y=-3x+\frac{5}{4} \\ y=3x+\frac{5}{4} \end{array}\right.$

LỜI GIẢI BÀI TẬP T Ự LUYỆN

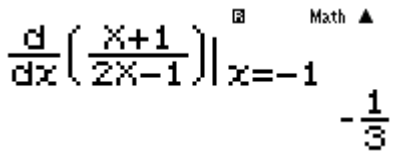
Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Cho hàm số $y=\frac{x+1}{2x-1}$. Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng -1 có hệ số góc bằng :

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $-\frac{1}{3}$ **D.** $-\frac{1}{6}$

Hướng dẫn giải

- Hệ số góc của tiếp tuyến là đạo hàm tại tiếp điểm $\Rightarrow k=f'(-1)=-\frac{1}{3}$



$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 2-[Thi thử chuyên Quốc Học Huế lần 1 năm 2017]

Tìm tọa độ của tất cả các điểm M trên đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $d:y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

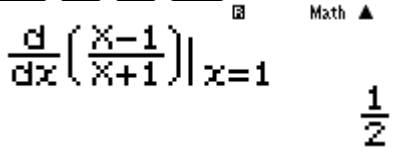
A. $(0;1),(2;3)$ **B.** $(1;0),(-3;2)$ **C.** $(-3;2)$ **D.** $(1;0)$

Hướng dẫn giải

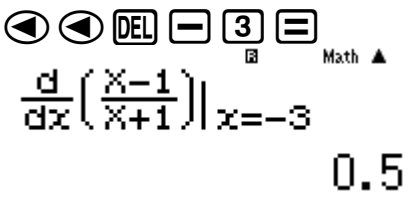
- Đề bài hỏi các điểm M nên ta dự đoán có 2 điểm , lại quan sát thấy đáp án **B** được cấu tạo từ đáp án **C** và **D** nên ta ưu tiên thử đáp án D trước.

- Tiếp tuyến song song với d nên tiếp tuyến có hệ số góc bằng hệ số góc của d và bằng $\frac{1}{2}$

Tính $f'(1)=\frac{1}{2}\Rightarrow$ Điểm $M(1;0)$ là một tiếp điểm



Tính $f'(-3)=\frac{1}{2}\Rightarrow$ Điểm $M(-3;2)$ là một tiếp điểm



$\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

Bài 3-[Thi thử chuyên Thái Bình lần 1 năm 2017]

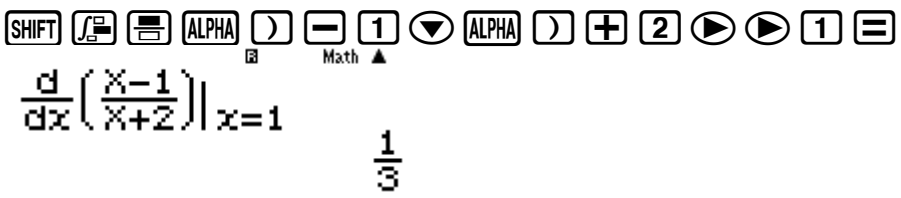
Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) và trục hoành có phương trình là :

A. $y=3x$ **B.** $y=3x-3$ **C.** $y=x-3$ **D.** $y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}$

Hướng dẫn giải

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$
- M là giao điểm của đồ thị (C) và trục hoành $\Rightarrow M(1;0)$ $\Rightarrow x_0=1; y_0=0$

Tính hệ số góc $k=f'(1)$



Thay vào ta có tiếp tuyến $y=\dfrac{1}{3}(x-1)+0\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Bài 4-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x-16$

A. $y=9x+16$ **B.** $y=9x+12$ **C.** $y=9x-10$ **D.** $y=9x-12$

GIẢI

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ với hệ số góc $k=f'(x_0)=3x_0^2-3$
- Tiếp tuyến song song với $y=9x-16$ nên có hệ số góc $k=9\Leftrightarrow 3x_0^2-3=9\Leftrightarrow x_0=\pm 2$

Với $x_0=2\Rightarrow y_0=2\Rightarrow$ Tiếp tuyến : $y=9(x-2)+2\Leftrightarrow y=9x-16$ Tính hệ số góc $k=f'(1)$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 5-[Thi thử Group nhóm toán Facebook lần 5 năm 2017]

Tìm tọa độ điểm M có hoành độ âm trên đồ thị $(C):y=\dfrac{1}{3}x^2-x+\dfrac{2}{3}$ sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$

A. $M(-2;0)$ **B.** $M\left(-3;-\frac{16}{3}\right)$ **C.** $\left(-1;\frac{4}{3}\right)$ **D.** $M\left(\frac{1}{2};\frac{9}{8}\right)$

GIẢI

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ với hệ số góc $k=f'(x_0)=x_0^2-1$
- Tiếp tuyến vuông góc với $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ nên có hệ số góc $k.\left(-\frac{1}{3}\right)=-1\Leftrightarrow k=3\Leftrightarrow x_0^2-1=3\Leftrightarrow x_0=\pm 2$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 6-[Thi tốt nghiệm THPT năm 2012]

Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=x_0$ biết $f''(x_0)=-1$

A. $\left[\begin{array}{l} y=-3x-\frac{5}{4} \\ y=3x+\frac{5}{4} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} y=3x-\frac{5}{4} \\ y=-3x+\frac{5}{4} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} y=-3x-\frac{5}{4} \\ y=3x-\frac{5}{4} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} y=-3x+\frac{5}{4} \\ y=3x+\frac{5}{4} \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải

- Gọi tiếp điểm là $M(x_0;y_0)$ $\Rightarrow$ Tiếp tuyến $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ với hệ số góc $k=f'(x_0)=x_0^4-4x_0$
- Ta có $f''(x)=3x_0^2-4\Rightarrow 3x_0^2-4=-1\Leftrightarrow x_0^2=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x_0=1;y_0=-\frac{7}{4} \\ x_0=-1;y_0=-\frac{7}{4} \end{array}\right.$

Với $x_0=1$ Tính hệ số góc $k=f'(1)$

SHIFT ∫ ▤ 1 ▼ 4 ▶ ALPHA) $x^{\blacksquare}$ 4 ▶ − 2 ALPHA) x^2 ▶ 1 =

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}X^4-2X^2\right)\Big|_{X=1}$

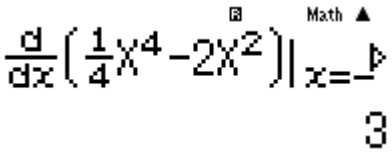
-3

Thay vào ta có tiếp tuyến $y=-3(x-1)-\frac{7}{4}\Leftrightarrow y=-3x+\frac{5}{4}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

Với $x_0=-1$ Tính hệ số góc $k=f'(1)$

◀ ◀ ◀ − =



Thay vào ta có tiếp tuyến $y=3(x+1)-\frac{7}{4}\Leftrightarrow y=3x+\frac{5}{4}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 5. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ.

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1.Quy ước tính giơi hạn vô định :

- $x \to +\infty \Rightarrow x = 10^9$
- $x \to -\infty \Rightarrow x = -10^9$
- $x \to x_0^+ \Rightarrow x = x_0 + 10^{-6}$
- $x \to x_0^- \Rightarrow x = x_o - 10^{-6}$
- $x \to x_0 \Rightarrow x = x_0 + 10^{-6}$

2.Giơi hạn hàm lượng giác : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$

3.Giới hạn hàm siêu việt : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

4.Lệnh Casio : r

2) VÍ DỤ MINH HỌA

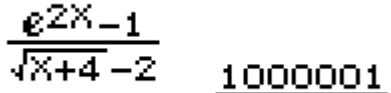
Bài 1-[Thi thử THPT chuyên Ngữ lần 1 năm 2017] Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sqrt{x+4}-2}$ bằng :

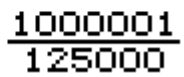
A. 1 **B.** 8 **C.** 2 **D.** 4

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Vì $x \to 0 \Rightarrow x = 0 + 10^{-6}$ Sử dụng máy tính Casio với chức năng CALC





➢ Ta nhận được kết quả $\dfrac{1000001}{125000} \approx 8$

$\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

Chú ý : Vì chúng ta sử dụng thủ thuật để tính giới hạn , nên kết quả máy tính đưa ra chỉ xấp xỉ đáp án , nên cần chọn đáp án gần nhất.

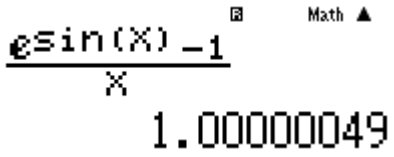
Bài 2-[Thi thử chuyên Amsterdam lần 1 năm 2017] Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$ bằng :

A. 1 **B.** –1 **C.** 0 **D.** $+\infty$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Vì $x \to 0 \Rightarrow x = 0 + 10^{-6}$ Sử dụng máy tính Casio với chức năng CALC



➢ Ta nhận được kết quả $1.00000049 \approx 1$

$\Rightarrow$ **A** là đáp án chính xác

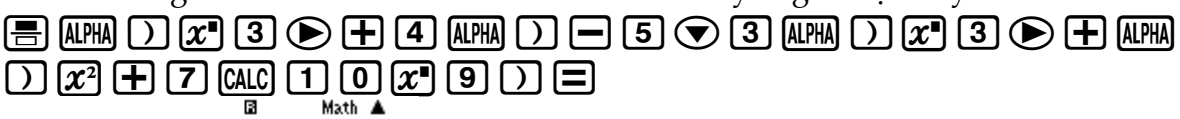
Bài 3 : Tính giới hạn : $\lim \dfrac{n^3+4n-5}{3n^3+n^2+7}$

A. $\dfrac{1}{3}$ **B.** 1 **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** $\dfrac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Đề bài không cho x tiến tới bao nhiêu thì ta hiểu đây là giới hạn dãy số và $x \to +\infty$



➢ Ta nhận được kết quả $0.3333333332 \approx \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow$ **A** là đáp án chính xác

Bài 4 : Kết quả giới hạn $\lim \dfrac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}$ là :

A. $-\dfrac{25}{2}$ **B.** $\dfrac{5}{2}$ **C.** 1 **D.** $-\dfrac{5}{2}$

Hướng dẫn giải

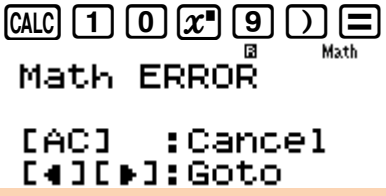
❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Đề bài không cho x tiến tới bao nhiêu thì ta hiểu đây là giới hạn dãy số và $x \to +\infty$. Tuy nhiên chúng ta chú ý, bài này liên quan đến lũy thừa (số mũ) mà máy tính chỉ tính được số mũ tối đa là 100 nên ta chọn $x = 100$

➢ Ta nhận được kết quả $-\dfrac{25}{2}$

$\Rightarrow$ **A** là đáp án chính xác

Chú ý : Nếu bạn nào không hiểu tính chất này của máy tính Casio mà cố tình cho $x = 10^9$ thì máy tính sẽ báo lỗi



Bài 5 : Tính giới hạn : $\lim\left(1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Ta không thể nhập vào máy tính Casio cả biểu thức n số hạng ở trong ngoặc được, vì vậy ta phải tiến hành rút gọn.

$$1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{2-1}{1.2}+\frac{3-2}{2.3}+...+\frac{n+1-n}{n(n+1)}$$

$$=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=2-\frac{1}{n+1}$$

➢ Đề bài không cho x tiến tới bao nhiêu thì ta hiểu đây là giới hạn dãy số và $x\to+\infty$

[2] [−] [▣] [1] [▼] [ALPHA] [)] [+] [1] [CALC] [1] [0] [$x^{\blacksquare}$] [9] [)] [=]

$2-\frac{1}{X+1}$

1.999999999

➢ Ta nhận được kết quả $1.999999999\approx 2$

$\Rightarrow$ **C** là đáp án chính xác

Bài 6 : Cho $S=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-....+\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$. Giá trị của S bằng :

A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Ta hiểu giá trị của S bằng $\lim\limits_{n\to+\infty} S$

➢ Ta quan sát dãy số là một cấp số nhân với công bội $q=-\frac{1}{3}$ và $u_1=\frac{1}{3}$

Vậy $S=u_2\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{3}.\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$

[▣] [1] [▼] [3] [▶] [×] [▣] [1] [−] [(] [−] [▣] [1] [▼] [3] [▶] [)] [$x^{\blacksquare}$] [ALPHA] [)] [▼]
[1] [−] [(] [−] [▣] [1] [▼] [3] [▶] [)] [CALC] [1] [0] [$x^{\blacksquare}$] [9] [)] [=]

$\frac{1}{3}\times\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{'}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$ $\frac{1}{4}$

➢ Ta nhận được kết quả $\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ **B** là đáp án chính xác

Chú ý : Trong tự luận ta có thể sử dụng công thức của cấp số nhân lùi vô hạn để tính

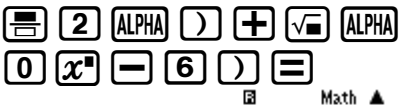
Bài 7: Tính giới hạn : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x+\sqrt{x}}{5x-\sqrt{x}}$

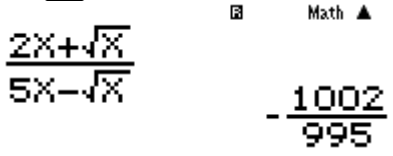
A. $+\infty$ **B.** $\frac{2}{5}$ **C.** $-\infty$ **D.** -1

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Đề bài cho $x \to 0^+ \Rightarrow x = 0 + 10^{-6}$





➢ Ta nhận được kết quả $-\frac{1002}{999} \approx -1$

$\Rightarrow$ **D** là đáp án chính xác

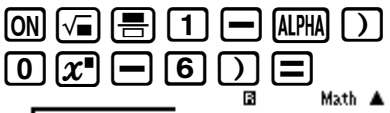
Bài 8 : Tính giới hạn : $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{\frac{1-x^3}{3x^2+x}}$

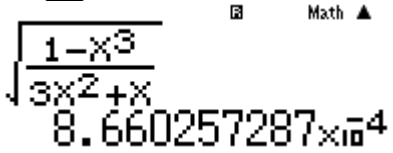
A. $-\infty$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **C.** 0 **D.** 1

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Đề bài cho $x \to 1^- \Rightarrow x = 0 + 10^{-6}$





❖ Ta nhận được kết quả chứa $10^{-4} \approx 0$

$\Rightarrow$ **C** là đáp án chính xác

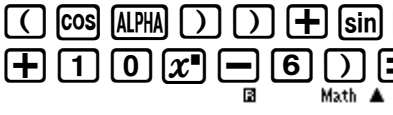
Bài 9 : Tính giới hạn : $L = \lim\limits_{x \to 0} (\cos x + \sin x)^{\cot x}$

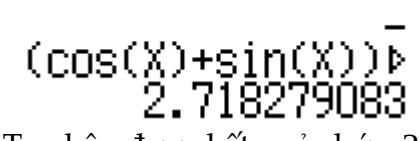
A. $L = \infty$ **B.** $L = 1$ **C.** $L = e$ **D.** $L = e^2$

Hướng dẫn giải

❖ **Cách 1 : CASIO**

➢ Đề bài cho $x \to 0 \Rightarrow x = 0 + 10^{-6}$. Phím cot không có ta sẽ nhập phím tan





❖ Ta nhận được kết quả chứa $2.718... \approx e$

$\Rightarrow$ **C** là đáp án chính xác