**3.2. TÍNH GIỚI HẠN BẰNG CÁC CÔNG THỨC CƠ BẢN**

1. Cho dãy số  thỏa mãn . Tìm tất cả các số thực  sao cho dãy số  xác định bởi  () hội tụ và giới hạn của nó khác 0.

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết ta có dãy số  là dãy số dương và tăng(1).

Giả sử  bị chặn trên suy ra nó hội tụ. Đặt , ta có ngay  (vô lý).

Vì vậy  không bị chặn trên (2).

Từ (1) và (2) ta có .

Xét . Đặt  (), ta có .

.

Suy ra . Từ đó  (sử dụng trung bình Cesaro).

Ta có .

Vậy  là giá trị cần tìm.

1. Cho dãy số  xác định như sau: 

a) Chứng minh rằng tồn tại vô số giá trị nguyên dương của n để .

b) Chứng minh rằng  có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

a) Trước hết ta luôn có . Xét (1).

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được  và .

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) Ta có  (2).

Chia vế của (1) cho (2) có .

Đặt , ta có .

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được , với  là dãy số Phibonxi: .

Hay  khi , dẫn đến .

1. Cho dãy số  được xác định như sau.

 .

Đặt , hãy tính .

**Hướng dẫn giải**

Dễ thấy .

Theo bài ra ta có.

.

Suy ra .

Do đó .

Mặt khác, từ  ta suy ra .

Kết hợp với  ta có.

.

Từ đó ta có .

1. Cho dãy số thực  với  thỏa mãn .

Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Với mỗi , đặt .

Ta có .

.

Do đó  là hàm tăng thực sự trên .

Ta có .

Do đó  sao cho  và .

Ta thấy .

Do đó: .

Vậy .

1. Cho dãy số  thỏa mãn: .

Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Dễ thấy . Từ giả thiết ta có .

Với mỗi , đặt ta có  và.

.

Do đó  .

Vậy .

1. Tính các giới hạn sau:

a) . b) .

**Hướng dẫn giải**

*.*

*.*

1. Tính giới hạn .

**Hướng dẫn giải**

.

.

.

1. Cho  là số nguyên dương và .Chứng minh rằng: .

**Hướng dẫn giải**

Đặt  khi đó từ .

Vậy .

1. Tính các giới hạn sau:.

a/  b/.

**Hướng dẫn giải**

Câu a.

.

.

.

Mà ta có các công thức:;;.

Do đó:là một đa thức bậc  có hệ số bậc  là .

Và là một đa thức bậc  có hệ số bậc  là .

Do đó:.

Câu b.

=.

Vì .

Vì và áp dụng công thức , nên.

1. Cho dãy số  thỏa mãn **.** Tìm  với **.**

**Hướng dẫn giải**

Ta có 

Với n:  (1).

 (2).

Từ (1) và (2) ta có .

Suy ra .

.

 suy ra =.

1. Tính giới hạn hàm số : .

**Hướng dẫn giải**

Ta có:.

.

= .

= .

= .

= = .

1. Tính: .

**Hướng dẫn giải**

.

1. Cho dãy số  thỏa mãn: . Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Dễ thấy . Từ giả thiết ta có .

Với mỗi , đặt ta có  và.

.

Do đó  .

Vậy .

1. Cho dãy số  thỏa mãn .

**Hướng dẫn giải**

Ta có  với mọi .

Do đó dãy  bị chặn dưới.

Với mọi , ta có  ⇒ .

Do đó  là dãy giảm.

Từ đó suy ra dãy  có giới hạn và dễ dàng tìm được .

1. Cho dãy số thực : . Xét dãy số  cho bởi :

 Chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn và tính giớn hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

▪ Ta có : .

▪ Đặt :  thì ta có .

.

.

.

.

Khi đó : . Suy ra  là dãy truy hồi tuyến tính cấp 2.

Xét phương trình đặc trưng : .

Dãy có số hạng tổng quát dạng .

trong đó : .

▪ Lúc này, ta có.

.

Suy ra : .

▪ Vậy : .

1. Cho dãy số  xác định bởi: , . Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Từ giả thiết  ta có  nên  xác định bởi  có giới hạn hữu hạn, giả sử ( hữu hạn).

Cũng từ  ta có .

.

Do đó .

.

….

.

Cộng theo vế ta được : .

.

Mà  ( do) nên.

 hay .

1. Cho dãy số  xác định bởi : . Chứng minh dãy  có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Ta có .

Hàm số  liên tục và nghịch biến trên [0,+), .

Ta có   bị chặn.

.

suy ra dãy tăng và dãygiảm suy ra  là các dãy hội tụ.

Giả sử .

Từ .

Từ .

Giải hệ phương trình . Vậy .

1. Cho  và , Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Ta có  và **.**

Dãy này rõ ràng hội tụ và có giới hạn là.

Từ đó suy ra .