TSKH. VŨ ĐÌNH HÒA

ĐỊNH LÍ VÀ VẤN ĐỀ VỀ ĐỒ THỊ HỮU HẠN

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập VŨ DƯƠNG THỤY

Biên tập lần đầu :
LƯƠNG BÍCH LƯU

Biên tập tái bản :
PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Biên tập mĩ thuật :
TẠ TRỌNG TRÍ

Trình bày bìa :
NGUYỄN MẠNH HÙNG

Sửa bài :
LƯƠNG BÍCH LƯU

Chế bản :
VŨ ĐÌNH HÒA

51 / GD - 03 1419/214-02 Mã số : 8H789T3 - CNĐ

Lời nói đầu

Lí thuyết đồ thị, *"tô pô của các đoạn thẳng rời rạc"* (König), là một lĩnh vực hãy còn tương đối trẻ của toán học dù những vấn đề của lí thuyết đồ thị đã có từ vài trăm năm trước đây (năm 1736 với bài toán 7 cây cầu ở thành phố Königsberg) gắn liền với những tên tuổi các nhà toán học lớn như Euler, Gauß, Hamilton... Cuốn sách giáo khoa đầu tiên về lí thuyết đồ thị được König viết và xuất bản tại Leipzig (nay thuộc CHLB Đức) năm 1936. Mãi 22 năm sau cuốn sách giáo khoa thứ hai mới được Berge viết và in tại Paris. Nhưng trong khoảng vài chục năm gần đây lí thuyết đồ thị được phát triển mạnh mẽ không ngừng cả về chiều sâu cũng như chiều rộng của nó. Một trong những lí do khiến lí thuyết đồ thị phát triển mạnh mẽ như vậy trước hết là do những ứng dụng sâu rộng của nó trong nhiều ngành khoa học khác nhau. Ngày nay, lí thuyết đồ thị đã trở thành một công cụ không thể thiếu được khi phải giải quyết những vấn đề có tính chất phải xem xét cả tổng thể. Đứng trước tình hình phát triển như vũ bão của lí thuyết đồ thị, cũng như đứng trước khối lượng khổng lồ các tài liệu và các công trình nghiên cứu về lí thuyết đồ thị, tác giả chỉ có thể chọn lựa ra những vấn đề chủ chốt nhất và cơ bản nhất để đưa vào sách, vẫn còn những vấn đề lí thú khác đành phải bỏ qua không nhắc đến trong cuốn sách này. Những vấn đề được đề cập trong cuốn sách này trước hết là những vấn đề của đồ thị hữu hạn gồm có các bài toán nổi tiếng của Euler và Hamilton... cùng với những vấn đề phân tích các đồ thị thành các đồ thị thành phần.

Trong cuốn sách có nhiều bài tập hấp dẫn minh họa vẻ đẹp của lí thuyết đồ thị. Từ đầu cuốn sách, có một chương về lí thuyết tập hợp, một cơ sở toán không thể thiếu được của lí thuyết đồ thị. Các bạn đọc là học sinh những năm cuối của phổ thông, các thày cô giáo lớp chuyên toán cũng có thể theo dõi được các vấn đề trình bày trong sách. Cuối sách là một danh mục sách tham khảo giúp bạn đọc có thể tìm được tài liệu chuyên ngành và một bảng phiên âm tên riêng nước ngoài. Tác giả hy vọng rằng cuốn sách này sẽ trở thành một tài liệu chuyên môn cần thiết cho một lớp rộng rãi các bạn đọc.

Tác giả xin chân thành cảm ơn giáo sư Đoàn Quỳnh (Đại học sư phạm Hà Nội) đã đọc bản thảo và cho những ý kiến bổ ích, và cũng mong mỏi được các bạn đọc gần xa góp ý kiến phê bình để cuốn sách được hoàn chỉnh hơn nữa.

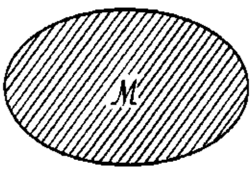
Tác giả

TSKH. Vũ Đình Hòa

Chương 1
Tập hợp và ánh xạ

§ 1.1. Khái niệm về tập hợp

Lí thuyết tập hợp do Cantor (1845-1918) xây dựng cách đây gần 100 năm, nghiên cứu những tính chất chung của các tập hợp mà không phụ thuộc vào bản chất của những đối tượng lập nên các tập hợp đó.



Hình 1

Theo Cantor, *tập hợp* $\mathcal{M}$ được hiểu là một tổng thể chung các thành phần x (được gọi là *phần tử* của $\mathcal{M}$ và viết $x \in \mathcal{M}$) cùng chung một tính chất đặc trưng (quy tắc nhận biết) để lập nên $\mathcal{M}$ (H. 1).

Trong đời sống chúng ta có rất nhiều ví dụ về tập hợp: Tập hợp tất cả dân cư một thành phố nào đó; tập hợp các chữ cái của bảng chữ cái tiếng Việt; tập hợp tất cả các điểm trên mặt phẳng; tập hợp tất cả số nguyên tố; tập hợp tất cả các đối tượng có cùng một tính chất nào đó...

Để tiện sử dụng người ta biểu diễn tập hợp bằng các hình giới hạn bởi những đường cong khép kín không tự cắt trên mặt phẳng.

Có một số cách được quy ước để biểu diễn tập hợp như sau:

1) Phương pháp liệt kê: Ta có thể liệt kê toàn bộ các phần tử của tập hợp, nếu có thể. Chẳng hạn, người ta vẫn biểu diễn tập hợp $\mathcal{M}$ gồm ba số tự nhiên đầu tiên như sau:

$$\mathcal{M} = \{1; 2; 3\}.$$

2) Thông qua quy tắc đơn giản: Người ta liệt kê một số phần tử đầu tiên (kèm theo dấu "..." để biểu thị còn có các phần tử tiếp theo) nếu thông qua các phần tử này có thể thấy ngay quy luật xác định các phần tử tiếp theo nó. Ví dụ để biểu diễn tập số tự nhiên $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{N} = \{0; 1; 2; ...\}.$$

3) Xác định bằng công thức hoặc quy luật (cho dù không biết rõ việc xác định các phần tử theo quy luật này có dễ dàng hay không).

Chẳng hạn để biểu diễn tập các số nguyên tố $\mathcal{P}$, ta có thể viết:

$$\mathcal{P} = \{p|\ p \text{ nguyên tố. }\}.$$

Tập hợp $\mathcal{K}$ các điểm trên đường tròn đơn vị có tâm tại gốc tọa độ:

$$\mathcal{K} = \{(x; y)|\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

BÀI TẬP

▷ **1.1.1.** *Hãy biểu thị tập hợp $\mathcal{M}$ các số nguyên dương chẵn.*

▷ **1.1.2.** *Hãy biểu thị tập hợp các điểm trên một đường thẳng song song với trục tung trong một hệ tọa độ Đêcac.*

§ 1.2. Tập hợp hữu hạn và tập hợp vô hạn

Trong trường hợp ta có thể liệt kê hết tất cả các phần tử của một tập hợp $\mathcal{M}$ thì $\mathcal{M}$ là tập hợp *hữu hạn* và *lực lượng* của $\mathcal{M}$ chính là số lượng các phần tử của $\mathcal{M}$.

Tập hợp không có phần tử nào được gọi là tập *rỗng* và được kí hiệu là $\emptyset$.

Trong trường hợp không thể liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp $\mathcal{M}$ thì $\mathcal{M}$ là tập hợp *vô hạn.* Tập hợp $\mathbf{N}$ các số tự nhiên là một tập hợp vô hạn. Tập hợp $\mathbf{R}$ các số thực cũng là tập hợp vô hạn.

Hai tập hợp $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ được gọi là *bằng nhau* (viết $\mathcal{A} = \mathcal{B}$) nếu mỗi phần tử của $\mathcal{A}$ là một phần tử của $\mathcal{B}$ và ngược lại. Chẳng hạn tập hợp các số tự nhiên (có tính cả số 0) và tập hợp các số nguyên không âm là bằng nhau.

Tập hợp $\mathcal{A}$ được gọi là *tập hợp con* của tập hợp $\mathcal{B}$ (viết

$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$) nếu mỗi phần tử của tập hợp $\mathcal{A}$ là một phần tử của tập hợp $\mathcal{B}$. Tập hợp $\mathbf{N}$ các số tự nhiên là tập con của tập hợp $\mathbf{R}$ các số thực và hiển nhiên là $\mathbf{N} \neq \mathbf{R}$. Rõ ràng là nếu $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ và $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ thì $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

BÀI TẬP

▷ **1.2.1.** *Trong một kì thi học sinh giỏi một em có thể tham gia thi nhiều môn. Biết rằng có 20 em thi toán, 14 em thi văn, 10 em thi ngoại ngữ, 6 em vừa thi toán vừa thi ngoại ngữ, 5 em vừa thi văn vừa thi ngoại ngữ, 2 em vừa thi văn vừa thi toán và chỉ có một em thi cả ba môn nói trên. Hỏi rằng có bao nhiêu em tham gia kì thi học sinh giỏi?*

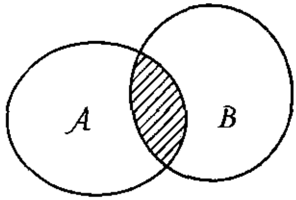
▷ **1.2.2.** *Cho tập hợp* $X = \{3; -5; \sqrt{2}\}$. *Những tập hợp con của tập hợp X là những tập hợp nào?*

▷ **1.2.3.** *Hãy tính số tập con hai phần tử của tập hợp X có $n \geq 2$ phần tử cho trước.*

§ 1.3. Các phép toán với tập hợp

1) **Giao** của hai tập hợp $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ cho trước là tập hợp chứa tất cả những phần tử vừa thuộc $\mathcal{A}$ vừa thuộc $\mathcal{B}$.

Giao của $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ được kí hiệu là $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ (phần gạch chéo trong hình 2). Trong trường hợp $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ thì ta nói rằng $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ là hai tập hợp *rời nhau*.



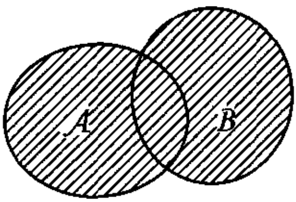
Hình 2

▷ **Ví dụ 1:** *Kí hiệu $\mathcal{A}$ là tập hợp tất cả các số chẵn và $\mathcal{B}$ là tập hợp tất cả các số là bội của 3. Khi đó $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ là tất cả các số là bội của 6.*

Phép giao các tập hợp được mở rộng cho một họ $\mathcal{I}$ tùy ý các tập hợp. Giao của các tập hợp A_i với $i \in \mathcal{I}$ được kí hiệu là $\bigcap\{A_i | i \in \mathcal{I}\}$ hoặc $\bigcap_{\mathcal{I}} A_i$.

2) **Hợp** của hai tập hợp $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$, được kí hiệu là $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, là tập hợp chứa tất cả những phần tử của $\mathcal{A}$ và tất cả những phần tử của $\mathcal{B}$ (phần gạch chéo trong hình 3).

▷ **Ví dụ 2:** *Kí hiệu $\mathcal{A}$ là tập hợp tất cả các số tự nhiên chẵn và $\mathcal{B}$ là tập hợp tất cả các số tự nhiên lẻ. Khi đó $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ là tập hợp tất cả các số tự nhiên.*



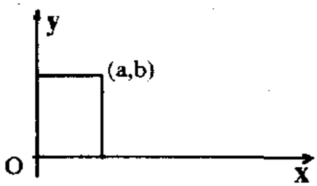
Hình 3

Phép hợp các tập hợp được mở rộng cho một họ $\mathcal{I}$ tùy ý các tập hợp. Hợp của các tập hợp A_i với $i \in \mathcal{I}$ được kí hiệu là $\bigcup\{A_i | i \in \mathcal{I}\}$ hoặc $\bigcup\limits_{\mathcal{I}} A_i$.

3) **Tích Đêcac** của hai tập hợp $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ là tập hợp

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(a, b) | a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}.$$

Ví dụ như mặt phẳng tọa độ Đêcac là tích Đêcac của các tập hợp $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathbf{R}$.



Khi $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, thay vì viết $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, ta có thể viết $\mathcal{A}^2$, chẳng hạn ta vẫn nói cả mặt phẳng là không gian $\mathbf{R}^2$ (H. 4).

Hình 4

Cũng như đối với hợp và giao các tập hợp. Khái niệm tích Đêcac được mở rộng cho trường hợp nhiều tập hợp.

BÀI TẬP

▷ **1.3.1.** *Chứng minh các đẳng thức:*

1) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$.

2) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$.

3) $(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}) \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$.

4) $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cap \mathcal{C}) \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$.

▷ **1.3.2.** *Tính số phần tử của* $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ *nếu* $\mathcal{A}$ *có* n *và* $\mathcal{B}$ *có* m *phần tử.*

▷ **1.3.3.** *Mỗi điểm trên mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh rằng tồn tại một hình chữ nhật có bốn đỉnh được tô bởi một màu.*

▷ **1.3.4.** *Trên mặt phẳng tọa độ lấy năm điểm có cả hai tọa độ là các số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm trong chúng sao cho trung điểm của đoạn thẳng nối chúng có cả hai tọa độ là số nguyên.*

§ 1.4. Quan hệ

Một *quan hệ* $\mathcal{Q}$ giữa $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ là một tập con $\mathcal{Q}$ của $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Với $(a; b) \in \mathcal{Q}$ ta vẫn viết $a\mathcal{Q}b$. Ví dụ cho $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ là tập hợp những người học sinh trong một lớp. Xét $\mathcal{Q}_1$ là mối quan hệ họ hàng và $\mathcal{Q}_2$ là mối quan hệ quen biết giữa $\mathcal{A}$ và $\mathcal{B}$ thì ta có $\mathcal{Q}_1 \subset \mathcal{Q}_2$.

Một quan hệ $\mathcal{Q}$ trong tập $\mathcal{A}$ cho trước được gọi là quan hệ *tương đương* nếu như nó thỏa mãn những điều kiện sau:

1) $a\mathcal{Q}a$ với mọi $a \in \mathcal{A}$,

2) Nếu $a\mathcal{Q}b$ thì $b\mathcal{Q}a$, và

3) Nếu $a\mathcal{Q}b$ và $b\mathcal{Q}c$ thì $a\mathcal{Q}c$.

▷ **Ví dụ 3:** *Quan hệ bằng nhau trong tập số thực là quan hệ tương đương.*

Trái lại, quan hệ quen biết trong tập hợp con người trên trái đất có hai tính chất 1) và 2) nhưng không có tính chất bắc cầu (tính chất 3) cho nên không phải là quan hệ tương đương.

Dễ thấy rằng quan hệ sau trong tập số tự nhiên là quan hệ tương đương.

▷ **Ví dụ 4:** *Quan hệ "aQb nếu tích ab là số chính phương (bình phương đúng của một số tự nhiên)" là quan hệ tương đương trong tập số tự nhiên.*

Rõ ràng một quan hệ tương đương $\mathcal{Q}$ chia tập $\mathcal{A}$ cho trước thành các tập, gồm các phần tử tương đương với nhau theo quan hệ $\mathcal{Q}$, được gọi là *phân hoạch* của $\mathcal{A}$ theo quan hệ $\mathcal{Q}$.

§ 1.5. Ánh xạ

Một quan hệ $f \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ được gọi là một *ánh xạ* f từ $\mathcal{A}$ vào $\mathcal{B}$ (viết là f: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$) nếu f có tính chất:

1) $\forall a \in \mathcal{A}, \exists b \in \mathcal{B} | (a, b) \in f$, và

2) $(a, b_1), (a, b_2) \in f \Rightarrow b_1 = b_2$.

Thay vì viết $(a, b) \in f$ ta vẫn viết $b = f(a)$ và gọi b là *ảnh* của a và a là *tạo ảnh* của b trong ánh xạ $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Ánh xạ thường được sử dụng thường xuyên trong cuộc sống hơn là ta tưởng. Ví dụ khi đánh số nhà là ta thực hiện một ánh xạ từ tập hợp các ngôi nhà cần đánh số vào tập hợp các chỉ số nhà.

Ánh xạ $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ được gọi là *đơn ánh* nếu ngoài tính chất 1) và 2) f thỏa mãn thêm tính chất:

3) $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$.

Rõ ràng trong ví dụ đánh số nhà nói trên, yêu cầu cuộc sống đòi hỏi việc đánh số nhà phải là một đơn ánh (để khỏi xảy ra nhầm lẫn khi gửi thư chẳng hạn), điều mà nhiều khi không được thỏa mãn trong thực tế.

Toàn ánh là một ánh xạ $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ thỏa mãn 1) và 2) và:

4) $\forall b \in \mathcal{B}, \exists a \in \mathcal{A} : b = f(a)$.

Một sự phân phát hết kẹo trong túi cho các em bé sao cho em bé nào cũng có phần là một ví dụ về toàn ánh (từ tập hợp những cái kẹo trong túi vào tập hợp các em bé có mặt).

Một ánh xạ vừa là đơn ánh lại vừa là toàn ánh được gọi là một *song ánh*. Một song ánh $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sẽ thỏa mãn tất cả bốn điều kiện 1) - 4) kể trên. Trong ví dụ về phân phát kẹo kể trên, toàn ánh sẽ trở thành song ánh nếu mỗi em bé được phát đúng một cái kẹo. Khi $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ là song ánh, thì ta có thể thiết lập ánh xạ ngược $f^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ theo quan hệ: $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$.

Ánh xạ $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ được gọi là một *hàm số* khi $\mathcal{B}$ là một tập hợp số. Một ví dụ là hàm số $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$ trên khoảng $(-1, 1)$.

Cho trước ánh xạ $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ và $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$. *Tích* của f và g được kí hiệu là

$$g.f : \mathcal{A} \to \mathcal{C},$$

với $g.f(a) = g(f(a))$ cho mọi $a \in \mathcal{A}$.

BÀI TẬP

▷ **1.5.1.** *Có bao nhiêu ánh xạ khác nhau từ một tập A có n phần tử vào tập hợp $\mathcal{B}$ có 2 phần tử?*

§ 1.6. Đếm được và không đếm được

Dễ thấy rằng hai tập hợp hữu hạn có cùng một số lượng phần tử khi và chỉ khi tồn tại một song ánh từ tập hợp này vào tập hợp kia. Nhưng không phải lúc nào cũng tồn tại song ánh giữa hai tập hợp vô hạn.

▷ **Ví dụ 5:** *Ta chứng minh rằng không tồn tại một song ánh giữa tập số tự nhiên* $\mathbf{N}$ *và tập số thực trong khoảng* $(0, 1)$.

Thật vậy giả sử tồn tại song ánh $f : \mathbf{N} \to (0,1)$. Ta kí hiệu $f(i) = 0, a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n} \dots$. Ta xây dựng $a = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ sao cho $a_n \notin \{a_{n_n}; 0; 9\}$. Rõ ràng $a \in (0,1)$ và $\forall i \in \mathbf{N} : a \neq a_i$, vô lí. $\diamondsuit$

Như vậy tập vô hạn cũng không phải lúc nào cũng *"nhiều"* như nhau. Vì tập số tự nhiên $\mathbf{N}$ được sinh ra trong quá trình đếm cho nên mọi tập tương ứng với nó qua một song ánh được gọi là tập *đếm được*. Còn những tập vô hạn không tương ứng được với tập số tự nhiên qua một song ánh được gọi là *tập không đếm được*. Tập điểm trong khoảng $(0,1)$ và tất nhiên là tập số thực $\mathbf{R}$ là những tập hợp không đếm được.

BÀI TẬP

▷ **1.6.1.** *Hãy xây dựng một song ánh $f : (0,1) \to \mathbf{R}$.*

▷ **1.6.2.** *Cho trước $\mathcal{M}$ là một tập hợp gồm m phần tử. Hãy tính số các phần tử của $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, với $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ là tập hợp các tập con của $\mathcal{M}$.*

▷ **1.6.3.** *Cho trước $\mathcal{M}$ là một tập hợp tùy ý. Hãy chứng minh rằng không tồn tại song ánh từ $\mathcal{M}$ vào $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ - ở đây $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ là tập hợp các tập con của $\mathcal{M}$.*

§ 1.7. Quy nạp toán học

Tập hợp các số tự nhiên $\mathbf{N}$ tuy là một tập vô hạn, nhưng nếu ta bắt đầu quá trình đếm bắt đầu từ số 0 thì số tự nhiên bất kì nào cũng có lúc được đếm tới.

Điều đó có nghĩa nếu kiểm tra xem các số của tập số tự nhiên có phải luôn có một tính chất A cho trước thì ta có thể tiến hành một quá trình kiểm tra "dọc theo" thứ tự sắp xếp tự nhiên của số tự nhiên như quá trình đếm ở trên đã nói.

Tuy nhiên vì người ta không thể tự thực hiện quá trình kiểm tra như vậy cho vô hạn bước, cho nên phải có một quy trình "tự động hóa" cho quá trình này.

Trước hết ta phải kiểm tra xem giá trị đầu tiên của tập hợp $\mathbf{N}$ có thỏa mãn tính chất A hay không. Tiếp đó chúng ta giả định rằng số tự nhiên n nào đó thỏa mãn tính chất A và chứng minh được rằng sự công nhận này cho ta cơ sở để chứng minh rằng số $n+1$ cũng có tính chất A thì "tự động" mệnh đề A được thỏa mãn cho mọi số tự nhiên.

Cách chứng minh như trên được gọi là chứng minh quy nạp toán học.

Một khẳng định $T(n)$ thỏa mãn:

1) $T(0)$ đúng, và

2) $T(n+1)$ đúng nếu như $T(n)$ đúng,

thì $T(n)$ đúng cho mọi $n \in \mathbf{N}$.

Đôi khi ta có thể tận dụng cả những giá trị $T(n-1)$, $T(n-2)$, ..., $T(1)$ vào việc chứng minh khẳng định $T(n+1)$. Tức là ta có thể chứng minh theo mô hình sau:

Một khẳng định $T(n)$ thỏa mãn:

1) $T(0)$ đúng, và

2) $T(n+1)$ đúng nếu như $T(k)$ đúng cho mọi $k \leq n$,

thì $T(n)$ đúng cho mọi $n \in \mathbf{N}$.

Và nhiều khi do yêu cầu bài toán chỉ cần phải chứng minh $T(n)$ cho $n \geq n_0$ nào đó mà thôi.

Một khẳng định $T(n)$ thỏa mãn:

1) $T(n_0)$ đúng, và

2) $T(n+1)$ đúng nếu như $T(n)$ đúng với $n \geq n_0$,

thì $T(n)$ đúng cho mọi $n \in \mathbf{N}$ và $n \geq n_0$.

▷ **Ví dụ 6:** *Tìm n_0 nhỏ nhất sao cho $\forall n \geq n_0$, chữ số tận cùng của số $T(n) = 2^{2^n}$ là chữ số 6.*

Với $n = 1$ thì $T(1)$ tận cùng là 4. Với $n = 2$ thì $T(2)$ tận cùng là 6. Giả sử rằng với $n \geq 2$ nào đó thì $T(n)$ tận cùng là 6. Khi đó $T(n+1) = 2^{2^{n+1}} = 2^{2^n.2} = T(n)^2$ tận cùng bởi tận cùng của 6^2 là 6. Vậy $T(n) = 2^{2^n}$ tận cùng bởi chữ số 6 cho mọi $n \geq 2$. Giá trị cần tìm là $n_0 = 2$. ◊

Lưu ý rằng nguyên lí quy nạp toán học tương đương với khẳng định sau đây cho các tập con không rỗng của tập hợp các số tự nhiên **N**.

Mọi tập con không rỗng của tập hợp các số tự nhiên **N** *đều có phần tử nhỏ nhất.*

BÀI TẬP

▷ **1.7.1.** *S_n là số các miền do n đường thẳng đôi một không song song và không có ba đường thẳng nào trong chúng đồng quy tạo ra trên mặt phẳng. Chứng minh rằng*

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

▷ **1.7.2.** *Trên mặt phẳng có n đường thẳng đôi một không song song và không có ba đường thẳng nào trong chúng đồng quy. Những đường thẳng này cắt mặt phẳng thành những phần mặt phẳng, trong đó có một số trong chúng là những đa giác lồi. Hãy tính số đa giác được tạo thành.*

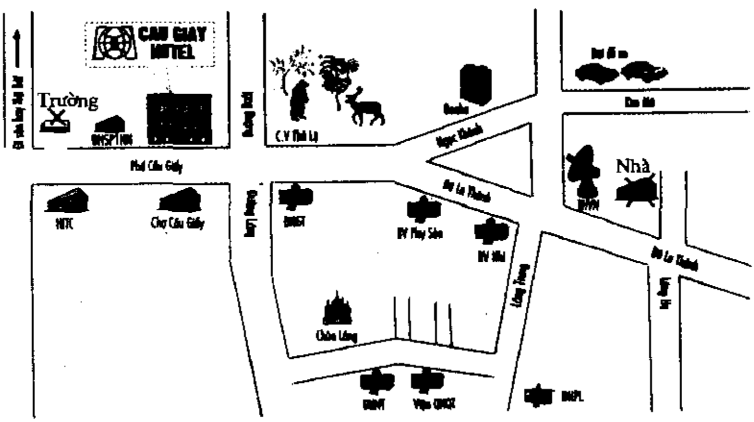
▷ **1.7.3.** *Chứng minh rằng từ $n+1$ số bất kì trong $2n$ số nguyên dương đầu tiên luôn có thể tìm được hai số là bội của nhau.*

▷ **1.7.4.** *Chứng minh bất đẳng thức $2^{2^n} > p_n$ cho số nguyên tố thứ n.*

Chương 2
Khái niệm cơ bản về đồ thị

§ 2.1. Các ví dụ về đồ thị

Trong đời sống chúng ta phải giải quyết nhiều vấn đề mà ta có thể coi một đường cong là *cạnh* và đầu mút của chúng được coi là *đỉnh* của cạnh. Để làm rõ điều này chúng ta có thể xem xét những ví dụ sau đây.



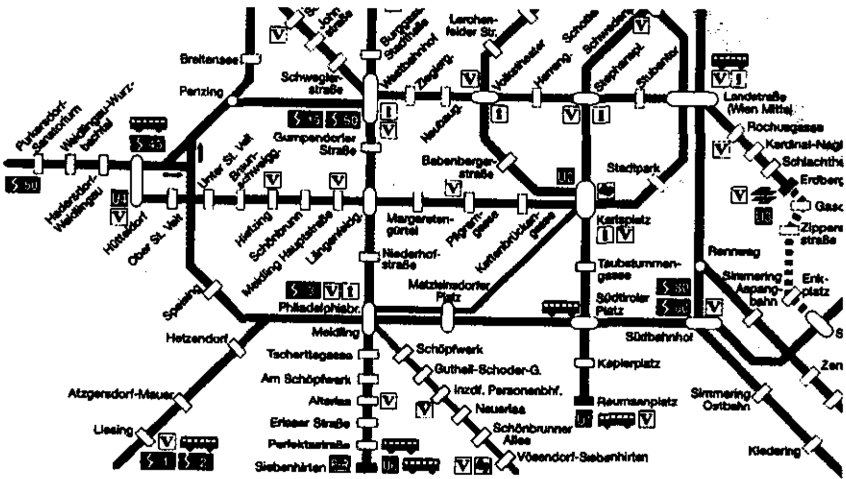
Hình 5

▷ **Ví dụ 1:** *Hãy xác định một con đường đi bộ từ nhà tới trường tối ưu nhất (hiểu theo nghĩa khoảng cách ngắn nhất).*

Khi giải quyết bài toán này bạn phải quan sát trên bản đồ, bỏ qua độ rộng hẹp của các đường phố và chỉ còn chú ý tới độ dài của các con đường cũng như các đầu mút giao thông để phát hiện một con đường ngắn nhất (H. 5). Trong vấn đề tìm đường đi ngắn nhất này chúng ta đã coi các phố là các cạnh và các đầu mút giao thông (các ngã tư chẳng hạn) là các đỉnh của các cạnh.

Trong nhiều vấn đề phải giải quyết khác của đời sống đôi lúc ta còn bỏ qua yếu tố độ dài của các cạnh của hệ thống cạnh và đỉnh trong mô hình, như trong ví dụ sau chỉ rõ.

▷ **Ví dụ 2:** *Hãy vẽ sơ đồ mạng giao thông công cộng của một thành phố (H. 6) .*

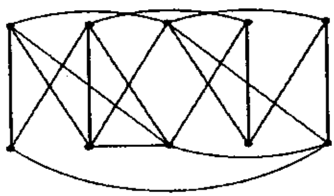


Hình 6

Trong hình 6 là bản đồ giao thông công cộng thành phố Wien (thủ đô nước Áo). Trong vấn đề nêu ở trên rõ ràng ta sẽ bỏ qua yếu tố độ dài các tuyến đường mà chỉ còn quan tâm đến yếu tố tuyến đường đi như thế nào, từ bến nào tới bến nào. Trong vấn đề này các bến là các đỉnh còn cạnh là các tuyến đường đi qua chúng hoặc xuất phát từ các bến. Nhưng nhiều khi chúng ta không dễ phát hiện yếu tố cạnh và đỉnh trong bài toán chúng ta phải giải quyết.

▷ **Ví dụ 3:** *Hãy phân nhóm học tập trong lớp sao cho những người trong cùng một nhóm là bạn thân của nhau.*

Ở đây không còn những đường đi cho sẵn. Nhưng ta có thể nhận thấy các đỉnh trong sơ đồ cần lập là những em học sinh trong lớp.



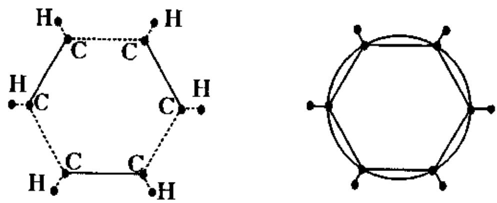
Hình 7

Trong sơ đồ biểu diễn ta nối những cặp hai em học sinh vốn vẫn là bạn thân của nhau lại bằng một đoạn thẳng (hoặc bằng một đường cong cũng được).

Bằng cách đó ta sẽ có một sơ đồ gồm các đỉnh (các em học sinh) và các cạnh (các đường nối hai em chỉ khi hai em này là bạn thân của nhau trong lớp). Trong hình 7 là một ví dụ với $n = 10$ em học sinh.

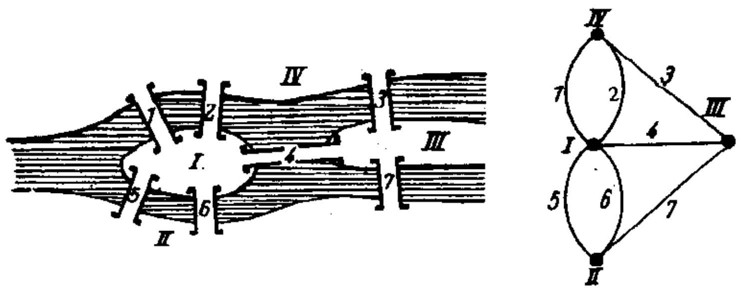
Những mô hình quy về các tập đỉnh và các cạnh nối các đỉnh là những đồ thị. Không chỉ trong đời sống mà đặc biệt trong khoa học chúng ta thường xuyên gặp những đồ thị.

▷ **Ví dụ 4:** *Công thức hóa học của C_6H_6 (H. 8).*



Hình 8

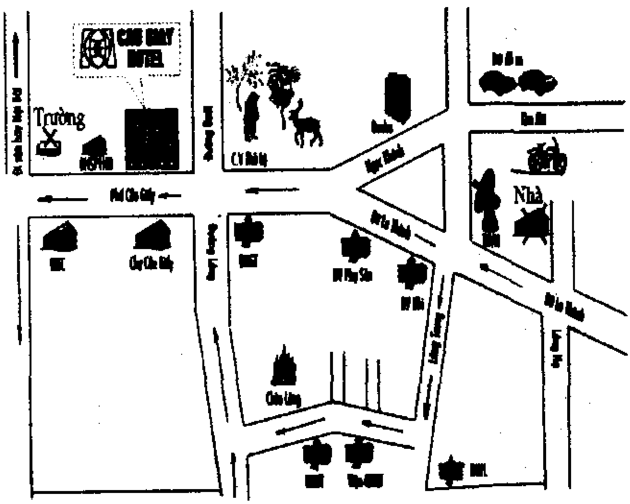
▷ **Ví dụ 5:** *7 cây cầu ở thành phố Königsberg năm 1736.*



Hình 9

Trong ví dụ này, những người dân của thành phố Königsberg đặt câu hỏi liệu có thể đi một vòng qua 7 cây cầu (H. 9) sao cho mỗi cây cầu chỉ đi qua đúng một lần mà thôi? Nếu như coi mỗi cây cầu là một cạnh của đồ thị với đỉnh là các hòn đảo và hai bờ sông thì bài toán được đặt ra là có thể vẽ đồ thị tương ứng bằng một nét bút hay không? Bài toán này được người dân thành phố Königsberg đặt ra từ những năm 1736 và được Euler giải quyết trọn vẹn. Từ đấy trở đi, những đường một nét trong lí thuyết đồ thị được mang tên của ông.

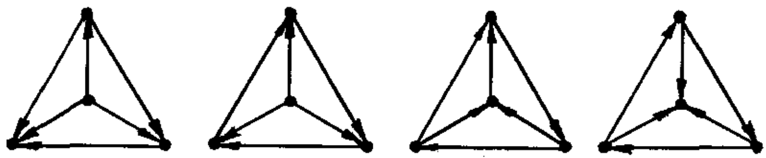
§ 2.2. Định nghĩa đồ thị



Hình 10

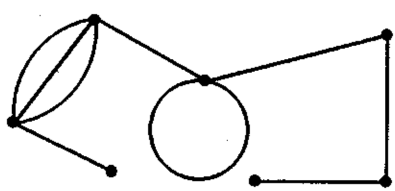
Trong các ví dụ kể trên, các cạnh của đồ thị đều là các đường không có hướng. Những đồ thị như vậy được gọi là *đồ* *thị vô hướng.* Nhưng đôi khi ta gặp những vấn đề mà khi xác lập đồ thị tương ứng ta buộc phải xác định một hướng đi cho nó. Chẳng hạn trong ví dụ 1, nếu bạn là người đi xe đạp thì bạn phải lưu ý đến yếu tố là có thể có những con đường một chiều (được đánh dấu bằng mũi tên trên hình 10).

Khi biểu diễn đồ thị có hướng thì nguyên tắc cũng vẫn giống như biểu diễn đồ thị cạnh không có hướng. Riêng đối với những cạnh có hướng ta đánh dấu mũi tên theo chiều cạnh để biểu thị hướng đi của nó.



Hình 11

Trong hình 11 là một số đồ thị có hướng với 4 đỉnh. Điểm chung nhau của tất cả các ví dụ mà chúng ta xem xét là chúng chỉ có hữu hạn đỉnh. Những đồ thị chỉ có hữu hạn đỉnh được gọi là đồ thị *hữu hạn.*



Hình 12

Trong hình 12 là một đồ thị có cạnh kép bên trái và khuyên ở giữa. Điểm khác biệt giữa ví dụ 3 và hai ví dụ 4 và 5 là: Mỗi cặp đỉnh của đồ thị ở ví dụ 3 chỉ có không quá một cạnh nối còn đồ thị trong ví dụ 4 và ví dụ 5 có những cặp đỉnh mà giữa chúng có nhiều hơn một cạnh nối (chẳng hạn nối hai đỉnh I và II trong hình 9 là hai cạnh 5 và 6). Cũng có tình huống là một đỉnh được nối với chính nó bởi một cạnh nào đó mà ta gọi là *khuyên* (H. 12).

Với đặc điểm này đồ thị hữu hạn được chia thành hai loại cơ bản là *đồ thị đơn* và *đồ thị kép*. Đồ thị đơn thì không có khuyên và giữa hai đỉnh của nó có không quá một cạnh nối chúng, còn trong đồ thị kép thì hoặc có khuyên hoặc tồn tại hai đỉnh nào đó mà giữa chúng có ít nhất hai cạnh nối.

Chính xác về mặt toán học đồ thị được định nghĩa như sau:

Định nghĩa: *Một bộ $G = (X, E)$ gồm hai tập hợp X và E được gọi là một đồ thị hữu hạn nếu:*

1) X và E là hai tập hữu hạn, và

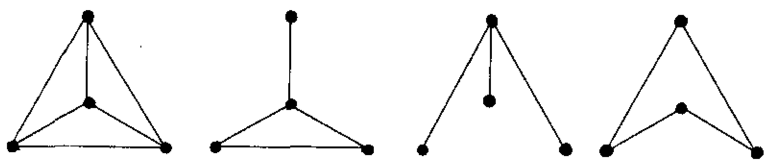
2) Cho mỗi phần tử $e \in E$ tồn tại một cặp hai phần tử $x, y \in X$ và $n \in \mathbf{N}$ sao cho $e = (x, y, n)$ (cạnh có hướng) hoặc $e = \{x, y, n\}$ (cạnh vô hướng).

Số n trong biểu diễn cạnh $e = (x, y, n)$ hoặc $e = \{x, y, n\}$ dùng để đánh số cạnh kép hoặc các khuyên xuất phát cùng từ một đỉnh. Trong trường hợp đồ thị không có cạnh kép thì thay vì viết cạnh (x, y, n) (hoặc $\{x, y, n\}$) ta có thể viết đơn giản: cạnh (x, y) (hoặc $\{x, y\}$).

Trong trường hợp tất cả các cạnh của G đều là cạnh vô hướng thì G được gọi là *đồ thị vô hướng* (H. 13). Trong hình 13 ta có một số đồ thị đơn vô hướng 4 đỉnh.

Nếu $e = \{x, y, n\}$ là cạnh của G thì x, y được gọi là đỉnh của cạnh e.

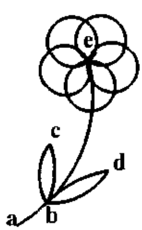
Trong trường hợp tất cả các cạnh của G đều là cạnh có hướng thì G được gọi là *đồ thị có hướng*.



Hình 13

Nếu $e = (x, y, n)$ là một cạnh của G thì x được gọi là đỉnh xuất phát còn y được gọi là đỉnh kết thúc của e.

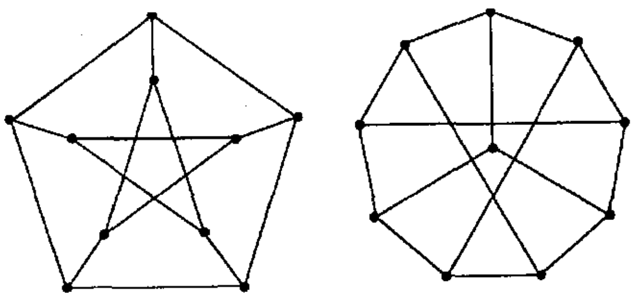
Trong hình 14, bạn đọc có một đồ thị $G = (X, E)$ có tập đỉnh X với các đỉnh a, b, c, d và tập cạnh E với các cạnh $\{a, b\}$, $\{b, d, 1\}$, $\{b, d, 2\}$, $\{b, c, 1\}$, $\{b, c, 2\}$, $\{b, e\}$, $\{e, e, 1\}$, $\{e, e, 2\}$, $\{e, e, 3\}$, $\{e, e, 4\}$ và $\{e, e, 5\}$.



Hình 14

Đồ thị G có cả cạnh vô hướng cũng như cạnh có hướng được gọi là *đồ thị hỗn hợp*. Như đã nói ở phần trước, đồ thị có thể biểu diễn trên mặt phẳng : Các đỉnh của nó được biểu diễn thành các điểm (được tô đậm nét hoặc được khuyên tròn), các cạnh của nó được biểu diễn thành các đoạn thẳng hoặc các cung, hoặc là các đường liên tục nối các đỉnh của đồ thị. Các cạnh có hướng được chỉ hướng bằng các mũi tên.

Ở đây chúng ta phải lưu ý rằng một đồ thị có thể có nhiều cách biểu diễn khác nhau trên mặt phẳng. Đôi khi sự nhận biết hai biểu diễn phẳng khác nhau có cho tương ứng một đồ thị hay không là điều rất khó.



Hình 15

Chẳng hạn, hai cách biểu diễn khác nhau của đồ thị Petersen được thể hiện trong hình 15.

Các đồ thị đặc biệt:

- Đồ thị rỗng: $X = U = \emptyset$.

- Đồ thị điểm: X có 1 phần tử, $U = \emptyset$.

BÀI TẬP

▷ **2.2.1.** *Bạn có nhận xét gì về sự khác biệt của các đồ thị biểu diễn:*

1) Sự quen biết giữa n người với nhau,

2) Đường giao thông nối n thành phố,

3) Đường phố và n ngã tư.

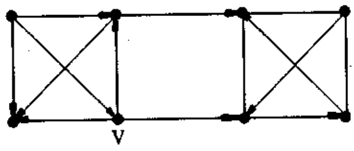
§ 2.3. Các khái niệm cơ bản

Trong phần này ta tổng kết các khái niệm cơ bản giúp chúng ta có thể theo dõi cuốn sách được dễ dàng hơn.

Ta nói cạnh vô hướng hoặc có hướng u *kề* với đỉnh x của đồ thị nếu x là đỉnh đầu hoặc đỉnh cuối của u. Hai đỉnh x và y được nói là *kề* nhau nếu chúng được nối với nhau bởi một cạnh. Trong trường hợp này ta cũng nói chúng là *láng giềng* của nhau.

Trong đồ thị G cho trước ta nói rằng bậc của một đỉnh v trong G là tổng số cạnh kề v và số khuyên có đỉnh là v (các khuyên sẽ được tính gấp đôi). Ta kí hiệu bậc của v trong G bởi $d_G(v)$, và trong trường hợp không xảy ra nhầm lẫn ta có thể viết đơn giản hơn là $d(v)$.

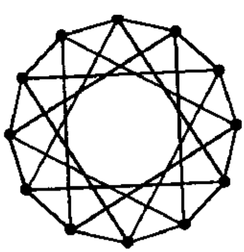
Số các cạnh hoặc khuyên có hướng xuất phát từ v được kí hiệu là $d^+(v)$, số các cạnh và khuyên nhận v làm đỉnh cuối được kí hiệu bằng $d^-(v)$. Ta dễ thấy rằng $d^+(v) + d^-(v) = d(v)$. Trong hình 16 ta có $d^+(v) = 3$ và $d^-(v) = 1$.



Hình 16

Bậc lớn nhất của G là $\max\{d(v) : v$ đỉnh của $G\}$ và kí hiệu là $\Delta(G)$. Bậc nhỏ nhất của G là $\min\{d(v) : v$ đỉnh của $G\}$ và được kí hiệu là $\delta(G)$. Một đỉnh được gọi là *đỉnh cô lập* nếu bậc của nó bằng 0, và được gọi là đỉnh *treo* nếu bậc của nó là 1.

Đồ thị G_1 được gọi là *đồ thị con* của đồ thị G_2 nếu tập đỉnh và tập cạnh của G_1 tương ứng là tập con của tập đỉnh và tập cạnh của G_2.



Hình 17

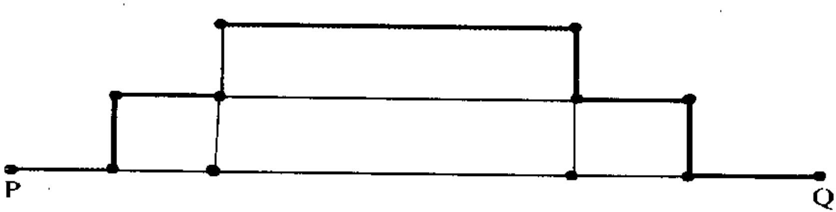
Một đồ thị được gọi là *đồ thị đều bậc* r nếu mọi đỉnh của nó có bậc r. Trong hình 17 ta có một đồ thị đều bậc 4, vì mỗi đỉnh của đồ thị này có bậc là 4.

Một dãy n cạnh $k_1, k_2, ..., k_n$ được gọi là *dãy cạnh kế tiếp* nếu không có cạnh nào xuất hiện hai lần và đỉnh cuối của cạnh bất kì là đỉnh đầu của cạnh tiếp theo. Một dãy cạnh kế tiếp được gọi là *đường* nếu như không có đỉnh nào được đi qua hai lần. Trong hình 18, những cạnh được tô đậm là một con đường đi từ P tới Q.

Một con đường W với các cạnh $k_1, k_2, ..., k_n$ và các đỉnh $P_1, P_2, ..., P_{n+1}$ được kí hiệu như sau

$$W = (P_1, k_1, P_2, k_2, P_3, ..., k_n, P_{n+1}).$$

Các đỉnh P_1 và P_{n+1} là các đỉnh đầu và đỉnh cuối của W, còn các đỉnh P_i $(2 \leq i \leq n)$ được gọi là đỉnh trong của W. Một con đường mà đỉnh đầu đỉnh cuối trùng nhau được gọi là *chu trình*. Đặc biệt các khuyên là các chu trình có độ dài 1. Các con đường có độ dài không nhỏ hơn 2 đều có đỉnh đầu và cuối phân biệt nhau.



Hình 18

Trường hợp G là đồ thị đơn ta có thể kí hiệu con đường W thông qua dãy đỉnh của nó như sau:

$$W = (P_1, P_2, ..., P_{n+1}).$$

Độ dài của W là số các cạnh q của W và được kí hiệu là $\ell(W)$:

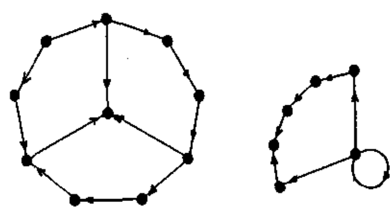
$$\ell(W) = q.$$

Một đỉnh được coi là một con đường với độ dài 0.

Một dãy cạnh được gọi là *dãy cạnh đơn* nếu ta bỏ hướng các cạnh (nếu có) thì nó trở thành một con đường.

Đồ thị G được gọi là *liên thông* nếu hai đỉnh bất kì của nó được nối bởi một dãy cạnh đơn. Các đồ thị được giới thiệu trong các hình từ trước tới nay đều là đồ thị liên thông.

Nhưng ta có thể thấy dễ dàng là có nhiều đồ thị không phải là đồ thị liên thông. Chẳng hạn đồ thị biểu diễn bản đồ giao thông của nhiều thành phố khác nhau không phải lúc nào cũng là đồ thị liên thông. Đồ thị được biểu diễn trong hình 19 không phải là đồ thị liên thông.



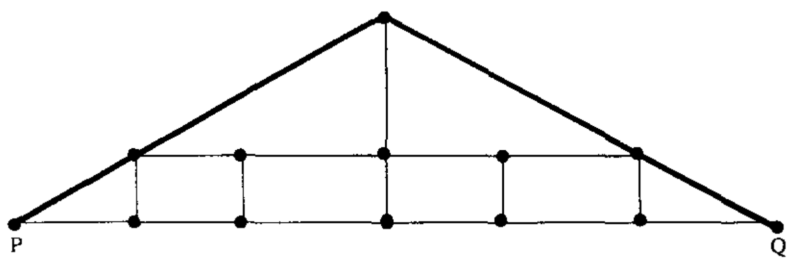
Hình 19

Nếu ta định nghĩa trong một đồ thị G cho trước quan hệ Q như sau: Hai đỉnh a và b có mối quan hệ Q khi a và b được nối với nhau bởi một dãy cạnh đơn. Rõ ràng Q là một quan hệ tương đương.

Quan hệ tương đương này sẽ chia tập đỉnh của đồ thị ra các đồ thị con liên thông mà ta gọi là các *thành phần liên thông* của G. Trong hình 19, đồ thị được biểu diễn trên hình có hai thành phần liên thông. Số các thành phần liên thông của G được kí hiệu là $\omega(G)$.

Một đồ thị G được gọi là *p-liên thông* nếu như G liên thông và vẫn còn là đồ thị liên thông nếu như ta bỏ đi ít hơn p đỉnh tùy ý cùng với các cạnh kề với các đỉnh này.

Mỗi thành phần liên thông của đồ thị trong hình 19 là đồ thị 2-liên thông, vì khi ta bỏ đi một đỉnh tùy ý của nó, đồ thị thu được vẫn là đồ thị liên thông. Ngoài ra dễ thấy chúng không phải là các đồ thị 3-liên thông.



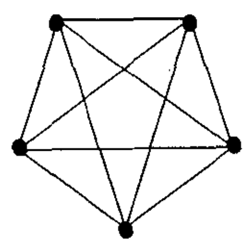
Hình 20

Một đồ thị G được gọi là *p-liên thông cạnh* nếu như G liên thông và vẫn còn là đồ thị liên thông nếu như ta bỏ đi ít hơn p cạnh tùy ý. Mỗi thành phần liên thông của đồ thị trong hình 19 là đồ thị 2-liên thông cạnh, vì khi ta bỏ đi một cạnh tùy ý của nó, đồ thị thu được vẫn là đồ thị liên thông. Đồ thị này không phải là đồ thị 3-liên thông cạnh. Rõ ràng một đồ thị k-liên thông cũng sẽ k-liên thông cạnh. Một đồ thị G có bậc nhỏ nhất là δ thì nhiều lắm chỉ có thể δ-liên thông mà thôi. Một đỉnh của một đồ thị liên thông được gọi là *đỉnh nút* nếu đồ thị thu được sau khi bỏ đỉnh này đi không còn liên thông.

Trong đồ thị G, *khoảng cách* giữa hai đỉnh a và b của đồ thị, được kí hiệu là $d_G(a, b)$ hoặc đơn giản chỉ là $d(a, b)$, là số cạnh của con đường ít cạnh nhất nối a và b. Chẳng hạn khoảng cách giữa hai đỉnh P và Q trong hình 20 là 4. Nếu không có con đường nào nối a và b trong G thì ta đặt $d(a, b) = \infty$. *Đường kính* của G, mà ta kí hiệu là $d(G)$, là khoảng cách lớn nhất có thể giữa các đỉnh của G. Đường kính của đồ thị G trong hình 19 là ∞. Nếu bỏ chiều của các cạnh thì đường kính của mỗi thành phần liên thông của đồ thị trong hình 19 này sẽ là 3 và 4.

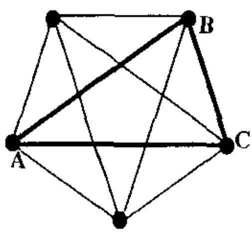
Đồ thị đơn vô hướng có n đỉnh và đường kính 1 được gọi là *đồ thị đầy đủ n* đỉnh và được kí hiệu là K_n. Ta còn kí hiệu đồ thị đầy đủ với tập đỉnh S là $< S >$. Trong hình 21 ta có một đồ thị đầy đủ 5 đỉnh.

Đồ thị rỗng là đồ thị đầy đủ 0 đỉnh. Đồ thị điểm là đồ thị đầy đủ 1 đỉnh. Với $n \geq 2$, hai đỉnh tùy ý của đồ thị đầy đủ K_n có cạnh nối.



Hình 21

Đồ thị $\overline{G}$ được gọi là *phần bù* của đồ thị đơn vô hướng G nếu nó có cùng tập đỉnh như G và hai đỉnh của nó được nối bởi một cạnh khi và chỉ khi hai đỉnh này không được nối bởi cạnh nào trong G. Phần bù của một đồ thị đầy đủ $n \geq 1$ sẽ là một đồ thị gồm có n đỉnh cô lập (H. 21).

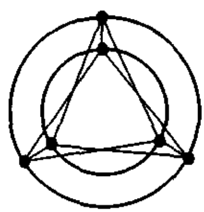


Hình 22

Nếu S là tập con của tập đỉnh của đồ thị G cho trước thì *đồ thị sinh ra bởi* S, được kí hiệu là $G < S >$, là đồ thị con lớn nhất của G với tập đỉnh S. Đồ thị con sinh bởi tập đỉnh S chính là đồ thị thành phần của G với tập đỉnh S.

Đồ thị sinh bởi một tập s điểm bất kì trong một đồ thị đầy đủ K_n là đồ thị đầy đủ K_s. Trong hình 22, đồ thị sinh bởi tập đỉnh $\{A, B, C\}$ có các cạnh được tô đậm.

Cho trước hai đồ thị đơn vô hướng $G_1 = (X_1, E_1)$ và $G_2 = (X_2, E_2)$. Ta nói G_1 và G_2 *rời nhau* nếu $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.



Hình 23

Đồ thị $G_1 * G_2$ là đồ thị có tập đỉnh là hợp của hai tập đỉnh của G_1 và G_2 và tập cạnh là hợp của hai tập cạnh hai đồ thị này và được bổ sung thêm bởi các cạnh nối tất cả các đỉnh của đồ thị G_1 với tất cả các đỉnh của đồ thị G_2.

Hình 23 biểu diễn tích của hai đồ thị đều bậc 3 rời nhau; cạnh của mỗi đồ thị đều bậc 3 này được biểu diễn như một cung của một hình tròn. Một lớp rất quan trọng các đồ thị là lớp các *đồ thị phẳng*. Một đồ thị được gọi là đồ thị phẳng nếu nó có thể biểu diễn được trên mặt phẳng sao cho không có hai đường biểu diễn cạnh nào cắt nhau. Như bạn đọc có thể tự kiểm tra, phần lớn các đồ thị chúng ta đã làm quen là đồ thị phẳng. Bạn đọc có thể thử để thấy rằng đồ thị đều bậc 5 không biểu diễn phẳng được. Cũng như vậy đồ thị trong hình 23 không phải là đồ thị phẳng. Đồ thị phẳng không phải chỉ là đối tượng nghiên cứu của lí thuyết đồ thị mà còn là vấn đề thú vị trong lí thuyết tô-pô. Trong những vấn đề nghiên cứu về đồ thị phẳng có bài toán 4 màu là bài toán đã từng làm đau đầu các nhà toán học trong hơn một thế kỉ, mà ta sẽ nói kĩ hơn về nó trong chương đồ thị phẳng. Bài toán 4 màu có một quan hệ hết sức mật thiết đối với bài toán chu trình Hamilton (được giới thiệu trong chương "Đường Euler và chu trình Hamilton"). Tuy bài toán 4 màu chính thức được giải quyết vào năm 1975 bởi hai nhà toán học Mỹ, nhưng vì lời giải của họ quá dài (quãng 200 trang giấy cùng với một chương trình máy tính điện tử nhằm kiểm tra xem có bỏ sót trường hợp nào không), nên thế giới vẫn hy vọng tìm được một lời giải đơn giản cho bài toán này. Một trong những vấn đề thú vị có vai trò lí thuyết quan trọng cũng như thường gặp trong bài toán thực tế là bài toán người du lịch, với yêu cầu tìm một hành trình du lịch tối ưu qua các thành phố cho trước sao cho mỗi thành phố qua đúng một lần rồi trở về nơi xuất phát sao cho phí tổn đi lại là ít nhất.

BÀI TẬP

▷ **2.3.1.** *Chứng minh rằng trong một đồ thị G tùy ý tổng tất cả các bậc của các đỉnh trong G luôn bằng hai lần số cạnh của nó.*

▷ **2.3.2.** *Chứng minh trong một đồ thị tùy ý số các đỉnh có bậc là số lẻ luôn là một số chẵn.*

▷ **2.3.3.** *Chứng minh rằng số các mặt là đa giác có lẻ đỉnh của một khối đa diện lồi tùy ý là một số chẵn.*

▷ **2.3.4.** *Chứng minh rằng trong một đồ thị đơn vô hướng tùy ý luôn tồn tại hai đỉnh có bậc bằng nhau.*

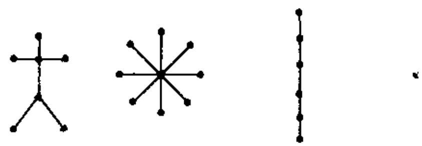
▷ **2.3.5.** *Với những giá trị nguyên dương n nào thì tồn tại đồ thị đều đơn bậc ba có n đỉnh.*

▷ **2.3.6.** *Chứng minh rằng với mọi giá trị nguyên $n \geq 3$ cho trước luôn tồn tại một đồ thị đơn vô hướng n đỉnh sao cho không tồn tại trong chúng ba đỉnh có cùng bậc.*

Chương 3
Cây và bụi

§ 3.1. Cây và cây biểu diễn

Một *cây* là một đồ thị đơn vô hướng không có chu trình với ít nhất một đỉnh. Cây đã được nghiên cứu rất sớm bởi Cayley và nhiều nhà toán học khác, vì chúng đóng một vai trò quan trọng trong lí thuyết mạng.



Hình 24

Trong hình 24 là biểu diễn phẳng của 4 cây khác nhau. Trong lí thuyết về cây thì những đỉnh treo (đỉnh có bậc là 1) đóng một vai trò quan trọng. Trước hết ta chứng minh sự tồn tại của các đỉnh treo trong cây với ít nhất hai đỉnh.

Định lí 3.1.1. *Một cây bất kì với ít nhất hai đỉnh luôn có ít nhất hai đỉnh treo.*

Chứng minh. Trong cây chỉ có hữu hạn con đường. Ta xét $W = (P_1, P_2, ..., P_k)$ là một con đường có nhiều cạnh nhất. Khi đó $k \neq 1$, do cây có ít nhất hai đỉnh. Hai đỉnh cuối của W, P_1 và P_k, rõ ràng là đỉnh treo. Giả sử ngược lại, P_1 không là đỉnh treo thì P_1 được nối với đỉnh $Q \not\equiv P_2$ nào đó. Khi đó $Q \equiv P_i$ với $i \neq 2$, do W có nhiều cạnh nhất, nhưng khi đó ta sẽ thu được một chu trình

$$K = (P_1, P_2, ..., P_i, P_1),$$

trái với giả thuyết ban đầu là đồ thị đã cho là cây. $\diamondsuit$

Ta cũng có thể chứng minh bằng một cách khác không sử dụng sự công nhận hiển nhiên là trong đồ thị tùy ý chỉ có hữu hạn con đường.

Chứng minh. Giả sử ngược lại là tồn tại một cây G với không ít hơn 2 đỉnh và chỉ có không quá 1 đỉnh treo. Ta chọn P là đỉnh treo của G, còn nếu G không có đỉnh treo nào thì chọn P là đỉnh tùy ý. Xuất phát từ P ta đi dọc theo các cạnh, sao cho mỗi cạnh chỉ đi qua đúng một lần. Do đồ thị là cây không có chu trình, nên ta không đi tới đỉnh nào đã đi qua. Do có hữu hạn đỉnh, nên quá trình phải kết thúc tại $Q \not\equiv P$ nào đó, và Q rõ ràng có bậc 1. $\diamondsuit$

Dựa trên sự tồn tại các đỉnh treo ta có thể tính được số cạnh của cây bất kì.

Định lí 3.1.2. *Một cây có n đỉnh có đúng $n-1$ cạnh.*

Chứng minh. Bằng quy nạp theo số đỉnh n của cây.

Với $n = 1$ rõ ràng cây với 1 đỉnh không có cạnh nào.

Giả sử cây tùy ý với n đỉnh có đúng $n - 1$ cạnh.

Xét G là một cây có $n + 1$ đỉnh. Theo định lí trên, G có ít nhất một đỉnh treo P nào đó. Xét $G - \{P\}$. Vì P là đỉnh treo, nên $G - \{P\}$ là một đồ thị liên thông. Giả sử ngược lại là $G - \{P\}$ có ít nhất hai thành phần liên thông G_1 và G_2 nào đó. Do G liên thông, cho nên có một con đường nối G_1 với G_2 trong G. Rõ ràng con đường này phải đi qua P và nhận P làm điểm trong của nó. Vậy P có bậc ít nhất là 2, mâu thuẫn với điều P là đỉnh treo trong G.

Do G không có chu trình, cho nên $G - \{P\}$ không có chu trình. Vậy $G - \{P\}$ là một cây có n đỉnh. Theo giả thiết quy nạp thì $G - \{P\}$ có đúng $n - 1$ cạnh. Vậy G có n cạnh, vì P có bậc là 1 trong G. ◇

Một cây được gọi là *cây biểu diễn* của đồ thị cho trước nếu nó và đồ thị cho trước có cùng tập đỉnh. Một đồ thị cho trước có thể có nhiều cây biểu diễn khác nhau. Chẳng hạn, ta thu được từ đồ thị đầy đủ K_3 một cây biểu diễn bằng cách bỏ đi một cạnh tùy ý nên K_3 có 3 cây biểu diễn khác nhau.

Định lí 3.1.3. *Một đồ thị vô hướng G cho trước có một cây biểu diễn khi và chỉ khi nó là đồ thị liên thông.*

Chứng minh. Nếu G không liên thông thì rõ ràng không có đồ thị con liên thông nào chứa hết các đỉnh của nó, và đặc biệt là nó không có cây biểu diễn.

Ngược lại, nếu G là cây liên thông thì ta thử tìm xem đồ thị có chu trình không. Nếu nó không có chu trình nào thì bản thân nó là một cây theo định nghĩa. Ngược lại, nếu G có chu trình, ta có thể xóa bớt một cạnh nằm trên chu trình này để thu được một đồ thị liên thông mới mà số chu trình của nó giảm đi ít nhất là một. Cứ làm tiếp như vậy, sau hữu hạn bước ta thu được một đồ thị con của G liên thông không có chu trình, tức là thu được một cây biểu diễn của nó. ◇

Định lí 3.1.4. *Một đồ thị liên thông có n đỉnh và $n-1$ cạnh là cây.*

Chứng minh. Theo định lí trên, đồ thị cho trước có cây biểu diễn. Do nó có $n-1$ cạnh, bằng đúng số cạnh của cây biểu diễn của nó, cho nên rõ ràng nó trùng với cây biểu diễn nó. ◇

Định lí 3.1.5. *Trong mỗi cây G cho trước, giữa hai đỉnh P và Q của nó chỉ có đúng một con đường nối duy nhất.*

Chứng minh. Vì G là đồ thị liên thông cho nên tồn tại một con đường nối P với Q trong G. Vì G không có chu trình, nên dễ thấy rằng không có con đường thứ hai nào nối P với Q cả. ◇

BÀI TẬP

▷ **3.1.1.** *Chứng minh rằng nếu thêm một cạnh bất kì vào một cây cho trước nối hai đỉnh P và Q của cây, ta sẽ thu được một đồ thị với đúng một chu trình.*

▷ **3.1.2.** *Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để các số nguyên dương $d_1, d_2, \ldots, d_n$ là bậc của các đỉnh trong một cây có n đỉnh là $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.*

▷ **3.1.3.** *Tồn tại hay không một đồ thị đơn vô hướng có hai cây biểu diễn không có cạnh chung?*

▷ **3.1.4.** *Cho trước một đồ thị liên thông có n đỉnh và $l \geq n-1$ cạnh. Chứng minh rằng tồn tại $l - n + 1$ cạnh sao cho chu trình bất kì của G chứa ít nhất một trong các cạnh này.*

▷ **3.1.5.** *Chứng minh rằng nếu W là một đồ thị có nhiều cạnh nhất trong một cây G, thì khi bỏ hết tất cả đỉnh treo của G ta thu được một cây G^*, và phần còn lại của W, trong G^* là một con đường có nhiều cạnh nhất.*

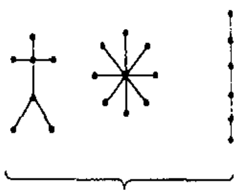
▷ **3.1.6.** *Chứng minh rằng trong cây tùy ý luôn tồn tại một đỉnh nằm trên mọi con đường có số cạnh nhiều nhất.*

▷ **3.1.7.** *Chứng minh rằng sơ đồ biểu diễn công thức hóa học của C_nH_{2n+2} là một cây.*

▷ **3.1.8.** *Chứng minh rằng một đồ thị vô hướng liên thông và* *tất cả các cạnh của nó đều là cầu (cạnh mà khi bỏ nó đi thì đồ thị thu được không còn là đồ thị liên thông nữa) là một cây.*

§ 3.2. Bụi

Một đồ thị mà mỗi một thành phần liên thông của nó là một cây được gọi là *bụi.*



Hình 25

Hình 25 biểu diễn một bụi với 3 thành phần liên thông.

Từ định lí về số cạnh của một cây chúng ta có thể tính được số cạnh của một bụi:

Định lí 3.2.1. *Một bụi với n đỉnh và c thành phần liên thông có đúng $n - c$ cạnh.*

Một đồ thị liên thông vô hướng luôn có thể bỏ bớt cạnh để trở thành một cây. Mệnh đề đảo lại định lí trên cũng đúng.

Định lí 3.2.2. *Nếu một đồ thị đơn vô hướng với n đỉnh và c thành phần liên thông có $n - c$ cạnh, thì nó là một bụi.*

Chứng minh. Giả sử các thành phần liên thông của đồ thị đã cho có $n_1, n_2, \ldots, n_k$ đỉnh. Mỗi thành phần liên thông thứ i với n_i đỉnh của đồ thị đã cho có thể bỏ bớt cạnh để trở thành một cây, cho nên số cạnh của nó ít nhất là $n_i - 1$. Đồ thị đã cho có ít nhất $\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n - c$ cạnh. Đẳng thức chỉ xảy ra khi mỗi thành phần liên thông của nó là một cây. Vậy đồ thị đã cho là bụi. ◇

BÀI TẬP

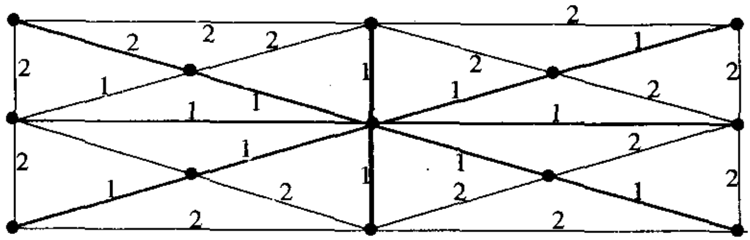
▷ **3.2.1.** *Chứng minh rằng một đồ thị đơn vô hướng không có chu trình với n đỉnh và $n - 1$ cạnh là một cây.*

▷ **3.2.2.** *Nếu G là một đồ thị liên thông và B, một đồ thị con của G, là một bụi, thì B là đồ thị con của một cây biểu diễn nào đó của G.*

▷ **3.2.3.** *Chứng minh rằng một đồ thị đơn vô hướng với n đỉnh và l cạnh có ít nhất $n - l$ thành phần liên thông.*

§ 3.3. Cây biểu diễn tối ưu của một đồ thị cho trước

Một trong những bài toán thường gặp trong thực tế là bài toán mắc một mạng điện hoặc mạng cung cấp nước (đồ thị biểu diễn nó rõ ràng là một cây). Ta phải nối dây điện cho n gia đình, và đường dây không phải có thể được phép mắc tùy ý. Thợ điện vẽ cho ta một sơ đồ tất cả đường dây có thể mắc được trong thực tế. Như vậy ta được cung cấp một sơ đồ là một đồ thị có n đỉnh và các cạnh nối chúng được gắn một số biểu diễn độ dài thực tế của nó. Bài toán đặt ra không chỉ tìm một cây biểu diễn cho đồ thị này, mà còn là một cây có tổng độ dài thực tế nhỏ nhất.



Hình 26

Về phương diện lí thuyết bài toán được phát biểu như sau:

Vấn đề tìm cây biểu diễn tối ưu của một đồ thị liên thông cho trước.

Cho trước một đồ thị đơn liên thông G. Mỗi cạnh k của đồ thị được gắn với một số thực dương $\ell(k)$, gọi là *độ dài* của cạnh k (H. 26). Ta phải xác định một cây biểu diễn B của G sao cho tổng độ dài các cạnh của nó, được kí hiệu là $\ell(B)$, là nhỏ nhất.

Sau đây ta làm quen với một phương pháp có thể cho ta xác định cây biểu diễn tối ưu của G.

Định lí 3.3.1. *Nếu độ dài các cạnh của một đồ thị đơn vô hướng đôi một khác nhau thì G có đúng một cây biểu diễn tối ưu.*

Thuật toán sau đây cho ta xác định cây biểu diễn tối ưu của G và cũng là một chứng minh cho sự duy nhất của cây tối ưu.

Thuật toán: Ta xây dựng một dãy các cây $H_1, H_2, \dots, H_n$.

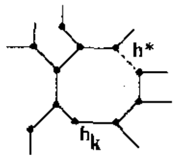
0) H_1 là đồ thị có đúng một đỉnh (được chọn một cách tùy ý).

1) H_{k+1} được xây dựng từ H_k bằng cách thêm cạnh có độ dài nhỏ nhất, kí hiệu là h_k, nối H_k với các đỉnh không thuộc H_k.

Khi đó H_n là cây biểu diễn tối ưu của G.

Chứng minh. Dễ thấy rằng H_n là một đồ thị liên thông có đúng n đỉnh và $n-1$ cạnh.

Theo định lí 3.1.4 thì H_n là cây, và do H_n chứa tất cả n đỉnh của đồ thị G, cho nên H_n là cây biểu diễn của G. Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng H_n là cây biểu diễn tối ưu. Giả sử ngược lại là H_n không phải là cây tối ưu của G, và $H^* \neq H_n$ là cây tối ưu của G - một cây biểu diễn tối ưu luôn tồn tại do G có hữu hạn cây biểu diễn. Do $H^* \neq H_n$ và $H_0 \subset H^*$ cho nên tồn tại $k \leq n-1$ sao cho $H_k \subset H^*$, nhưng $H_{k+1} \not\subset H^*$. Như vậy cạnh h_k không thuộc H^*.



Hình 27

Ta thêm h_k vào H^*, sẽ thu được một đồ thị với chu trình (H. 27), gọi là $\mathcal{K}$. Do H_{k+1} không có chu trình, cho nên có cạnh h nào đó nằm trên $\mathcal{K}$ mà không thuộc H^*.

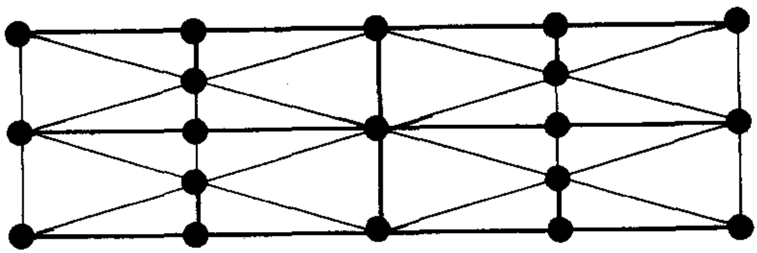
Trong những cạnh không thuộc H_{k+1} tồn tại ít nhất một cạnh, kí hiệu là h^*, kề với một đỉnh của H_k, do một trong hai đỉnh của h_k thuộc H_k, và cạnh không thuộc H_k và cách đỉnh của H_k (dọc theo $\mathcal{K}$) một số ít đỉnh nhất sẽ có một đỉnh thuộc H_k.

Ta thấy rằng một trong hai đỉnh của h^* không thuộc H_k, nếu không, thêm cạnh này vào H_k ta có một chu trình, và chu trình này nằm trong H^* là điều vô lí.

Theo thuật toán xác định H_i $(i = 1, 2, ..., n)$ thì h^* có độ dài lớn hơn của h_k. Bây giờ trong đồ thị $H^* \cup \{h_k\}$ ta bỏ cạnh h^* và thu được một cây (liên thông, có n đỉnh và đúng $n-1$ cạnh). Rõ ràng cây này có độ dài nhỏ hơn H^*, mâu thuẫn với giả thiết H^* là cây biểu diễn tối ưu của G. Mâu thuẫn này chứng tỏ H_n là cây biểu diễn tối ưu của G. $\diamond$

Trong trường hợp đồ thị cho trước có những cạnh có độ dài bằng nhau thì cây biểu diễn tối ưu không còn duy nhất, nhưng để xác định một cây như vậy ta vẫn có thể dùng thuật toán trên. Khi đó ta phải lưu ý rằng trong mỗi bước của thuật toán, khi đỉnh và cạnh phải chọn không xác định duy nhất thì ta có thể chọn tùy ý một trong các khả năng có thể. Thuật toán sẽ cho ta được một nghiệm cần tìm. Bằng cách xét tất cả các khả năng xảy ra, ta sẽ thu được tất cả các nghiệm cần tìm.

Trường hợp đặc biệt độ dài tất cả các cạnh bằng nhau thì cây biểu diễn bất kì của đồ thị đã cho cũng là một cây tối ưu.



Hình 28

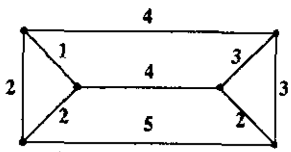
Cây tối ưu thường được tìm khi các cạnh có độ dài đúng thực tế (H. 28).

BÀI TẬP

▷ **3.3.1.** *Chứng minh rằng trong một đồ thị tùy ý tất cả các cầu của đồ thị là cạnh của cây biểu diễn tối ưu của đồ thị đã cho.*

▷ **3.3.2.** *Cho n điểm trên mặt phẳng có khoảng cách giữa các điểm đôi một khác nhau. Nối mỗi điểm với điểm gần nó nhất. Bằng cách đó chúng ta thu được một đồ thị G. Chứng minh rằng G là một bụi mà bậc của mỗi đỉnh không lớn hơn 5.*

▷ **3.3.3.**



Hình 29

Hãy tìm một cây biểu diễn tối ưu cho đồ thị được biểu diễn trong hình 29.

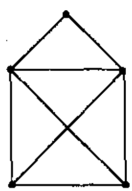
▷ **3.3.4.** *Cho n điểm trên mặt phẳng. Ta nối các cặp hai điểm của hệ n điểm này bằng các đoạn thẳng. Chứng minh rằng cây biểu diễn tối ưu (các cạnh có độ dài đúng thực tế) không có hai cạnh nào cắt nhau.*

▷ **3.3.5.** *Chứng minh rằng có đúng n^{n-2} cây biểu diễn khác nhau của đồ thị đầy đủ K_n.*

Chương 4
Đường Euler và chu trình Hamilton

§ 4.1. Lịch sử phát sinh

Trong phần này chúng ta chỉ khảo sát đồ thị vô hướng. Đồ thị mà chúng ta khảo sát có thể có khuyên hoặc cạnh kép. Chúng ta quan tâm ở đây hai vấn đề được hai nhà toán học lớn là Euler và Hamilton đề xuất.



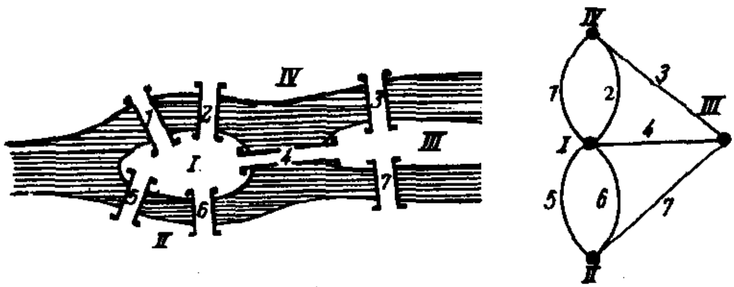
Câu hỏi đầu, đơn giản hơn câu hỏi còn lại, có thể đã được các bạn biết tới trong đời sống. Cho trước một đồ thị G vô hướng, câu hỏi ở đây là liệu tồn tại trong G một dãy cạnh kế tiếp đi qua tất cả cạnh của G hay không?

Hình 30

Câu hỏi tương tự như vậy là liệu ta có thể vẽ được một hình trên mặt phẳng (H. 30) bằng đường một nét hay không?

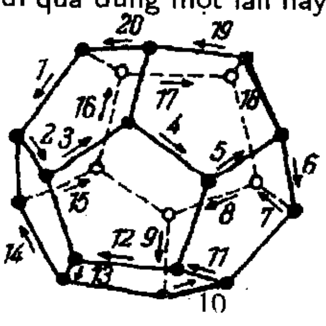
Một dãy cạnh kế tiếp đi qua tất cả các cạnh của đồ thị cho trước được gọi là *đường một nét Euler*. Nếu đỉnh đầu và đỉnh cuối của đường một nét này không trùng nhau thì ta gọi nó là *đường một nét Euler không khép kín*. Còn nếu đỉnh đầu và đỉnh cuối của đường một nét này trùng nhau thì ta gọi nó là *đường một nét Euler khép kín.*

Vấn đề đường một nét Euler đã được giải quyết một cách trọn vẹn. Trong chương sau chúng ta sẽ làm quen với điều kiện cần và đủ để tồn tại đường một nét Euler trong đồ thị vô hướng cho trước.



Hình 31

Sự thật, vấn đề đường Euler xuất phát từ vấn đề 7 cây cầu thành phố Königsberg (H. 31). Người dân thành phố này đặt câu hỏi liệu có thể đi qua cả 7 cây cầu này và mỗi cây cầu chỉ đi qua đúng một lần hay không?



Hình 32

Còn vấn đề thứ hai mà chúng ta đề cập tới ở đây cho tới nay vẫn còn là một vấn đề chưa được giải quyết hoàn toàn. Vấn đề này được gọi tên là vấn đề *chu trình Hamilton.*

Vấn đề chu trình Hamilton là vấn đề xác định xem trong một đồ thị cho trước liệu có thể tồn tại một chu trình chứa tất cả các đỉnh của đồ thị đã cho (mà ta gọi tên là chu trình Hamilton) hay không ?

Lịch sử phát sinh vấn đề chu trình Hamilton từ một trò chơi của Hamilton đưa ra từ năm 1859: xác định đường đi theo cạnh của một thập nhị diện đều (H. 32) sao cho ta có thể đi qua tất cả các đỉnh, mỗi đỉnh đi qua đúng một lần rồi trở lại đỉnh ban đầu.

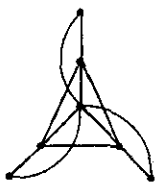
50	59	48	33	22	31	12	5
41	34	51	58	13	6	23	30
60	49	40	47	32	21	4	11
35	42	57	52	7	14	29	24
56	61	46	39	20	25	10	3
43	36	53	64	15	8	17	28
62	55	38	45	26	19	2	9
37	44	63	54	1	16	27	18

Hình 33

Trong thực tế, ta thường phải giải quyết vấn đề chu trình Hamilton dưới những dạng khác nhau. Chẳng hạn, ta hỏi liệu có thể dẫn một con mã đi trên bàn cờ sao cho mỗi ô đi qua đúng một lần rồi trở lại vị trí ban đầu.

Đây là bài toán xác định chu trình Hamilton trong một đồ thị tương ứng (một lời giải được đưa ra trong hình 33).

Đồ thị này có 64 đỉnh là 64 ô bàn cờ và 2 ô được nối với nhau bởi một cạnh nếu từ ô này có thể tới được ô kia bởi một bước đi của con mã. Đồ thị trong hình 34 không có chu trình Hamilton $\mathcal{K}$ (do $\mathcal{K}$ phải đi qua cả 2 cạnh của các đỉnh bậc 2, $\mathcal{K}$ đi qua 3 lần đỉnh bậc 6, vô lí). Gần gũi với khái niệm chu trình Hamilton là khái niệm đường Hamilton.



Một con đường trong một đồ thị cho trước được gọi là *đường Hamilton* nếu như nó chứa tất cả các đỉnh của đồ thị. Trong đồ thị G (H. 34) ta dễ kiểm tra và tìm được đường Hamilton trong G.

Hình 34

Điều kiện cần để tồn tại đường Euler cũng như chu trình Hamilton là đồ thị phải liên thông. Riêng trong vấn đề chu trình Hamilton, ta chỉ cần khảo sát các đồ thị đơn là đủ.

Vấn đề đường Euler và chu trình Hamilton cũng được đưa ra cho đồ thị có hướng. Trong lớp các đồ thị có hướng, bài toán của Euler cũng đã được giải quyết triệt để.

§ 4.2. Đường một nét Euler

Trong một thời gian rất dài, không ai giải quyết được bài toán 7 cây cầu của thành phố Königsberg. Khi Euler xem xét bài toán này, ông đã tìm ra được câu trả lời khá bất ngờ là không thể đi qua tất cả các cây cầu sao cho mỗi cây cầu chỉ đi qua đúng một lần. Nếu như đồ thị G (H. 31) có đường một nét Euler thì G chỉ có thể có nhiều lắm là hai đỉnh bậc lẻ mà thôi, mâu thuẫn với việc G có 4 đỉnh bậc lẻ.

Ngược lại cũng đúng. Nếu một đồ thị vô hướng có không quá 2 đỉnh bậc lẻ thì nó sẽ có đường một nét Euler . Nhưng kết luận này không phải dễ chứng minh.

Định lí 4.2.1. *Đồ thị vô hướng $G = (X, U)$ có một đường một nét Euler khép kín khi và chỉ khi G liên thông và không có đỉnh bậc lẻ.*

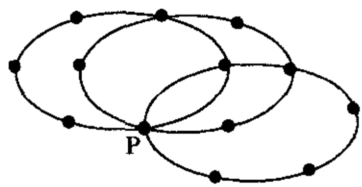
Chứng minh. Trước hết ta thấy điều kiện cần là hiển nhiên. Nếu G có đường Euler khép kín thì G là đồ thị liên thông, và rõ ràng nếu k là số lần đi qua một đỉnh P của G thì bậc của P là $2k$.

Bây giờ ta chứng minh điều ngược lại là nếu G là đồ thị liên thông không có đỉnh bậc lẻ thì trong G có đường Euler khép kín. Trước hết ta có bổ đề:

Bổ đề. *Trong đồ thị không có đỉnh bậc lẻ, thì từ một đỉnh P tùy ý có bậc lớn hơn 0 luôn tồn tại một đường một nét khép kín xuất phát từ P.*

Ta có thể dễ dàng chứng minh bổ đề bằng cách xét đường một nét có nhiều cạnh nhất xuất phát từ P. Rõ ràng nếu đỉnh cuối là $Q \neq P$ thì từ Q còn có ít nhất một cạnh k không nằm trên đường một nét này, vì mỗi lần đi tới Q trên con đường một nét này, số cạnh đã sử dụng luôn là một số lẻ (mỗi lần đi qua Q có hai cạnh của Q được sử dụng). Ta có thể bổ sung thêm k vào để được một đường một nét dài hơn là điều vô lí.

Bây giờ ta xét đường một nét khép kín H có nhiều cạnh nhất. Ta chứng minh rằng đây là đường một nét Euler . Thật vậy giả sử ngược lại là còn có ít nhất một cạnh k nào đó không nằm trên đường một nét khép kín này. Do sự liên thông của G có thể giả thiết rằng k có một đỉnh P nằm trên H (H. 35). Xét đồ thị sinh ra khi loại bỏ tất cả các cạnh của H ra khỏi G. Dễ thấy đồ thị này không có đỉnh bậc lẻ, vì mỗi đỉnh mất đi một số chẵn cạnh.



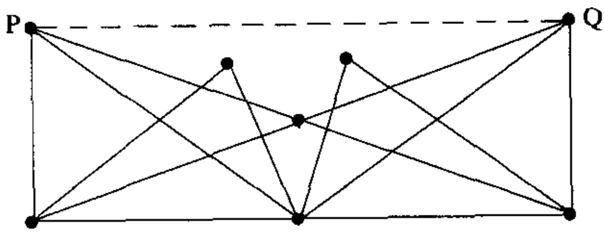
Hình 35

Theo bổ đề tồn tại một đường Euler khép kín K xuất phát từ P. Hợp của H và K là một đường Euler khép kín nhiều cạnh hơn trong G, vô lí. $\diamond$

Về sự tồn tại đường Euler mở, ta có định lí sau.

Định lí 4.2.2. *Đồ thị vô hướng $G = (X, U)$ có một đường một nét Euler không khép kín khi và chỉ khi G liên thông và có đúng hai đỉnh bậc lẻ.*

Chứng minh. Giả sử G có một đường một nét Euler không khép kín với P và Q là hai đỉnh đầu và cuối của đường một nét này thì G là một đồ thị liên thông và khi ta nối P với Q bởi một cạnh mới thì ta được một đường một nét Euler khép kín.



Hình 36

Theo định lí 4.2.1 mọi đỉnh của đồ thị thêm cạnh (P, Q) này có bậc chẵn. Sau khi bỏ cạnh mới thêm vào (P, Q) này, mọi đỉnh khác với P và Q trong G có bậc chẵn, còn P và Q có bậc lẻ.

Đảo lại, giả sử G là một đồ thị có đúng hai đỉnh P và Q là hai đỉnh bậc lẻ. Xét đồ thị $G + (P, Q)$ là đồ thị thu được từ G khi thêm cạnh (P, Q) nối P với Q. Khi đó đồ thị thu được là đồ thị liên thông không có đỉnh bậc lẻ nào. Theo định lý 4.2.1 đồ thị $G + (P, Q)$ có một đường Euler khép kín. Sau khi bỏ cạnh mới thêm vào, đồ thị ban đầu G chứa đường một nét Euler không khép kín với hai đỉnh đầu và cuối là P và Q (H. 36). $\Diamond$

BÀI TẬP

▷ **4.2.1.** *Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để vẽ được một đồ thị liên thông G bởi k nét là G có không quá $2k$ đỉnh bậc lẻ.*

▷ **4.2.2.** *Mỗi đỉnh của đồ thị liên thông G có bậc chẵn $d(P) > 0$. Mỗi cạnh của đồ thị được tô bởi một trong k màu. Kí hiệu số cạnh xuất phát từ P có màu i $(1 \leq i \leq k)$ bởi $d_i(P)$. Biết rằng $\sum_{i=1}^{k} d_i(P) = d(P)$, cho mọi đỉnh P của đồ thị G.*

Chứng minh rằng khi đó tồn tại một đường Euler E khép kín sao cho tại mọi đỉnh P của đồ thị cạnh đi vào P và cạnh đi ra khỏi P dọc theo E khác màu nhau khi và chỉ khi $d_i(P) \leq \frac{1}{2}d(P)$, cho mọi màu i và mọi đỉnh P của đồ thị.

▷ **4.2.3.** *Chứng minh rằng ta có thể tô màu các cạnh của một đồ thị liên thông G bởi hai màu xanh đỏ sao cho số cạnh đỏ và số cạnh xanh xuất phát tại mỗi đỉnh của đồ thị luôn bằng nhau khi và chỉ khi G có số chẵn cạnh và bậc của mỗi đỉnh của G là số chẵn.*

▷ **4.2.4.** *Giả sử đồ thị G có đường một nét Euler khép kín. Chứng minh rằng G có một hệ thống các chu trình sao cho cạnh tùy ý của G nằm đúng trên một trong các chu trình này.*

§ 4.3. Chu trình Hamilton

Vấn đề chu trình Hamilton cho đến nay vẫn chưa được giải quyết trọn vẹn như vấn đề đường một nét Euler. Có thể nói vấn đề chu trình Hamilton đã trở thành một vấn đề trung tâm của lí thuyết đồ thị và đã có rất nhiều công trình nghiên cứu về vấn đề chu trình Hamilton nói riêng và các chu trình nói chung. Một khối lượng lớn các công trình được công bố là các điều kiện đủ để tồn tại chu trình Hamilton trong các đồ thị đặc biệt.

Sau đây là một số kết quả nghiên cứu về sự tồn tại chu trình Hamilton trong đồ thị. Định lí đầu tiên về sự tồn tại chu trình Hamilton là của Dirac, được chứng minh từ năm 1952.

Định lí 4.3.1. *Cho trước một đồ thị đơn G gồm n đỉnh. Nếu bậc của mỗi đỉnh của G không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$ thì G có một chu trình Hamilton.*

Định lí của Dirac là trường hợp riêng của định lí Ore được chứng minh trong năm 1960.

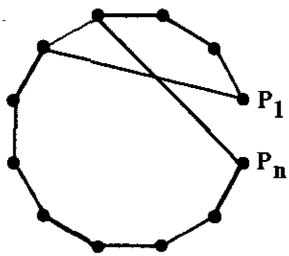
Định lí 4.3.2. *Nếu tổng bậc của hai đỉnh không kề nhau bất kì P và Q trong một đồ thị đơn G với n đỉnh thỏa mãn bất đẳng thức:*

$$d(P) + d(Q) \geq n,$$

thì G có một chu trình Hamilton.

Chứng minh. Cho trước một cách sắp xếp n đỉnh theo một thứ tự vòng tròn $K = (P_1, P_2, ..., P_n)$, ta nói rằng một cặp

(P_i, P_{i+1}) tạo nên một lỗ hổng trong cách sắp xếp này nếu P_i và P_{i+1} không kề nhau.



Hình 37

Trong tất cả cách sắp xếp có thể, xét $K = (P_1, ..., P_n)$ là cách sắp xếp có ít lỗ hổng nhất. Ta khẳng định rằng cách sắp xếp này thỏa mãn yêu cầu đầu bài, rằng K không có lỗ hổng nào.

Thật vậy, giả sử K có ít nhất một lỗ hổng, giả sử là P_1 và P_n. Nếu P_i kề với P_n thì đỉnh P_{i+1} không kề với P_1, nếu không thì

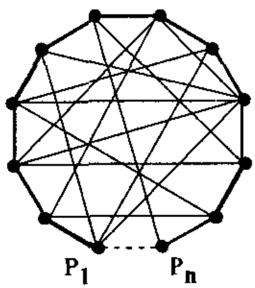
$$(P_1 P_2 ... P_i P_n P_{n-1} ... P_{i+1}),$$

sẽ là một cách sắp xếp mới có ít lỗ hổng hơn K, là điều vô lí. Như vậy, ta có $d(P_1)$ đỉnh khác với P_n và không kề nhau với P_n, suy ra $d(P_1) + d(P_n) \leq n - 1$, mâu thuẫn với giả thiết đầu bài cho (H. 37). $\diamond$

Định lí Ore là trường hợp riêng của định lí sau đây, được Pósa chứng minh vào năm 1962.

Định lí 4.3.3. *G là một đồ thị đơn với n đỉnh ($n \geq 3$). Giả sử với mỗi số $1 \leq k < \frac{n-1}{2}$ ta có không quá $k - 1$ đỉnh có bậc không lớn hơn k, và trong trường hợp n là số lẻ, ta có* *không quá $\frac{n-1}{2}$ đỉnh có bậc không vượt quá $\frac{n-1}{2}$. Khi đó G có một chu trình Hamilton.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử G không có chu trình Hamilton. Ta có thể giả sử rằng nếu thêm một cạnh bất kì nối hai đỉnh không kề nhau trong G thì đồ thị thu được sẽ có chu trình Hamilton - đồ thị G như thế được gọi là có tính chất cực đại.



Hình 38

Nếu không, bằng cách thêm vào G các cạnh nối các cặp đỉnh không kề nhau, lúc nào đó ta sẽ thu được một đồ thị không có chu trình Hamilton có tính chất cực đại như mô tả ở trên và rõ ràng vẫn thỏa mãn giả thiết của bài toán đã cho.

Do có tính chất cực đại, nên dễ thấy giữa hai đỉnh tùy ý không kề nhau của đồ thị luôn có một đường Hamilton nối hai đỉnh này (H. 38). Có thể thấy đó là đường Hamilton thu được từ chu trình Hamilton xuất hiện khi thêm vào cạnh nối hai đỉnh không kề nhau này.

Kí hiệu $(P_1, P_2, ..., P_n)$ là một đường Hamilton (không khép kín) trong G. Cho $k = 2, 3, ..., n-1$, ta có : nếu P_k được nối với P_1 bởi một cạnh thì P_{k-1} không được nối với P_n bởi cạnh nào cả, nếu không thì

$$(P_1, P_2, ..., P_{k-1}, P_n, P_{n-1}, ..., P_{k+1}, P_k, P_1)$$

là một chu trình Hamilton. Từ đó ta có

$$d(P_1) + d(P_n) \leq n - 1.$$

Trong G mỗi đỉnh bậc không nhỏ hơn $\frac{n-1}{2}$ kề với tất cả các đỉnh bậc không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$. Thật vậy, giả sử có đỉnh bậc không nhỏ hơn $\frac{n-1}{2}$ không kề với đỉnh bậc không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$, không mất tính tổng quát giả sử đỉnh P_1 với $d(P_1) \geq \frac{n-1}{2}$ không kề với đỉnh P_n có bậc $d(P_n) \geq \frac{n}{2}$. Giả sử $(P_1, P_2, ..., P_n)$ là đường Hamilton nối P_1 với P_n. Kí hiệu các láng giềng của P_1 là P_{i_1}, P_{i_2}, ... , P_{i_s} với $s = d(P_1)$. Khi đó P_n không kề với P_{i_1-1}, P_{i_2-1}, ... , P_{i_s-1}, và ta có

$$\frac{n}{2} \leq d(P_n) \leq (n-1-s) = (n-1-d(P_1)),$$

suy ra là

$$\frac{n}{2} \leq d(P_n) \leq (n-1-s) = (n-1-d(P_1)) \leq \frac{n-1}{2},$$

là điều vô lí.

Trong G tồn tại những đỉnh có bậc $\leq \frac{n-1}{2}$, nếu không G có chu trình Hamilton theo định lí 4.3.1 của Dirac. Kí hiệu Δ là bậc cao nhất trong các đỉnh của G có bậc nhỏ hơn $\frac{n}{2}$ và p là số các đỉnh có bậc nhỏ hơn $\frac{n}{2}$. Khi đó theo giả thiết của định lí, ta có $p \leq \Delta \leq \frac{n-1}{2}$. Ta sẽ chứng minh rằng $p < \Delta < \frac{n-1}{2}$.

Kí hiệu q là số các đỉnh có bậc lớn hơn Δ, ta có

$$q = n - p \geq n - \Delta > n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} > \Delta.$$

Giả sử Q_1 là một đỉnh có bậc Δ, trong $n - \Delta > \Delta$ đỉnh có bậc lớn hơn $\frac{n}{2}$ tồn tại ít nhất một đỉnh, gọi là Q_n, không kề với Q_1. Khi đó bậc của Q_1 không thể là $\dfrac{n-1}{2}$ được, nếu không Q_1 phải kề với Q_n như trên đã chứng minh. Do đó ta có $d(Q_1) = \Delta < \dfrac{n-1}{2}$.

Theo giả thiết của định lí, số đỉnh không vượt quá Δ sẽ nhỏ hơn Δ, do $\Delta < \dfrac{n-1}{2}$. Ta có $p < \Delta$.

Xét đường Hamilton $(Q_1, Q_2, ..., Q_n)$ nối Q_1 với Q_n. Kí hiệu các láng giềng của Q_1 là Q_{i_1}, Q_{i_2}, ... , Q_{i_s} với $s := \Delta = d(Q_1)$. Khi đó có một trong các đỉnh $Q_{i_1 - 1}$, $Q_{i_2 - 1}$, ... , $Q_{i_s - 1}$, gọi là $Q_{i_0 - 1}$ có bậc $d(Q_{i_0 - 1}) > \Delta$, và do đó ít nhất là $d(Q_{i_0 - 1}) \geq \dfrac{n-1}{2}$. Ta đã chứng minh ở trên là khi đó $Q_{i_0 - 1}$ phải kề với Q_n. Ta thu được chu trình Hamilton

$$(Q_1 Q_2 ... Q_{i_0 - 1} Q_n Q_{n-1} ... Q_{i_0}),$$

là điều vô lí. Mâu thuẫn này kết thúc chứng minh của ta. $\diamond$

Lưu ý rằng định lí Pósa chặt chẽ theo nghĩa nếu bớt giả thiết đi chút ít là ta có thể tìm được đồ thị thỏa mãn điều kiện đưa ra mà không có chu trình Hamilton.

BÀI TẬP

▷ **4.3.1.** *Hãy tìm những ví dụ chứng tỏ rằng ta không thể giảm bớt điều kiện cho trước trong định lí của Pósa về sự tồn tại chu trình Hamilton trong đồ thị.*

▷ **4.3.2.** *Hãy chứng minh rằng mỗi đồ thị* $[\frac{n+1}{2}]$*-liên thông với n đỉnh có một chu trình Hamilton và tồn tại đồ thị* $[\frac{n-1}{2}]$*-liên thông không có chu trình Hamilton.*

▷ **4.3.3.** *Chứng minh định lí Dirac bằng cách sử dụng định lí Pósa.*

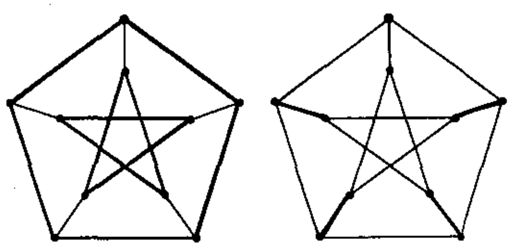
▷ **4.3.4.** *Chứng minh định lí Ore bằng cách sử dụng định lí Pósa.*

▷ **4.3.5.** *Chứng minh một đồ thị đơn G với n đỉnh và số cạnh không nhỏ hơn* $\binom{n-1}{2}+2$ *luôn có một chu trình Hamilton và chỉ ra đồ thị đơn với n đỉnh và* $\binom{n-1}{2}+1$ *cạnh không có chu trình Hamilton.*

Chương 5
Phân hoạch đồ thị thành các đồ thị đều

§ 5.1. Phân tích đồ thị thành các thành tố bậc hai

Trong chương này ta định nghĩa một *thành tố bậc t* của một đồ thị $G = (X, E)$ cho trước là một đồ thị đều F bậc t có tập đỉnh là X và tập cạnh là tập con của E. Nếu F là đồ thị đều bậc 1 thì ta gọi F là thành tố bậc nhất của G, còn khi F là đồ thị đều bậc 2 thì ta gọi F là thành tố bậc 2 của G.



Hình 39

Trong hình 39, các cạnh được tô đậm của đồ thị Petersen bên trái cho ta một thành tố bậc 2, và các cạnh tô đậm bên phải cho ta một thành tố bậc 1 của đồ thị Petersen. Những cạnh vẽ đậm trong hình 39 cho ta thấy đồ thị Petersen là hợp của một thành tố bậc 1 và một thành tố bậc 2.

Nếu đồ thị $G = (X, E)$ có một số m các thành tố bậc t là $F_1 = (X, E_1)$, $F_2 = (X, E_2)$, ..., $F_m = (X, E_m)$, với tính chất: các tập E_1, E_2 ... là một phân hoạch của tập cạnh E (tức là $E_i \cap E_j = \emptyset$ và $E_1 \cup E_2 \cup .... \cup E_m = E$), thì ta nói rằng G phân tích được thành các thành tố bậc t.

Sự phân tích đồ thị cho trước thành các thành tố có một vai trò quan trọng trong toán học cũng như trong các ngành khoa học ứng dụng khác. Tutte, nhà toán học nổi tiếng người Canađa, đã chứng minh được điều kiện cần và đủ để có thể nhận biết khi nào một đồ thị cho trước có một thành tố bậc 1. Từ định lí của Tutte, ta có thể chứng minh lại nhiều kết quả quen biết khác trong lí thuyết đồ thị về sự tồn tại một thành tố bậc 1 trong một đồ thị cho trước. Tuy nhiên, chứng minh của Tutte là chứng minh rất khó, cho nên ta sẽ trình bày kết quả của Tutte ở cuối chương mà không chứng minh.

Kết quả khá căn bản đầu tiên về sự tồn tại thành tố trong đồ thị cho trước là các kết quả của Petersen từ những năm 1891 cho đồ thị đều bậc 3. Nhưng vấn đề phân tích đồ thị cho trước thành các thành tố là một vấn đề khó, mà bạn đọc có thể thấy ngay là với thành tố bậc 2 vấn đề này cũng đã là vấn đề không dễ dàng, vì mỗi chu trình Hamilton cũng là một thành tố bậc 2.

Trước hết chúng ta có định lí sau đây về việc phân tích đồ thị đều bậc 4 thành các thành tố bậc 2.

Định lí 5.1.1. *Một đồ thị đều bậc 4 có thể phân tích thành tích của hai thành tố bậc 2.*

Chứng minh. Chỉ cần chứng minh khẳng định của bài toán cho đồ thị liên thông là đủ. Giả sử G là đồ thị đều bậc 4. Khi đó G có một đường Euler khép kín K. Gọi n là số đỉnh của G, thì K có $2n$ cạnh, và do đó các cạnh này có thể tô xanh đỏ xen kẽ dọc K. Khi đó tập cạnh của G được chia thành hai lớp theo màu của chúng, và cạnh đồng màu tạo thành một thành tố bậc 2 của G. Một kết quả tiếp theo là định lí về sự phân tích đồ thị đều thành tích của các thành tố bậc hai.

Định lí 5.1.2. *Mỗi đồ thị đều bậc chẵn phân tích được thành tích của các thành tố bậc hai.*

Định lí này là trường hợp riêng của định lí sau đây.

Định lí 5.1.3. *Nếu mỗi đỉnh của đồ thị G kề với nhiều nhất là $2g$ cạnh thì tất cả các cạnh của G có thể chia thành g lớp, sao cho mỗi đỉnh kề với nhiều lắm là 2 cạnh của một lớp.*

Chứng minh. Ta chứng minh định lí bằng quy nạp theo số cạnh của G với g cố định.

Khẳng định định lí hiển nhiên đúng cho trường hợp G không có cạnh nào cả.

Giả sử định lí đúng cho trường hợp G có không quá m ($m \geq 0$) cạnh. Bây giờ ta xét G là đồ thị có đúng $m+1$ cạnh. Giả sử $k = (P, Q)$ là một cạnh của đồ thị. Đồ thị $G' = G - k$ có đúng m cạnh, và do đó có thể chia chúng vào g lớp κ_1, κ_2, ..., κ_g sao cho mỗi đỉnh chỉ kề với nhiều lắm 2 cạnh của cùng một lớp. Đỉnh P chỉ kề với nhiều lắm là $2g-1$ cạnh của G'. Theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại một lớp κ_p $(1 \leq p \leq g)$ có đúng một cạnh kề với P. Tương tự tồn tại κ_q có đúng một cạnh kề với Q. Nếu $p = q$ thì ta bổ sung thêm cạnh k vào lớp κ_p. Còn nếu $p \neq q$ thì ta xét đồ thị G'' tạo bởi cạnh k và các cạnh của κ_p và κ_q (tính cả đỉnh của chúng). Trong G'' mỗi đỉnh kề với không quá 4 đỉnh. Trong đồ thị G'', như đã biết, số đỉnh bậc lẻ là số chẵn, và ta có thể chia chúng thành các cặp và bổ sung thêm lần lượt các cạnh vào sao cho đồ thị thu được G''' là đồ thị bậc 4. Đồ thị G''' phân tích được thành tích của hai thành tố bậc 2. Các cạnh của G'' cùng thuộc một thành tố bậc 2 trong G''' cho ta một phân lớp thỏa mãn yêu cầu định lí. Phân lớp này cho ta g tập hợp các cạnh của G mà mỗi đỉnh của G kề với nhiều lắm 2 cạnh của cùng một lớp mà thôi.

BÀI TẬP

▷ **5.1.1.** *Chứng minh rằng đồ thị Petersen (H. 39) không phân tích được thành 3 thành tố bậc nhất.*

▷ **5.1.2.** *Cho trước một đồ thị đều bậc 3 có thể phân tích được thành một thành tố bậc 1 và một thành tố bậc 2. Ta tô màu các cạnh thuộc thành tố bậc 1 màu đỏ và các cạnh thuộc thành tố bậc 2 màu xanh. Chứng minh rằng tồn tại một chu trình có các cạnh đan màu sao cho bằng cách đổi màu các cạnh trên chu trình này, ta có một cách khác để phân tích đồ thị đã cho thành một thành tố bậc 1 và một thành tố bậc 2.*

▷ **5.1.3.** *Người ta nhốt 6 con gà vào 3 cái lồng, cứ 2 con chung một lồng. Sau mỗi ngày người ta lại nhốt lại như vậy sao cho 2 con gà bất kì nào cũng chỉ được nhốt chung một lồng không quá một ngày.*

a) Chứng minh rằng ta luôn nhốt được 6 con gà ít nhất là 3 ngày theo quy tắc trên.

b) Có cách nhốt nào mà ta không nhốt được 6 con gà này quá 3 ngày không?

c) Có cách nhốt nào để ta nhốt được 6 con gà này quá 3 ngày không?

d) Có cách nhốt nào để ta chỉ nhốt được 6 con gà này đúng 4 ngày không?

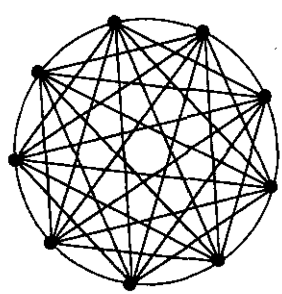
▷ **5.1.4.** *Người ta cần tuyển 3 người phiên dịch cho 6 ngoại ngữ. Có 7 người phiên dịch dự tuyển, mỗi người trong họ biết đúng 2 ngoại ngữ xét tuyển và 2 người bất kỳ trong họ biết không quá một ngoại ngữ chung. Với mỗi ngoại ngữ* *trong số 6 ngoại ngữ này đều có thể tìm trong 7 người phiên dịch này 2 người biết nó. Hỏi có thể tìm được 3 người phiên dịch cho 6 ngoại ngữ xét tuyển hay không?*

▷ **5.1.5.** *Người ta nhốt 2000 con gà vào 1000 cái lồng, cứ 2 con chung một lồng. Sau mỗi ngày người ta lại nhốt lại như vậy sao cho 2 con gà bất kì chỉ được nhốt chung một lồng không quá một ngày.*

a) Chứng minh rằng người ta không thể nhốt chúng quá 1999 ngày theo cách như vậy.

b) Hãy chỉ ra một thứ tự nhốt để người ta có thể nhốt chúng được 1999 ngày theo quy tắc trên hay không?

§ 5.2. Phân tích đồ thị đầy đủ thành các thành tố bậc nhất

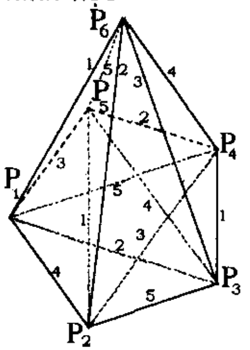


Hình 40 (Đồ thị đầy đủ 9 đỉnh)

Một trường hợp đặc biệt của đồ thị đều là đồ thị đầy đủ (H. 40). Tất nhiên điều kiện cần để có thể phân tích đồ thị đầy đủ thành các thành tố bậc nhất là đồ thị phải có số chẵn đỉnh. Đảo lại, đây cũng là điều kiện đủ.

Định lí 5.2.1. *Đồ thị đầy đủ với $2n$ đỉnh phân tích được thành $2n-1$ thành tố bậc 1.*

Chứng minh. Ta có thể chứng minh định lí bằng phương pháp hình học như sau:



Hình 41

Trước hết ta biểu diễn $2n-1$ đỉnh của đồ thị đầy đủ K_{2n} thành $2n-1$ đỉnh P_1, P_2, ..., P_{2n-1} của một $2n-1$-giác đều, còn đỉnh P_{2n} là đỉnh của hình chóp đều nhận $P_1P_2...P_{2n-1}$ làm đáy . Bây giờ ta chọn một cạnh đáy bất kì và chọn tất cả các đường chéo song song với nó.

Tiếp theo ta chọn thêm một cạnh bên, nối đỉnh còn lại không nằm trên cạnh hoặc đường chéo được chọn với đỉnh của hình chóp. Cạnh đáy và các đường chéo cùng với cạnh bên được chọn đôi một không có đỉnh chung và là một thành tố bậc 1 của đồ thị đầy đủ K_{2n} của ta. Như vậy, ứng với $2n-1$ cạnh của đa giác đều $P_1P_2...P_{2n-1}$ là $2n-1$ thành tố bậc 1 đôi một không có cạnh chung. Trong hình 41 ta đánh số các cạnh của đồ thị cùng thuộc một thành tố bởi cùng một số. $\diamondsuit$

§ 5.3. Phân tích đồ thị lưỡng phân thành các thành tố

Đồ thị lưỡng phân là đồ thị $G = (X, Y; E)$ mà tập đỉnh có một phân hoạch thành hai tập hợp X, Y sao cho tập cạnh E chỉ nối hai đỉnh không cùng một tập hợp.

Ta có thể thấy dễ dàng hai tính chất sau của đồ thị lưỡng phân:

1) Mọi đồ thị con của đồ thị lưỡng phân là một đồ thị lưỡng phân.

2) Đồ thị lưỡng phân không có khuyên.

Trong cuộc sống, có rất nhiều ví dụ về đồ thị lưỡng phân. Chẳng hạn đồ thị biểu diễn quan hệ yêu đương khác giới là đồ thị lưỡng phân. Một tính chất cơ bản để nhận biết đồ thị lưỡng phân là định lí sau đây.

Định lí 5.3.1. *Một đồ thị G là đồ thị lưỡng phân khi và chỉ khi mọi chu trình tùy ý của nó có độ dài chẵn.*

Chứng minh. Giả sử $G = (X, Y; E)$ là một đồ thị lưỡng phân. Khi đó dọc theo chu trình bất kì của G các đỉnh thuộc X và Y lần lượt đan nhau. Do đó khi trở về đỉnh xuất phát, thì ta đi qua một số chẵn các đỉnh, tức là số cạnh của chu trình là số chẵn.

Đảo lại, giả sử G là đồ thị mà tất cả các chu trình của nó có độ dài chẵn. Ta sẽ chứng minh rằng tất cả các thành phần liên thông của G là đồ thị lưỡng phân. Khi đó, G sẽ là đồ thị lưỡng phân.

Thật vậy giả sử G_1 là một thành phần liên thông của G và P_0 là một đỉnh của G_1. Với mỗi đỉnh P của G_1 ta chọn một đường W nối P_0 với P. Nếu W có độ dài (số cạnh) chẵn thì P thuộc tập X, còn nếu W có độ dài lẻ thì P thuộc tập Y. Sự phân loại các đỉnh của G_1 không phụ thuộc vào cách chọn W. Thật vậy, nếu có hai con đường W độ dài chẵn và W' có độ dài lẻ nối P_0 với P thì G_1 sẽ có chu trình có độ dài lẻ, là điều mâu thuẫn với giả thiết ban đầu là G chỉ có chu trình có độ dài chẵn.

Với cách phân loại này, các đỉnh của G_1 hoặc thuộc X hoặc thuộc Y. Giả sử có hai đỉnh P và Q kề nhau trong G_1, thì chúng không thể cùng thuộc một tập hợp, nếu không từ P_0 ta có thể đi tới P rồi tới Q bởi cạnh (P,Q) và trở về P_0 với một đường đi lẻ cạnh, là điều không thể có trong G chỉ có chu trình với số chẵn cạnh. Như vậy đồ thị thu được là đồ thị lưỡng phân $G = (X, Y; E)$. $\diamond$

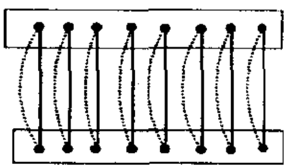
Định lí sau đây của König khẳng định sự phân tích được các đồ thị lưỡng phân đều.

Định lí 5.3.2. *Mọi đồ thị lưỡng phân đều bậc g luôn phân tích được thành g thành tố bậc 1.*

Định lí này được suy ra dễ dàng từ định lí sau đây của König:

Định lí 5.3.3. *Một đồ thị lưỡng phân $G = (X, Y; E)$ với $|X| = |Y|$ có một thành tố bậc nhất nếu với mọi $k \leq |X|$, hợp các tập láng giềng của k đỉnh bất kì của X có ít nhất k phần tử.*

Chứng minh. Ta chứng minh qui nạp theo $|X|$. Rõ ràng kết luận của bài toán hiển nhiên đúng cho $|X| = 1$. Giả sử kết luận đúng cho n_0: mọi đồ thị lưỡng phân $G = (X, Y; E)$ với $|X| = |Y| \leq n_0$ luôn có một thành tố bậc nhất nếu hợp các tập láng giềng của k đỉnh bất kì của X có ít nhất k phần tử. Ta xét đồ thị lưỡng phân $G = (X, Y; E)$ với $|X| = |Y| = n_0 + 1$ thỏa mãn điều kiện: Hợp các tập láng giềng của k đỉnh bất kì của X có ít nhất k phần tử. Ta xét hai trường hợp có thể xảy ra:



Hình 42

a) Tồn tại $k_0 \leq n_0$ và một tập hợp con $X' \subset X$ có k_0 phần tử sao cho hợp các tập láng giềng của các đỉnh của X' có đúng k_0 phần tử.

Trong trường hợp này gọi Y' là hợp của các tập láng giềng của các đỉnh của X'. Các đồ thị lưỡng phân $G' = (X', Y'; E')$ và $G'' = (X'', Y''; E'')$ với $X'' = X - X'$, $Y'' = Y - Y'$ và các cạnh của đồ thị G nối các đỉnh của tập tương ứng sẽ thỏa mãn giả thiết của định lí. Ta áp dụng giả thiết qui nạp vào G' và G'' và thu được một thành tố bậc nhất của đồ thị G.

b) Hợp của các tập láng giềng của $k \leq n_0$ đỉnh bất kì của X là tập hợp có ít nhất $k+1$ phần tử. Trong trường hợp này chọn một đỉnh $p \in X$ và một láng giềng của p là đỉnh $q \in Y$ tùy ý. Rõ ràng khi bỏ đỉnh p và q ra khỏi đồ thị G thì ta thu được đồ thị G' thỏa mãn yêu cầu của đầu bài. Ta có thể áp dụng giả thiết qui nạp vào G' và thu được một thành tố bậc nhất của G bằng cách bổ sung vào thành tố bậc nhất của G' cạnh (p, q). $\diamond$

BÀI TẬP

▷ **5.3.1.** *Chứng minh rằng một đồ thị đều bậc hai phân tích được thành hai thành tố bậc nhất khi và chỉ khi nó là đồ thị lưỡng phân.*

▷ **5.3.2.** *Chứng minh rằng mọi đồ thị Hamilton có số chẵn đỉnh đều có một thành tố bậc nhất.*

▷ **5.3.3.** *Có một tờ giấy mà mỗi mặt được chia thành 2000 phần có diện tích bằng nhau. Trên mặt thứ nhất người ta tô màu các phần đó bằng 2000 màu khác nhau. Chứng minh có thể tô màu các phần ở mặt thứ hai bằng 2000 màu này sao cho các phần cùng màu ở hai mặt có "điểm chung" (tức là có thể xuyên một cái kim qua tờ giấy sao cho lỗ thủng nằm ở cả hai phần cùng màu).*

▷ **5.3.4.** *Có 2000 hộp bi bằng nhau được sơn bởi 2000 màu khác nhau. Mỗi hộp chứa đầy một số lượng bi giống hệt nhau,* *và bi trong mỗi hộp có màu giống màu hộp đựng nó. Một em bé đem đổ tất cả các hộp bi ra chơi và sau đó lại cất bi vào đầy mỗi hộp, nhưng không để ý tới màu sắc các viên bi trong hộp còn đồng màu nhau nữa không. Chứng minh rằng ta có thể lấy từ trong mỗi hộp ra một hòn bi để có 2000 viên bi màu khác nhau.*

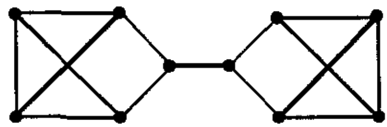
▷ **5.3.5.** *Có n người đàn ông và n người đàn bà. Mỗi ông quen đúng k bà ($k \geq 1$), mỗi bà quen đúng k ông. Chứng minh rằng có thể ghép n cặp nhảy (mỗi ông với một bà) sao cho hai người cùng một cặp quen biết nhau.*

▷ **5.3.6.** *Tại mỗi đỉnh của một 2000-giác đều có một viên sỏi. Hai người A và B chơi trò chơi. A là người bắt đầu, họ lần lượt thay nhau, ai đến lượt phải chọn bốc đi đúng 3 viên. Đến khi còn lại 2 viên thì B thắng nếu 2 viên này nằm trên 2 đỉnh liên tiếp nhau, và A thắng nếu 2 viên còn lại này không nằm trên 2 đỉnh liên tiếp nhau. Hỏi rằng ai có thể thắng và phải chơi như thế nào?*

▷ **5.3.7.** *Trên bàn cờ châu Âu 8×8 ô vuông, hai người A và B chơi một trò chơi như sau. A bắt đầu với việc đặt con mã lên một ô nào đó của bàn cờ. Sau đó là đến lượt B, và họ lần lượt thay nhau: Ai đến lượt phải dẫn con mã đi một bước trên bàn cờ như cách đi của con mã theo luật cờ Châu âu. Biết rằng luật chơi là không được đặt con mã lên ô nào nó đã đi qua. Hỏi rằng ai thắng và phải chơi như thế nào?*

§ 5.4. Thành tố bậc nhất trong đồ thị đều bậc ba

Theo định lí quen biết, số đỉnh bậc lẻ trong một đồ thị phải là một số chẵn. Do đó mọi đồ thị đều bậc 3 đều có một số chẵn đỉnh. Đây là một điều kiện cần cho sự tồn tại thành tố bậc nhất trong đồ thị. Nhưng dễ thấy rằng không phải là mọi đồ thị đều bậc 3 nào cũng có thành tố bậc nhất (H. 43).



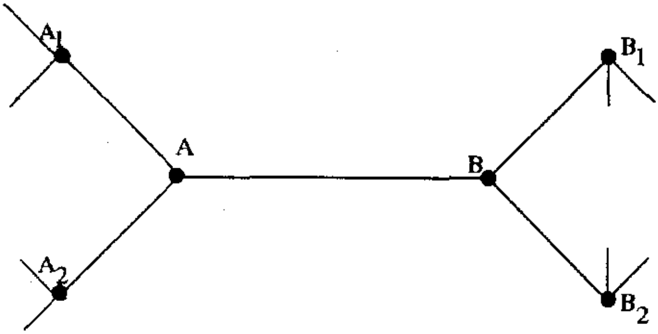
Hình 43

Petersen đã nghiên cứu các đồ thị đều bậc 3 có thể phân tích được thành các thành tố bậc nhất. Ta gọi một cạnh e của một đồ thị G là *cầu* nếu như nó không nằm trên chu trình nào của đồ thị G cả. Trong trường hợp e là cầu của đồ thị G thì đồ thị $G - e$ thu được khi bỏ cạnh e ra khỏi đồ thị, mà giữ nguyên đỉnh đầu và đỉnh cuối của cạnh e này, sẽ có ít nhất hai thành phần liên thông. Mỗi thành phần chứa đỉnh đầu hoặc đỉnh cuối của e được gọi là *bờ* của đồ thị G. Petersen đã chứng minh trong năm 1891 định lí sau.

Định lí 5.4.1. *Một đồ thị đều bậc 3 không có cầu có ít nhất một thành tố bậc nhất.*

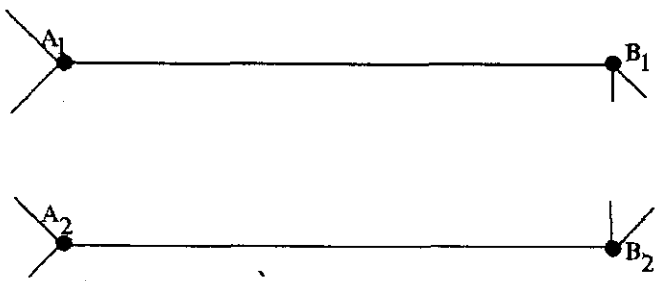
Để chứng minh định lí này, ta sẽ đưa ra một phép toán *tách* cạnh k của đồ thị như sau:

Cho trước một đồ thị G đều bậc 3 và $k = (A, B)$ là một cạnh của G, không là cạnh kép và cũng không là khuyên. Gọi A_i và B_i $(i = 1, 2)$ là các đỉnh kề với A và B một cách tương ứng (H. 44).



Hình 44

Các đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 không nhất thiết phải đôi một phân biệt. A_1 và B_1 cũng như A_2 và B_2 có thể được nối với nhau ở trong G bởi cạnh đơn hoặc cạnh kép.



Hình 45

Ta xóa 5 cạnh $(A_1, A), (A_2, A), (B_1, B)(B_2, B), (A, B)$ và thêm vào đồ thị thu được các cạnh (A_1, B_1) và (A_2, B_2) để được một đồ thị G_1^k đều bậc 3 (H. 45). Tương tự, nếu không phải là thêm vào các cạnh (A_1, B_1) và (A_2, B_2) mà là các cạnh (A_1, B_2) và (A_2, B_1) ta thu được một đồ thị đều bậc ba G_2^k.

Ta nói rằng các đồ thị G_1^k và G_2^k thu được từ G bằng cách tách cạnh k. Với mỗi cạnh k ta có-hai cách tách nó ra khỏi đồ thị G - trong trường hợp đỉnh A_1 và B_1 trùng nhau chẳng hạn thì cạnh nối (A_1, B_1) là một khuyên. Bạn đọc có thể tự khảo sát các trường hợp trùng nhau khác có thể xảy ra với bộ 4 đỉnh A_1, A_2, B_1 và B_2.

Frink chứng minh kết quả sau đây có thể sử dụng để chứng minh định lí của Petersen:

Định lí 5.4.2. *Cho trước G là một đồ thị liên thông đều bậc 3 không có cầu và k là một cạnh đơn của đồ thị G. Khi đó một trong hai đồ thị G_1^k hoặc G_2^k là một đồ thị liên thông đều bậc 3 và không có cầu.*

Chứng minh. Trước hết chúng ta chứng minh những khẳng định sau đây:

1) *Một đồ thị đều bậc 3 không có cầu sẽ không có khuyên.*

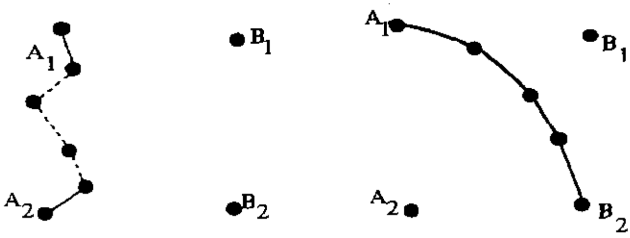
Điều này có thể thấy dễ dàng, bởi vì một đồ thị đều bậc 3 có một khuyên là cạnh k nào đó, thì cạnh kề với k phải là một cầu, mâu thuẫn với giả thiết của 1).

2) *Nếu $k = (A, B)$ là một cạnh của đồ thị liên thông G đều bậc 3 không có cầu, và nếu G_1^k không liên thông thì G_1^k có hai thành phần liên thông, một thành phần liên thông chứa cạnh (A_1, B_1) và thành phần liên thông kia chứa cạnh (A_2, B_2).*

Vì G liên thông nên với mỗi đỉnh P tùy ý luôn có một con đường nối A với P. Ta chọn P khác A và B. Vì mỗi con đường đi từ P tới A phải đi qua ít nhất một trong các đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 nên trong G cũng như trong G_1^k luôn tồn tại một con đường nối P với một trong các đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2. Ta thêm cạnh (A_1, A_2) vào đồ thị G_1^k. Khi đó đồ thị G^* thu được liên thông, vì các đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 liên thông với nhau trong G^*. Nếu cạnh (A_1, A_2) nằm trên một chu trình trong G^* thì ta có thể bỏ cạnh (A_1, A_2) để thu được một đồ thị liên thông và do đó đồ thị G_1^k là đồ thị liên thông. Trong trường hợp (A_1, A_2) là một cầu của G^* thì A_1 và A_2 nằm trong hai thành phần khác nhau của G_1^k khi bỏ cạnh (A_1, A_2) ra khỏi G^*. Khẳng định 2) được chứng minh.

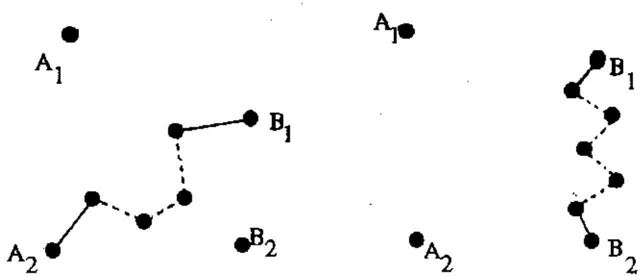
3) *Nếu $k = (A, B)$ là một cạnh của đồ thị liên thông G đều bậc 3 không có cầu, thì các cạnh (A_1, B_1) và (A_2, B_2) không thể là cầu của đồ thị G_1^k.*

Ta chứng minh khẳng định này bằng phản chứng. Giả sử (A_1, B_1) là cầu trong đồ thị G_1^k. Do G không có cầu, nên cạnh (A, A_1) không phải là cầu và do đó tồn tại một đường đi W nối A với A_1 mà không đi qua cạnh (A, A_1). Do W dẫn tới A, cho nên W phải đi qua ít nhất một trong các đỉnh A_1, B_1, B_2. Nếu từ A_1 dọc theo W ta đi qua B_1 trước các điểm khác trong số điểm A_2, B_2, thì phần đường của W từ vị trí A_1 tới B_1 cùng với cạnh (A_1, B_1) tạo thành một chu trình trong G_1^k.



Hình 46

Vì ta giả định rằng (A_1, B_1) là cầu trong G_1^k nên điều này không xảy ra. Do đó nếu đi dọc W bắt đầu từ A_1 tới A thì trước hết ta phải gặp đỉnh A_2 hoặc B_2. Suy ra rằng trong $G_1^k - (A_1, B_1) - (A_2, B_2)$ có một con đường từ A_1 tới A_2 hoặc từ A_1 tới B_2 như trong hình 46 và hình 47 biểu diễn.

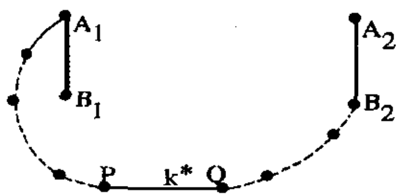


Hình 47

Tương tự, ta cũng có kết luận giống như vậy đối với B_1 là phải có một con đường nối B_1 với A_2 hoặc với B_2 ở trong đồ thị $G_1^k - (A_1, B_1) - (A_2, B_2)$. Trong mỗi trường hợp xảy ra ta luôn có một con đường nối A_1 với B_1 (có thể phải đi qua cạnh (A_2, B_2) nếu cần thiết) mà không cần sử dụng đến cạnh (A_1, B_1). Như vậy cạnh (A_1, B_1) không thể là cầu trong đồ thị G_1^k. Tương tự thì (A_2, B_2) không thể là cầu trong đồ thị G_1^k được.

4) *Nếu $k = (A, B)$ là một cạnh của đồ thị liên thông G đều bậc 3 không có cầu, và $k^* = (P, Q)$ là cầu trong đồ thị G_1^k, thì một bờ của k^* chứa cạnh (A_1, B_1), còn bờ kia thì chứa cạnh (A_2, B_2).*

Theo 3) thì $k^* \neq (A_1, B_1)$ và $k^* \neq (A_2, B_2)$. Do đó k^* là một cạnh trong đồ thị G_1^k. Do đồ thị G không có cầu, cạnh k^* nằm trong một chu trình C nào đó ở trong G. Nếu như C không chứa đỉnh nào trong số đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 thì C là một chu trình trong G_1^k và cạnh k^* nằm trên nó không thể là cầu của đồ thị G_1^k được.



Hình 48

Do đó chu trình C phải chứa ít nhất một đỉnh của A_1, A_2, B_1, B_2. Ta giả sử là nếu bắt đầu từ đỉnh P đi dọc trên chu trình C và không đi qua k^* ta bắt gặp đỉnh A_1 trước tiên trong số các đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 (H. 48). Nếu cũng đi như vậy trên C, nhưng bắt đầu từ Q, thì ta không thể gặp đỉnh A_1 hoặc B_1 trước tiên trong số các đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2, vì nếu không, k^* không thể là cầu trong đồ thị G_1^k được. Cho nên nếu cũng đi như vậy trên C, nhưng bắt đầu từ Q, thì ta phải gặp đỉnh A_2 hoặc B_2 trước tiên trong số các đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2. Cạnh (A_2, B_2) và cạnh (A_1, B_1) không thể thuộc cùng một bờ đối với cầu k^* trong G_1^k được.

Giả sử G là đồ thị liên thông đều bậc 3 không có cầu và $k = (A, B)$ là một cạnh của G. Theo 3), trong G_1^k tồn tại một chu trình C_1 chứa cạnh (A_1, B_1) và một chu trình C_2 chứa cạnh (A_2, B_2). Ta khẳng định rằng:

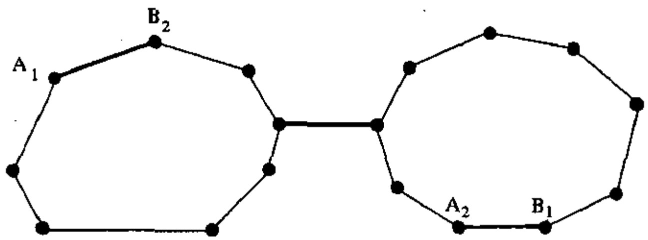
5) *Nếu G_1^k không liên thông hoặc có cầu, thì các chu trình C_1 và C_2 không có đỉnh chung.*

Rõ ràng nếu G_1^k không liên thông thì C_1 và C_2 nằm trong các thành phần liên thông khác nhau của G_1^k theo 2). Còn nếu G_1^k có cầu k^* nào đó thì C_1 và C_2 nằm về các bờ khác nhau của cầu k^* trong G_1^k và cũng không thể có đỉnh chung được.

Lưu ý rằng các khẳng định 2), 3), 4) và 5) cũng đúng một cách tương tự cho đồ thị G_2^k.

6) *Nếu G_1^k không liên thông hoặc có cầu thì G_2^k liên thông và không có cầu.*

Ta có thể thay thế các cạnh (A_1, B_1) và (A_2, B_2) bởi các cạnh (A_1, B_2) và (A_2, B_1). Như thế phần còn lại của các chu trình C_1 và C_2 cùng với hai cạnh thêm vào này sẽ tạo nên một chu trình C trong đồ thị G_2^k. Nếu như G_2^k không liên thông hoặc có cầu thì với mỗi cặp hai chu trình C_1' chứa cạnh (A_1, B_2) và C_2' chứa cạnh (A_2, B_1), các chu trình này không có đỉnh chung trong đồ thị G_2^k như đã chứng minh trong 5) (H. 49).



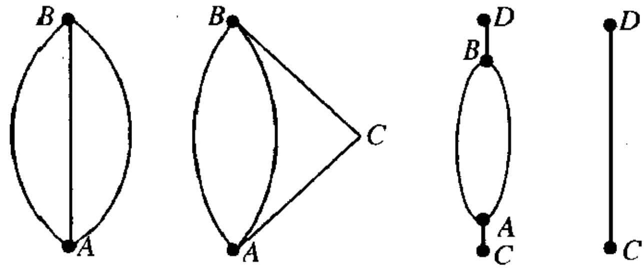
Hình 49

Nhưng ta có thể chọn $C = C_1' = C_2'$ và do đó theo mệnh đề tương tự như 5) cho đồ thị G_2^k thì C không có đỉnh chung với C là điều vô lí. Mâu thuẫn này kết thúc chứng minh của định lí Frink. $\diamond$

Bây giờ chúng ta khảo sát một đồ thị G đều bậc 3 có một thành tố bậc nhất. Trong các phần tiếp theo ta tô màu các cạnh của thành tố bậc nhất này bởi màu đỏ và các cạnh không thuộc thành tố bậc nhất này bởi màu xanh. Rõ ràng là các cạnh màu xanh lập thành các chu trình không có đỉnh chung với nhau mà ta vẫn gọi là một thành tố bậc hai. Như vậy đồ thị G được phân tích thành tích của một thành tố bậc nhất và một thành tố bậc hai. Mỗi đỉnh của đồ thị G kề với đúng một cạnh đỏ và hai cạnh xanh. Một chu trình C của G được gọi là *đan màu* nếu như các cạnh kề nhau của C khác màu nhau. Nếu ta đổi màu tất cả các cạnh của một chu trình đan màu xanh thành đỏ và đỏ thành xanh, thì ta sẽ thu được một thành tố bậc nhất mới gồm tất cả các cạnh màu đỏ. Các cạnh xanh và đỏ mới này cho ta một cách phân tích khác của G thành tích của một thành tố bậc nhất và một thành tố bậc hai. Để chứng minh định lí Petersen, ta cần phải chứng minh định lí tiếp theo:

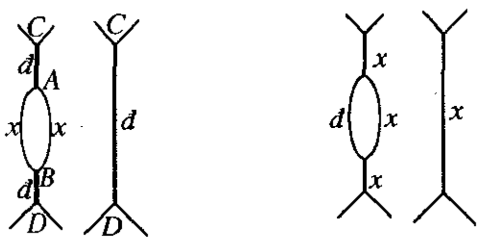
Định lí 5.4.3. *Nếu một đồ thị G đều bậc 3 không có cầu được phân tích thành tích của một thành tố bậc nhất và một thành tố bậc hai thì mỗi cạnh của G nằm trên một chu trình đan màu.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử rằng tồn tại đồ thị đều bậc ba không có cầu phân tích được thành tích của thành tố bậc nhất và một thành tố bậc hai nhưng có chứa những cạnh không nằm trên chu trình đan màu nào cả, trong số những đồ thị như vậy giả sử G là đồ thị ít đỉnh nhất không thỏa mãn định lí của ta. Rõ ràng khi đó G liên thông do giả thiết về số ít nhất các đỉnh của G. Tiếp đó ta khẳng định rằng G là đồ thị đơn.



Hình 50

Thật vậy, do G không có cầu cho nên như đã biết G không có khuyên. Giả sử rằng G có một cạnh kép (A, B) (H. 50) và C và D là các láng giềng kề với A và B bởi cạnh thứ ba.



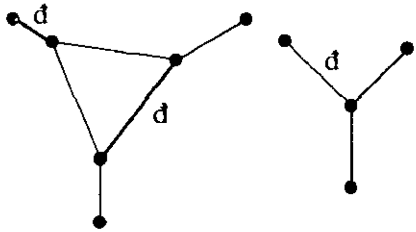
Hình 51

Nếu như $A \equiv C$ và $B \equiv D$ thì G là đồ thị có đúng hai đỉnh A và B và ba cạnh kép nối hai đỉnh này với nhau. Khi đó rõ ràng G thỏa mãn định lí của ta, vô lí. Do vậy $A \not\equiv C$ và $B \not\equiv D$.

Trường hợp $C \equiv D$ cũng không thể xảy ra, vì nếu thế thì cạnh thứ ba của C là cầu trong G, vô lí.

Do đó các đỉnh A, B, C và D đôi một khác nhau. Ta có thể bỏ đỉnh A và B và nối C với D bởi một cạnh thay thế. Bằng cách đó ta thu được một đồ thị mới G^* có ít đỉnh hơn G.

Với đồ thị G^* ta có thể chuyển tô màu của G sang G^* một cách tương ứng như trong hình 51. Lưu ý rằng rõ ràng G^* không có cầu, do G không có cầu. Do sự tối thiểu của G, đồ thị G^* thỏa mãn định lí 5.4.3 và mỗi cạnh của G^* nằm trên một chu trình đan màu.



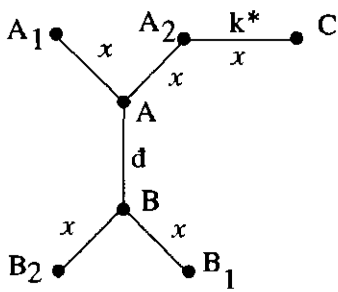
Hình 52

Dễ dàng kiểm tra trên hình 52 rằng mỗi cạnh của G nằm trên một chu trình đan màu tương ứng, mâu thuẫn với điều mà ta giả thiết. Vậy G không có cạnh kép và do đó là đồ thị đơn.

Ta khẳng định rằng G không có một tam giác với một cạnh tô đỏ. Thật vậy, nếu G có một tam giác Δ với một cạnh đỏ, thì ta có thể thu nhỏ tam giác Δ này thành một đỉnh duy nhất.

Đồ thị G^* thu được bởi cách đó có các cạnh tô đỏ lập thành một thành tố bậc nhất và rõ ràng là không có cầu. Do G^* có ít đỉnh hơn G, cho nên mỗi cạnh của G^* nằm trên một chu trình đan màu. Ta kiểm tra dễ dàng rằng điều này cũng được thỏa mãn cho mỗi đỉnh của G, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu của ta. Do vậy G không có tam giác nào có một cạnh màu đỏ cả.

Bây giờ ta chứng tỏ rằng mỗi cạnh của G nằm trên một chu trình đan màu. Trước tiên ta chứng minh điều này cho cạnh xanh. Giả sử $k^* = (A_2, C)$ là một cạnh màu xanh tùy ý. Cạnh xanh thứ hai xuất phát từ A_2 được kí hiệu là (A_2, A). Cạnh xanh còn lại kề với A được kí hiệu là (A, A_1) và cạnh đỏ xuất phát từ A được kí hiệu là (A, B). Các cạnh xanh của B được kí hiệu là (B, B_1) và (B, B_2) (H. 53).



Hình 53

Vì G là đồ thị đơn và không có tam giác nào có một cạnh đỏ, cho nên các đỉnh A, B, A_1, A_2, B_1 và B_2 đôi một phân biệt. Ngoài ra cũng có thể thấy dễ dàng là $B \neq C$.

Bây giờ ta tách cạnh $k = (A, B)$ như cách vẫn làm để thu được hoặc đồ thị G_1^k hoặc G_2^k đều bậc 3 và không có cầu. Giả sử không mất tính tổng quát rằng G_1^k là đồ thị liên thông đều bậc 3 không có cầu. Trong đồ thị G_1^k ta tô màu các cạnh (A_1, B_1) và (A_2, B_2) màu xanh, còn các cạnh cũ để nguyên màu. Đồ thị G_1^k rõ ràng có các cạnh màu đỏ lập thành một thành tố bậc nhất. Do G_1^k có ít đỉnh hơn G, cho nên k^* nằm trên một chu trình đan màu C nào đó. Vì (A_2, C) và (A_2, B_2) là các cạnh màu xanh, cho nên (A_2, B_2) không nằm trên C. Nếu C không chứa cạnh (A_1, B_1) thì chu trình C cũng là chu trình đan màu trong G_1^k.

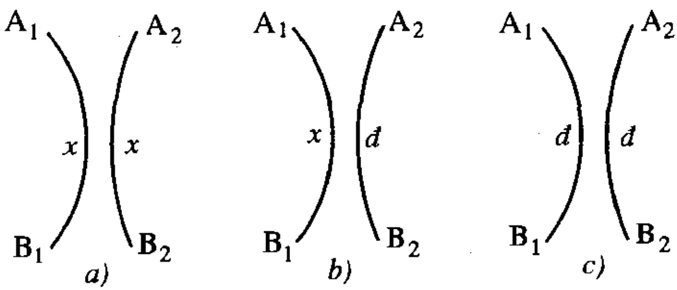
Nếu C chứa cạnh (A_1, B_1) thì ta thay thế cạnh này bởi (A_1, A), (A, B) và (B, B_1), và ta thu được một chu trình đan màu trong G chứa cạnh k đã chọn.

Bây giờ ta chứng minh rằng mỗi cạnh đỏ $k = (A, B)$ tùy ý cũng nằm trên một chu trình đan màu nào đó. Gọi cạnh xanh xuất phát từ A là k^*. Ta biết rằng cạnh này phải nằm trên một chu trình C đan màu nào đó. Rõ ràng C cũng phải chứa cạnh k, vì các cạnh của C đan màu xanh đỏ với nhau. Vậy tóm lại là mỗi cạnh của G nằm trên một chu trình đan màu nào đó, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu về G. Định lí được chứng minh. ◇

Bây giờ ta chứng minh định lí Petersen như sau:

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử định lí Pertersen không đúng.

Khi đó tồn tại những đồ thị đều bậc 3 không có cầu và không có thành tố bậc nhất. Trong những đồ thị như vậy xét G là đồ thị đều bậc 3 không có cầu và không có thành tố bậc nhất với số cạnh ít nhất. Do sự tối thiểu của G, nên rõ ràng là G phải là đồ thị liên thông.

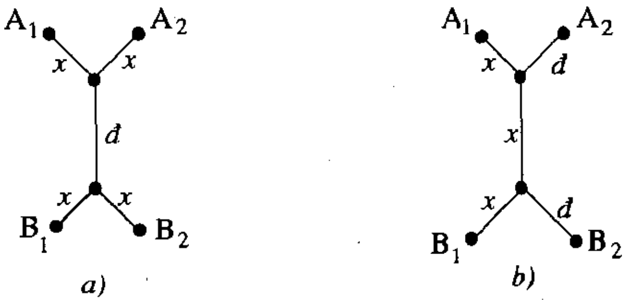


Hình 54

Ngoài ra G phải có một cạnh đơn $k = (A, B)$ nào đó, nếu không thì G chỉ có các cạnh kép và do G là đồ thị đều bậc 3, cho nên G có đúng 2 đỉnh A và B và 3 cạnh nối A với B mà thôi. Trong trường hợp này ta sẽ chỉ ra được dễ dàng rằng G có thành tố bậc nhất, mâu thuẫn với giả sử ban đầu về G.

Không mất tính tổng quát giả sử rằng đồ thị G_1^k là đồ thị đều bậc 3 liên thông và không có cầu. Do G_1^k có ít cạnh hơn G, cho nên G_1^k có một thành tố, và ta tô màu các cạnh của thành tố bậc nhất của G_1^k đỏ và các cạnh còn lại màu xanh. Màu của cạnh (A_1, B_1) và (A_2, B_2) mới thêm vào của G_1^k có thể có ba tình huống như được trình bày trong hình 54.

Trong trường hợp a) và b) (xem hình 54) thì ta có cách tô màu các cạnh chưa có màu của đồ thị G như trong hình 55. Rõ ràng khi đó các cạnh đỏ trong đồ thị G lập thành một thành tố bậc nhất.



Hình 55

Trong trường hợp c) (H. 54) còn lại (hai cạnh (A_1, B_1) và (A_2, B_2) đều màu đỏ), ta đưa trường hợp này về trường hợp a) hoặc b) bằng cách sau: Do G_1^k liên thông đều bậc 3 và có thành tố bậc nhất, cho nên mỗi cạnh của nó nằm trên một chu trình đan màu nào đó. Như vậy cạnh đỏ (A_1, B_1) nằm trên một chu trình C đan màu nào đó mà bằng cách đổi màu các cạnh của C từ đỏ thành xanh và xanh thành đỏ, ta thu được một thành tố bậc nhất mới của G_1^k mà trong đó cạnh (A_1, B_1) màu xanh.

Với cách tô màu mới này ta có hoặc trường hợp a) hoặc trường hợp b) là các trường hợp đã được giải quyết. Vậy G luôn có một thành tố bậc nhất là điều mâu thuẫn với giả định ban đầu về G. Định lí được chứng minh xong. ◇

BÀI TẬP

▷ **5.4.1.** *Chứng minh đồ thị Petersen không thể phân tích được thành tích của 3 thành tố bậc nhất.*

▷ **5.4.2.** *Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để một đồ thị G đều bậc 3 có thể phân tích thành tích của 3 thành tố bậc nhất khi và chỉ khi G phân tích được thành tích của một thành tố bậc nhất với một thành tố bậc hai mà độ dài mỗi chu trình của nó là một số chẵn.*

▷ **5.4.3.** *Chứng minh rằng đồ thị đều bậc 3 có 6 đỉnh phân tích được thành tích của ba thành tố bậc 1.*

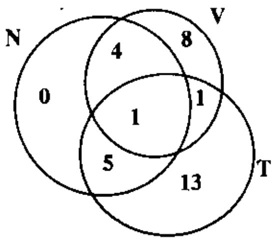
▷ **5.4.4.** *Chứng minh mỗi đồ thị liên thông đều bậc 3 mà tất cả các cầu của nó nằm trên một đường đi nào đó có thành tố bậc nhất.*

Chương 6
Lời giải

▷ **1.1.1** $\mathcal{M} = \{2n | n \in \mathbf{N}, n > 0\}$.

▷ **1.1.2** $\mathcal{M} = \{(a, y) | y \in \mathbf{R}\}$.

▷ **1.2.1**



Ta biểu thị tập hợp các em thi các môn toán, văn và ngoại ngữ bởi T, V và N. Các tập hợp này được biểu diễn trên mặt phẳng bởi các đường khép kín.

Hình 56

Trong biểu đồ trong hình 56 ta điền các số liệu đã cho và tính được dễ dàng các số tương ứng trong các miền được chia. Tổng số học sinh tham gia kì thi học sinh giỏi là 32 em.

▷ **1.2.2** Các tập con của X là $\emptyset$, $\{3\}$, $\{-5\}$, $\{\sqrt{2}\}$, $\{3, -5\}$, $\{3, \sqrt{2}\}$, $\{-5, \sqrt{2}\}$ và X.

▷ **1.2.3** Số tập con hai phần tử của X là $\binom{n}{2}$.

▷ **1.3.1** Ta chứng minh đẳng thức

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}) \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}),$$

các đẳng thức khác được chứng minh tương tự. Để chứng minh điều này ta chứng minh

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} \subset (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}) \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}), \tag{1}$$

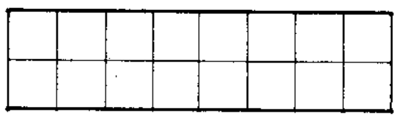
và

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup \mathcal{C} \supset (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}) \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}). \tag{2}$$

Để chứng minh (1) ta xét $x \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup \mathcal{C}$ tùy ý. Khi đó hoặc $x \in (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ hoặc $x \in \mathcal{C}$. Dễ thấy trong cả hai trường hợp ta đều có $x \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{C}) \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$, và do đó ta có (1). Tương tự như vậy ta có (2).

▷ **1.3.2** Số phần tử cần tính là nm.

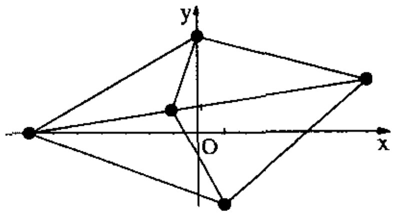
▷ **1.3.3**



Hình 57

Xét hình chữ nhật có kích thước 2×8 ô vuông (H. 57). Do có 9 cột tất cả cho nên có 2 cột mà các đỉnh được tô màu giống hệt nhau, vì trên mỗi cột có nhiều nhất 2^3 cách tô màu khác nhau (mỗi đỉnh có 2 cách tô màu và có 3 đỉnh trên mỗi cột). Trên hai cột có cách tô màu giống hệt nhau này phải có hai đỉnh được tô cùng màu xanh hoặc đỏ theo nguyên tắc Dirichlet. Hai đỉnh được tô cùng màu này cùng hai đỉnh tương ứng với nó trên cột kia lập thành hình chữ nhật có 4 đỉnh cùng màu.

▷ **1.3.4**



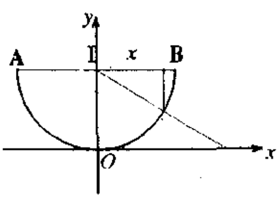
Xét tính chẵn lẻ của tọa độ của mỗi điểm có hai tọa độ nguyên, ta thấy chỉ có tất cả $2 \times 2 = 4$ khả năng phân biệt (H. 58).

Hình 58

Vậy trong 5 điểm có cả hai tọa độ đều là số nguyên luôn tồn tại 2 điểm mà tọa độ của chúng có cùng tính chẵn lẻ, suy ra trung điểm của hai điểm này có tọa độ nguyên.

▷ **1.5.1** Có thể coi $\mathcal{B} = \{0; 1\}$. Ta cho ứng mỗi ánh xạ f từ $\mathcal{A}$ vào $\mathcal{B}$ với tập các tạo ảnh của 1. Dễ thấy phép tương ứng này là song ánh. Vậy số ánh xạ cần tìm là số tập con của $\mathcal{A}$, như đã biết là 2^n.

▷ **1.6.1**



Ánh xạ cần tìm được xây dựng bằng phương pháp hình học. Dễ thấy rằng tích các phép ánh xạ 1-1 (song ánh) cũng là ánh xạ 1-1.

Hình 59

Bằng tích các phép chiếu ta có được song ánh cần tìm. Chọn đoạn thẳng AB có độ dài 1 và biểu thị ánh xạ như trong hình 59. Ánh xạ này rõ ràng là ánh xạ 1-1. Ta có thể tính được dạng chính tắc của nó là $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$.

▷ **1.6.2** Giả sử $\mathcal{M} = \{x_1; x_2; ...; x_m\}$. Xét ánh xạ cho ứng mỗi tập con M của $\mathcal{M}$ với một dãy $(a_1, a_2, ..., a_m)$ với

$$a_i = \begin{cases} 1 & x_i \in M \\ 0 & x_i \notin M. \end{cases}$$

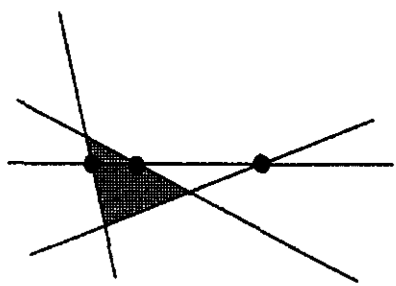
Sự tương ứng này rõ ràng là một song ánh, vì vậy ta có số các phần tử của $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ là 2^m.

▷ **1.6.3** Ta chứng minh phản chứng. Giả sử tồn tại song ánh $f : \mathcal{M} \to \mathcal{P}(\mathcal{M})$. Đặt

$$M_0 = \{x | x \notin f(x)\}.$$

Gọi x_0 là tạo ảnh của M_0: $f(x_0) = M_0$. Khi đó ta thấy hai giả thiết $x_0 \in M_0$ hay $x_0 \notin M_0$ đều dẫn đến vô lí.

▷ **1.7.1**



Hình 60

Ta chứng minh công thức truy hồi:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1).$$

Thật vậy, n đường thẳng đã cho cắt đường thẳng thứ $n+1$ tại n giao điểm. Các điểm cắt này chia đường thẳng thứ $n+1$ thành $n+1$ đoạn thẳng hoặc tia. Mỗi khoảng (đoạn thẳng hoặc tia) này chia miền chứa nó thành hai miền, cho nên số miền tăng lên đúng $n+1$ (H. 60). Công thức truy hồi được chứng minh.

Do đó ta có số miền cần tính là:

$$\begin{aligned} S_n &= n + S_{n-1} \\ &= \ldots.. \\ &= n + (n-1) + \ldots + 2 + 2 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + 1. \end{aligned}$$

▷ **1.7.2** Áp dụng kết quả bài toán trên, ta biết số phần mặt phẳng thu được là $\frac{n(n+1)}{2}+1$. Bây giờ ta đem phủ mặt phẳng bởi một hình tròn đủ lớn sao cho hình tròn này phủ tất cả các đa giác thu được. Số đường cho trước là n, chúng cắt hình tròn và ta thu được $2n$ tia xuất phát từ chúng, như là tia nắng mặt trời trong hình vẽ của các em nhỏ. Số phần (là những hình không bị chặn) thu được ở ngoài hình tròn lớn này và $2n$ tia là $2n$. Vậy số đa giác lồi của ta là $\frac{n(n+1)}{2}+1-2n$.

▷ **1.7.3** Chứng minh khẳng định của bài toán bằng phương pháp quy nạp theo n.

Với $n=1$ kết luận của bài toán hiển nhiên đúng.

Giả sử kết luận của bài toán đúng cho $n-1$, tức là trong n số của tập hợp $\{1; 2; ...; 2(n-1)\}$ luôn có 2 số là bội của nhau. Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng khẳng định của bài toán cũng đúng cho n. Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử ngược lại rằng tồn tại một tập con có $n+1$ số của tập hợp $\{1; 2; ...; 2n\}$, mà ta kí hiệu là X. Ta chứng tỏ từ tập hợp X luôn có thể thu được một tập con X' gồm n phần tử của $\{1; 2; ...; 2(n-1)\}$ sao cho trong X' không có 2 số là bội của nhau. Ta xét những trường hợp có thể xảy ra:

1) X không chứa $2n-1$ và $2n$.

Trong trường hợp này ta bỏ đi một số tùy ý trong X và thu được tập hợp X' là một tập con có n phần tử của $\{1; 2; ...; 2(n-1)\}$ và không chứa 2 số nào là bội của nhau.

2) X chứa $2n-1$ và không chứa $2n$.

Trong trường hợp này ta thu được tập hợp X' từ X bằng cách bỏ đi phần tử $2n-1$.

3) X không chứa $2n-1$ nhưng chứa $2n$.

Trong trường hợp này ta bỏ đi $2n$ và thu được từ X tập X'.

4) X chứa $2n-1$ và $2n$.

Do trong X không có 2 số nào là bội của nhau, cho nên X không chứa ước số nào của n. Bỏ đi từ tập hợp X các số $2n$ và $2n-1$ và thêm vào tập thu được số n, ta thu được tập hợp X' là một tập con có n phần tử của $\{1; 2; ...; 2(n-1)\}$ và không chứa 2 số nào là bội của nhau.

Trong cả bốn trường hợp xảy ra, luôn tồn tại tập hợp X' là một tập con có n phần tử của $\{1; 2; ...; 2(n-1)\}$ và không chứa 2 số nào là bội của nhau. Điều này mâu thuẫn với giả thiết quy nạp, cho nên điều ta giả sử là sai, khẳng định bài toán được chứng minh.

▷ **1.7.4** Hiển nhiên ta có bất đẳng thức

$$p_1 p_2 ... p_n + 1 \geq p_{n+1}.$$

Do đó khi chứng minh quy nạp, ta dễ dàng suy ra được kết luận của bài toán.

▷ **2.2.1** 1) Đồ thị biểu diễn sự quen biết giữa n người với nhau là đồ thị đơn (giữa hai đỉnh có không quá một cạnh) và vô hướng (cạnh không có hướng).

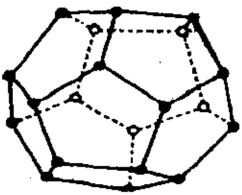
2) Đồ thị biểu diễn đường giao thông nối n thành phố là đồ thị vô hướng nhưng có thể không phải là đồ thị đơn.

3) Đồ thị biểu diễn đường phố và n ngã tư có thể có hướng và có thể không phải đồ thị đơn .

▷ **2.3.1** Tổng các bậc của các đỉnh trong G gấp đôi số cạnh của G vì trong tổng này mỗi cạnh được tính 2 lần.

▷ **2.3.2** Do tổng các bậc của các đỉnh trong G là số chẵn theo bài trên nên số các đỉnh bậc lẻ là số chẵn.

▷ **2.3.3**



Ta xây dựng một đồ thị có các đỉnh là mặt của khối đa diện lồi và hai đỉnh của đồ thị này được nối bởi một cạnh nếu hai mặt tương ứng có chung cạnh.

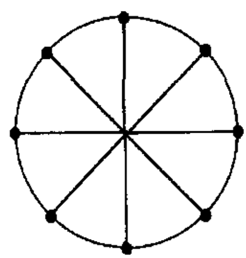
Hình 61

Khi đó theo bài trên số đỉnh lẻ của đồ thị này là số chẵn, nên số mặt có lẻ đỉnh của khối đa diện lồi cho trước là số chẵn (H. 61).

▷ **2.3.4** Giả sử đồ thị có n đỉnh và bậc của chúng là $n-1 \geq a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq 0$. Nếu a_i $(i = 1, 2, ..., n)$ đôi một khác nhau thì ta phải có $a_i = i - 1$ $(i = 1, 2, ..., n)$, vô lí, vì đỉnh có bậc $a_n = n - 1$ phải được nối với tất cả các đỉnh khác và do đó $a_1 \neq 0$.

▷ **2.3.5**

Do số đỉnh bậc lẻ của một đồ thị luôn là số chẵn, cho nên n phải là số chẵn. Nếu đồ thị là đồ thị đều bậc 3 thì $n \geq 4$.

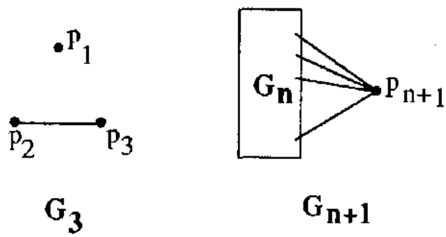


Hình 62

Ngược lại, nếu n chẵn và $n \geq 4$, ta sẽ xây dựng một đồ thị đơn và đều bậc 3 như sau.

Ta lấy n điểm trên một đường tròn. Ta nối các đỉnh đối diện bằng một cạnh. Bằng cách đó ta thu được một đồ thị đều bậc 3 và là đồ thị đơn như hình 62 biểu diễn.

▷ **2.3.6**



Hình 63

Ta xây dựng một dãy các đồ thị G_n thỏa mãn yêu cầu đầu bài như sau (H. 63).

Với $n = 3$, đồ thị G_3 có 3 đỉnh P_1, P_2 và P_3 với một cạnh duy nhất và $G_{n+1} = G_n * \{P_{n+1}\}$ được xây dựng từ G_n bằng cách thêm vào một đỉnh mới P_{n+1} và các cạnh nối nó với tất cả các đỉnh của G_n. Dễ thấy rằng khi đó đồ thị G_n có bậc là

$$0 = d(P_1) < d(P_2) = d(P_3) < d(P_4) < ... < d(P_n) = n - 1,$$

và hiển nhiên thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

▷ **3.1.1** Nếu $P \equiv Q$ thì khẳng định là hiển nhiên. Nếu

$P \neq Q$ thì cạnh mới này và con đường nối P với Q trong cây đã cho sẽ tạo nên chu trình.

Giả sử ta thu được không phải một mà hai chu trình, thì rõ ràng là chúng phải chứa cạnh mới thêm vào. Bằng cách bỏ cạnh mới này đi, thì phần còn lại của hai chu trình này cho ta hai đường khác nhau nối P với Q trong cây đã cho, vô lí.

▷ **3.1.2** Nếu d_1, d_2, ..., d_n là bậc của các đỉnh của của một cây n đỉnh thì $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$, do cây có đúng $n - 1$ cạnh.

Ngược lại, ta chứng minh bằng quy nạp theo n rằng nếu $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$ thì luôn tồn tại một cây có n đỉnh với bậc các đỉnh là d_1, d_2, ..., d_n.

Với $n = 1$ khẳng định hiển nhiên đúng.

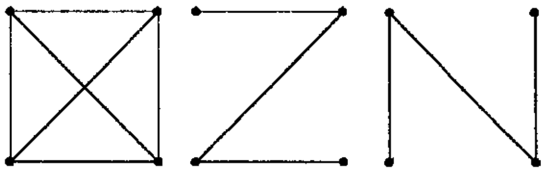
Giả sử với mỗi bộ n số tự nhiên d_1, d_2, ..., d_n luôn tồn tại một cây G_n có n đỉnh sao cho d_1, d_2, ..., d_n là bậc các đỉnh của G_n.

Xét một bộ $n + 1$ số tự nhiên d_1, d_2, ..., d_n, d_{n+1} với $\sum\limits_{i=1}^{n+1} d_i = 2n$. Để tiện chứng minh ta có thể giả sử không mất tính tổng quát rằng $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n \geq d_{n+1}$.

Do $\sum\limits_{i=1}^{n+1} d_i = 2n$, ta có $d_{n+1} = 1$ và $d_1 \geq 2$. Xét dãy

$d_1' = d_1 - 1$, $d_i' = d_i$ ($\forall i \geq 2$). Ta có $\sum_{i=1}^{n} d_i' = 2n - 2$. Theo giả thiết quy nạp tồn tại một cây G_n gồm n đỉnh và có các đỉnh $P_1, \ldots, P_n$ với P_i có bậc là d_i'. Ta thêm vào G_n đỉnh P_{n+1} và cạnh nối P_1 với P_{n+1}. Đồ thị thu được là đồ thị liên thông có $n+1$ đỉnh và n cạnh là một cây. Có thể dễ dàng kiểm tra thấy bậc của đỉnh P_i là d_i.

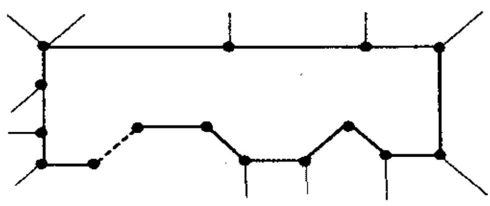
▷ **3.1.3**



Hình 64

Tồn tại. Đồ thị đầy đủ K_4 (H. 64) có hai cây biểu diễn không có cạnh chung.

▷ **3.1.4**

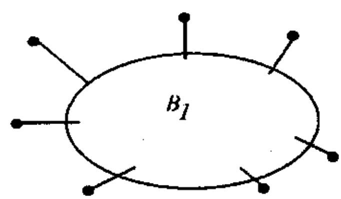


Hình 65

Bằng phương pháp bỏ dần các cạnh nằm trên các chu trình, ta thu được một cây biểu diễn của đồ thị đã cho. Do cây biểu diễn có $n-1$ cạnh và đồ thị ban đầu có l cạnh, cho nên sau $l-n+1$ bước ta thu được cây biểu diễn. Các cạnh được chọn có tính chất là chu trình tùy ý chứa ít nhất một trong các cạnh này (H. 65).

▷ **3.1.5** Giả sử rằng W' là một con đường tùy ý trong G. Ta xét một con đường W^* nhiều cạnh nhất có thể chứa W'. Dễ thấy rằng các đỉnh đầu và cuối của W^* là đỉnh treo. Trong G^* hai con đường W và W^* đều bị xén đi đúng hai đỉnh đầu và cuối của chúng. Từ đó suy ra, phần còn lại của W trong G có số cạnh không ít hơn phần còn lại của W' trong G^*.

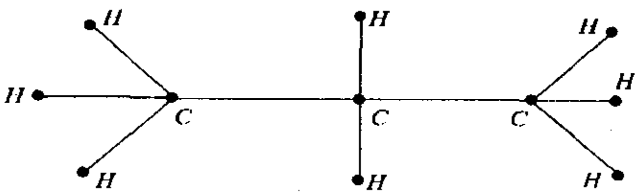
▷ **3.1.6** Từ cây G ban đầu ta bỏ đi tất cả các đỉnh treo của nó để thu được cây mới B_1. Từ cây B_1 ta bỏ đi tất cả đỉnh treo của nó và thu được cây B_2, ... Quá trình kết thúc khi ta thu được cây B_k có một đỉnh duy nhất hoặc một cạnh duy nhất (H. 66).



Hình 66

Theo bài trên, trong mỗi cây mới thu được, một con đường dài nhất vẫn sẽ là con đường dài nhất trong cây mới thu được. Và do đó các con đường có nhiều cạnh nhất sẽ chứa cạnh hoặc đỉnh duy nhất của cây B_k này.

▷ 3.1.7



Hình 67

Đồ thị G biểu diễn công thức hóa học là đồ thị liên thông. Ta chỉ cần chứng tỏ G không có chu trình là đủ (H. 67). Giả sử ngược lại là G có một chu trình C. Do hyđrô chỉ có hóa trị 1, cho nên các đỉnh nằm trên C là các nguyên tử cacbon. Xét cây biểu diễn B của G. Ta có thể thêm các đỉnh mới vào G và nối chúng với các đỉnh của G sao cho các đỉnh của G có bậc như cũ trong G và các đỉnh mới thêm vào chỉ có bậc 1. Khi này đồ thị B^* thu được rõ ràng là một cây, vì nó liên thông và không có chu trình. Bỏ hết đỉnh treo của B^*, ta thu được cây với n đỉnh, là biểu diễn của n nguyên tử cacbon. Tổng hóa trị của nó là $4n$, còn tổng các cạnh của cây này là $2n-2$, cho nên số các đỉnh treo của B^* là $4n-(2n-2) = 2n+2$.

Do G có ít nhất một chu trình, cho nên $\mathcal{B}$ có ít hơn G ít nhất một cạnh, hay là ta phải thêm vào ít nhất một đỉnh mới. Vậy số đỉnh treo ban đầu của G - số các nguyên tử hyđrô - ít hơn $2n+2$, vô lí. Vậy G không có chu trình, tức là một cây.

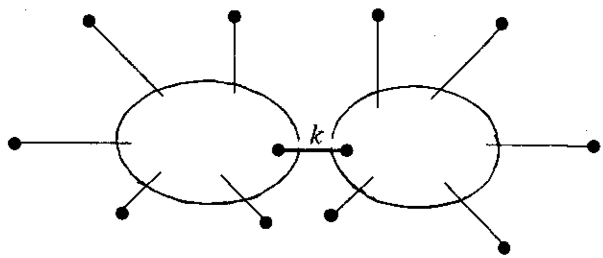
▷ **3.1.8** Dễ thấy khi đó đồ thị là đồ thị đơn, vì khuyên và cạnh kép không thể là cầu. Ngoài ra đồ thị đã cho không có chu trình, vì không có cầu nào nằm trên chu trình cả. Vậy đồ thị cho trước là một cây.

▷ **3.2.1** Do không có chu trình, nên đồ thị đã cho là một bụi. Gọi c là số thành phần của nó thì bụi có $n-c$ cạnh. Suy ra $c=1$ do bụi có $n-1$ cạnh, vậy đồ thị là một cây.

▷ **3.2.2** Áp dụng thuật toán bỏ dần các cạnh nằm trên chu trình để thu được một cây biểu diễn của đồ thị cho trước, ta có nhận xét là trên một chu trình luôn có một cạnh không thuộc bụi B, nếu không B sẽ có một chu trình là điều vô lí. Như vậy khi chọn cạnh nằm trên chu trình để loại đi, ta luôn có thể chọn cạnh không thuộc B, và cây biểu diễn thu được của đồ thị đã cho sẽ chứa B.

▷ **3.2.3** Gọi c là số thành phần liên thông của đồ thị đã cho. Cây biểu diễn của các thành phần liên thông của đồ thị cho trước hợp thành một bụi có n đỉnh, do đó có $n-c$ cạnh. Ta có $l \geq n-c$ và do đó $c \geq n-l$.

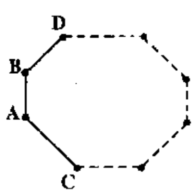
▷ **3.3.1**



Hình 68

Khẳng định của bài toán không chỉ đúng cho cây tối ưu mà còn đúng cho cây tùy ý. Giả sử k là một cầu của đồ thị cho trước thì k là con đường duy nhất nối hai đỉnh của nó. Trong cây biểu diễn B của đồ thị chúng ta biết rằng hai đỉnh này được nối với nhau bởi một con đường W nào đó. Đương nhiên W cũng là con đường nối hai đỉnh của k trong đồ thị cho trước. Suy ra W trùng với k. Vậy k thuộc B (H. 68).

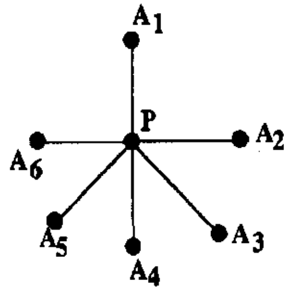
▷ **3.3.2** Trước hết ta chứng tỏ G không có chu trình. Giả sử ngược lại là G có một chu trình $\mathcal{K}$ nào đó.



Không mất tính tổng quát giả sử AB là cạnh có độ dài lớn nhất trong tất cả các cạnh của $\mathcal{K}$. Gọi C và D là hai đỉnh kề với A và B trong số các đỉnh thuộc $\mathcal{K}$.

Hình 69

Ta có $AB > AC$ và $AB > BD$. Theo cách nối các đỉnh của ta: mỗi đỉnh chỉ nối với đỉnh gần nó nhất, thì cạnh AB không thể được nối, vô lí (H.69).

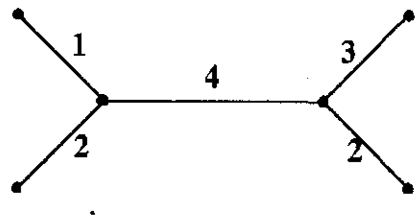


Hình 70

Bây giờ ta chứng minh rằng các đỉnh của đồ thị không có bậc không nhỏ hơn 6. Thực vậy giả sử có P có bậc $d(P) \geq 6$, và 6 láng giềng của P là A_1, A_2, ..., A_6 được bố trí trên mặt phẳng theo chiều kim đồng hồ, không mất tính tổng quát giả sử A_1 là điểm gần P nhất (H. 70).

Như vậy trong các tam giác A_iPA_{i+1} $(i = 2, 3, 4, 5)$ ta có A_iA_{i+1} là cạnh dài nhất, do P là điểm gần với A_i nhất. Trong tam giác A_6PA_1 và A_1PA_2 cạnh A_6A_1 và A_1A_2 cũng là cạnh dài nhất, do $A_6P < A_6A_1$ và $A_1P < A_6P$ (A_1 gần P nhất), và cũng tương tự như vậy là $A_2P < A_2A_1$ và $A_1P < A_2P$. Do đó, $A_i\widehat{PA}_{i+1} > 60°$. Ta có tổng các góc quanh P lớn hơn 360°, là điều không thể xảy ra.

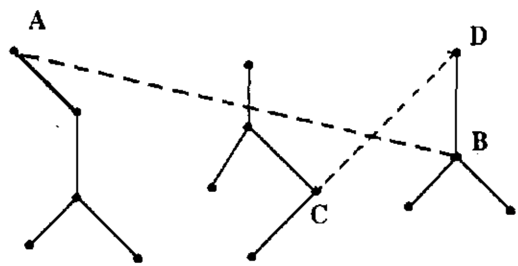
▷ **3.3.3**



Hình 71

Bằng thuật toán xác định cây tối ưu chúng ta có thể nhanh chóng xác định được một cây tối ưu (H. 71).

▷ **3.3.4** Ta phải chứng minh rằng cây biểu diễn tối ưu của đồ thị K_n không có hai cạnh nào cắt nhau.



Hình 72

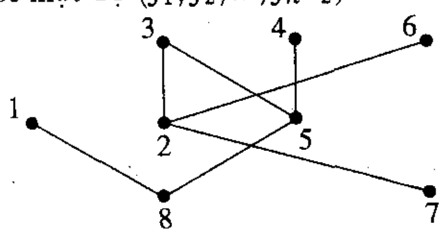
Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử ngược lại rằng cây biểu diễn tối ưu $\mathcal{B}$ có hai cạnh AB cắt CD (H. 72). Bỏ AB, $\mathcal{B} - \{AB\}$ có hai thành phần liên thông, và sau khi bỏ

CD, đồ thị $\mathcal{B}-\{AB, CD\}$ có ba thành phần liên thông. Theo nguyên lí Dirichlet thì hai trong bốn đỉnh A, B, C, D, không mất tính tổng quát giả sử là B và D, thuộc cùng một thành phần liên thông. Khi đó $\mathcal{B}^* = \mathcal{B} - \{AB, CD\} \cup \{AD, BC\}$ là đồ thị liên thông.

Do $\mathcal{B}^*$ là đồ thị liên thông có n đỉnh và đúng $n-1$ cạnh, cho nên $\mathcal{B}^*$ là một cây. Mặt khác do AB cắt CD cho nên $AB + CD > AD + BC$, $\mathcal{B}^*$ có độ dài nhỏ hơn B, trái với giả thiết B là cây tối ưu.

▷ **3.3.5** Ta chứng minh có đúng n^{n-2} cây khác nhau với các đỉnh 1, 2, ..., n. Do bài toán hiển nhiên đúng cho trường hợp $n = 1$ và $n = 2$, cho nên ta chứng minh cho $n \geq 3$.

Trước hết ta chỉ ra một cách tương ứng một cây có n đỉnh như vậy với một bộ $(j_1, j_2, ..., j_{n-2})$.



Hình 73

Trong cây đã cho luôn có đỉnh treo. Trong tất cả đỉnh treo, chọn đỉnh có chỉ số nhỏ nhất, kí hiệu là i_1 và cạnh duy nhất kề nó là (i_1, j_1). Bỏ đỉnh i_1 và ta lại tìm tất cả đỉnh treo của cây mới tạo thành một đỉnh treo có chỉ số i_2 nhỏ nhất và cạnh (i_2, j_2) của nó. Trong bước k ta có đỉnh treo i_k với chỉ số i_k nhỏ nhất và cạnh (i_k, j_k) nối nó. Cứ thế, sau $n-2$ bước ta thu được bộ $(j_1, ..., j_{n-2})$ và một cây có đúng một cạnh.

Chẳng hạn cây có 8 đỉnh trong hình 73 được cho tương ứng với bộ $(8, 5, 2, 7, 3, 5)$.

Theo cách tương ứng này, bộ $(j_1, j_2, ..., j_{n-2})$ được xác định duy nhất. Để thấy phép ứng một cây với một bộ $(j_1, j_2, ..., j_{n-2})$ là phép song ánh, từ bộ $(j_1, j_2, ..., j_{n-2})$ cho trước ta xây dựng cây tương ứng với nó.

Cho trước bộ $(j_1, j_2, ..., j_{n-2})$. Rõ ràng chỉ số i_1 không thuộc $\{j_1; j_2; ...; j_{n-2}\}$ và là số nhỏ nhất trong tập

$$\{1; 2; ...; n\} - \{j_1; j_2; ...; j_{n-2}\},$$

do số k nào đó nhỏ hơn nó và được gắn với 2 đỉnh treo chỉ số $a_1 < a_2$ sẽ được lấy vào trong bộ $\{j_1; j_2; ...; j_{n-2}\}$. Như vậy

$$i_1 = \min\{1; 2; ...; n\} - \{j_1; j_2; ...; j_{n-2}\}.$$

Tương tự như vậy

$$i_2 = \min\{1; 2; ...; n\} - \{i_1; j_2; ...; j_{n-2}\}.$$

Và cho mọi $t \leq n-2$ ta có

$$i_t = \min\{1; 2; ...; n\} - \{i_1; i_2; ...; i_{t-1}; j_t; ...; j_{n-2}\}.$$

Cây của ta sẽ phải có các đỉnh 1, 2, ..., n và các cạnh (i_1, j_1), (i_2, j_2), ..., (i_{n-2}, j_{n-2}) và cạnh (i_{n-1}, i_n), ở đây i_{n-1} và i_n là hai đỉnh duy nhất của tập $\{1; 2; ...; n\} - \{i_1; i_2; ...; i_{n-2}\}$.

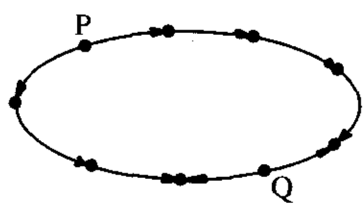
Đồ thị G thu được theo cách xây dựng này là đồ thị đơn có n đỉnh và $n-1$ cạnh. Để chứng minh rằng G là một cây, ta chỉ cần chứng minh nó không có chu trình là đủ.

Giả sử ngược lại là G có một chu trình $\mathcal{K}$. Ta thêm chiều mỗi cạnh theo chiều (i_t, j_t), và (i_{n-1}, i_n), và thu được từ G một đồ thị có hướng. Ta dễ dàng thấy:

a) Mỗi đỉnh là đỉnh xuất phát của nhiều nhất là một cạnh. Đỉnh i_n không là đỉnh xuất phát của cạnh nào cả.

b) Không có đỉnh cuối của cạnh nào là đỉnh đầu của cạnh đã có trước đó.

Bây giờ giả sử G có một chu trình $\mathcal{K}$ và giả sử trong quá trình xây dựng G, k^* là cạnh đầu tiên làm đồ thị thu được có chu trình. Như vậy đỉnh cuối P của k^* là đỉnh của cạnh k' được xác định trước đó nằm trên $\mathcal{K}$.

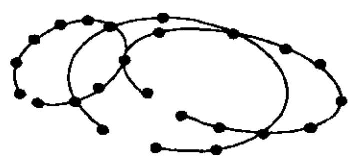


Hình 74

Theo b), đỉnh P là đỉnh cuối của k'. $\mathcal{K}$ có hai cạnh k^* và k' có đỉnh cuối chung thì phải có hai cạnh nào đó có chung đỉnh xuất phát Q (H. 74), mâu thuẫn với a). Mâu thuẫn này chứng tỏ G không có chu trình và do đó G là một cây.

Vậy, cách xây dựng $(j_1, j_2, ..., j_{n-2})$ cho ta một song ánh từ tập hợp các cây có n đỉnh vào tập các bộ $(j_1, j_2, ..., j_{n-2})$. Do có n^{n-2} bộ khác nhau, nên có n^{n-2} cây khác nhau có n đỉnh.

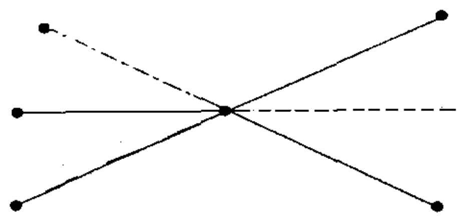
▷ **4.2.1** Giả sử đồ thị liên thông G có không quá $2k$ đỉnh lẻ. Ta biết rằng đồ thị có một số chẵn các đỉnh mà ta gọi là $2l \leq 2k$ đỉnh. Khi đó ta có thể thêm l cặp cạnh mới bằng cách chia $2l$ đỉnh này thành l cặp và nối từng cặp lại với nhau. Đồ thị liên thông nhận được theo cách này không có đỉnh bậc lẻ, và theo định lí đã chứng minh thì nó có một đường Euler khép kín. Khi bỏ đi các cạnh được thêm vào, ta thu được đúng l đường một nét Euler mở phủ tất cả các cạnh của đồ thị.



Hình 75

Đảo lại, nếu như có thể vẽ G bởi k đường một nét, thì ta có thể thấy dễ dàng rằng tất cả các đỉnh khác với đỉnh đầu hoặc cuối của các đường một nét này có bậc là chẵn, và G có không quá $2k$ đỉnh bậc lẻ (H. 75).

▷ **4.2.2**



Hình 76

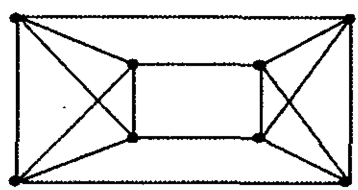
Dễ thấy rằng nếu tồn tại một đường một nét Euler thỏa mãn điều kiện của bài toán, thì với mỗi đỉnh P và một cạnh màu i ta luôn tìm được một cạnh khác màu i một cách tương ứng 1-1 tại đỉnh P, cho nên hiển nhiên thỏa mãn điều kiện $d_i(P) \leq \frac{1}{2}d(P)$. Theo định lí về sự tồn tại đường Euler khép kín, tồn tại một đường Euler khép kín trong đồ thị G đã cho. Dọc theo đường một nét Euler cho trước, ta gọi một vị trí hỏng là một đỉnh sao cho khi đi qua đỉnh này, cạnh đi vào và cạnh đi ra tại đỉnh đó cùng màu với nhau (H. 76).

Áp dụng phương pháp tương tự như trong chứng minh của định lí về điều kiện cần và đủ cho sự tồn tại đường Euler khép kín. Ta xét đường Euler khép kín sao cho khi đi dọc theo đường một nét Euler này, có ít vị trí hỏng nhất so với các đường một nét Euler khác của đồ thị. Từ điều kiện của đầu bài

$$d_i(P) \leq \frac{1}{2}d(P),$$

cho mọi màu i và mọi đỉnh P của đồ thị, ta dễ dàng thiết kế một đường một nét Euler khác sao cho số vị trí hỏng ít hơn ít nhất là 1, mâu thuẫn với giả thiết đường Euler ta xét có ít vị trí hỏng nhất.

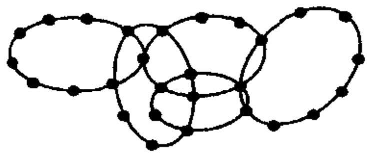
▷ **4.2.3** Nếu ta có thể tô màu các cạnh của một đồ thị liên thông G bởi hai màu xanh đỏ sao cho số cạnh đỏ và số cạnh xanh xuất phát tại mỗi đỉnh của đồ thị luôn bằng nhau thì bậc của mỗi đỉnh là số chẵn (số cạnh xanh và số cạnh đỏ tại đỉnh đó bằng nhau), và đồ thị có chẵn cạnh (số cạnh xanh và số cạnh đỏ của đồ thị bằng nhau).



Hình 77

Đảo lại, giả sử đồ thị liên thông G của ta có chẵn cạnh và bậc của các đỉnh là số chẵn, thì đồ thị G có một đường một nét Euler khép kín H nào đó. Do G có chẵn cạnh, cho nên H có chẵn cạnh, và ta có thể tô màu các cạnh của H bằng hai màu xanh đỏ sao cho hai cạnh liên tiếp nhau trên H thì khác màu nhau. Khi đó cạnh đi ra và cạnh đi vào dọc theo H tại mỗi đỉnh khác màu nhau và do đó số cạnh màu xanh và màu đỏ tại mỗi đỉnh của đồ thị G bằng nhau (H. 77).

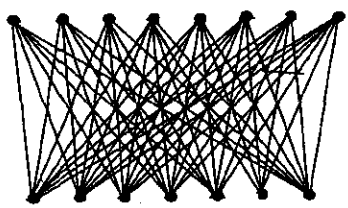
▷ 4.2.4



Hình 78

Giả sử G có một đường một nét Euler khép kín. Khi đó ta có thể đi dọc con đường một nét này cho đến khi gặp lại một đỉnh đã đi qua. Bằng cách đó ta thu được các chu trình, và chia đường một nét khép kín của ta thành các chu trình không có cạnh chung. Khi đó rõ ràng mỗi cạnh của đồ thị nằm trên đúng một chu trình này (H. 78).

▷ 4.3.1



Hình 79 ($K_{\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}}$ với $n = 15$.)

Ta chứng tỏ các điều kiện được nêu trong định lí Pósa cho sự tồn tại chu trình Hamilton là không thể làm tốt hơn được nữa.

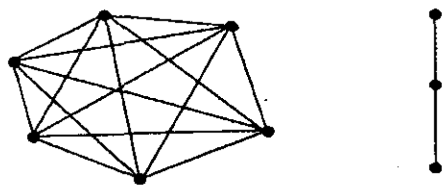
Cho trước n và một số $k < \frac{n-1}{2}$ ta sẽ chỉ ra một đồ thị G có n đỉnh và có k đỉnh có bậc không lớn hơn k và G không có chu trình Hamilton. Thật vậy, ta xét G_1 và G_2 là hai đồ thị đầy đủ có $k+1$ và $n-k$ đỉnh và ta ghép chúng lại có cùng một đỉnh chung. Đồ thị G thu được có đúng n đỉnh, bậc thấp nhất là k và có đúng k đỉnh có bậc k. Rõ ràng G không có chu trình Hamilton do G không phải là đồ thị 2-liên thông.

Bây giờ xét một số n lẻ. Đồ thị lưỡng phân đầy đủ $K_{\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}}$ có $\frac{n-1}{2}$ đỉnh có bậc $\frac{n-1}{2}$ (H. 79). Đồ thị này không có chu trình Hamilton. Giả sử đồ thị lưỡng phân này có chu trình Hamilton C. Khi đi dọc theo C, ta lần lượt đi từ các đỉnh của lớp này tới các đỉnh lớp kia theo thứ tự luân phiên và trở về đỉnh đầu tiên. Do vậy dễ thấy số đỉnh của hai lớp phải bằng nhau là điều không thể thỏa mãn được, do một lớp của $K_{\frac{n-1}{2}\frac{n+1}{2}}$ có $\frac{n-1}{2}$ đỉnh và lớp kia có $\frac{n+1}{2}$ đỉnh.

▷ **4.3.2** Hiển nhiên mỗi đồ thị k-liên thông có bậc nhỏ nhất không nhỏ hơn k. Áp dụng định lí đã chứng minh, ta có kết quả đầu bài yêu cầu.

▷ **4.3.3** Hiển nhiên rằng nếu một đồ thị đơn G thỏa mãn giả thiết của định lí Dirac thì cũng thỏa mãn giả thiết của định lí Pósa, vì số đỉnh có bậc không lớn hơn $\frac{n-1}{2}$ là 0.

▷ **4.3.4** Dễ dàng chỉ ra rằng nếu một đồ thị đơn G thỏa mãn giả thiết của định lí Ore thì cũng thỏa mãn giả thiết của định lí Pósa (H. 80).

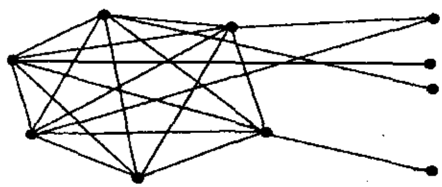


Hình 80

Nếu n là số lẻ và có không ít hơn $\frac{n+1}{2}$ đỉnh có bậc không vượt quá $\frac{n-1}{2}$, thì tất cả các đỉnh này phải đôi một kề nhau do tổng bậc của hai trong chúng không vượt quá $n-1$. Và do đó bậc của mỗi đỉnh này ít nhất không nhỏ hơn $\frac{n-1}{2}$, cho nên đẳng thức phải xảy ra và mỗi đỉnh còn lại không nằm trong số các đỉnh này sẽ không kề với một trong các đỉnh này. Các đỉnh còn lại có bậc không vượt quá $\frac{n-1}{2}$ là điều vô lí.

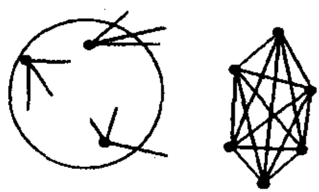
Bây giờ ta xét một số $k < \frac{n-1}{2}$. Nếu có k đỉnh có bậc không vượt quá k, thì chúng phải đôi một kề nhau do tổng các bậc của hai đỉnh trong chúng không vượt quá $2k \leq n-1$, và do đó bậc của mỗi đỉnh này không nhỏ hơn $k-1$, nghĩa là mỗi một đỉnh trong chúng kề với nhiều lắm với một đỉnh có bậc lớn hơn k (H. 81).

Do đó trong $n-k > k$ đỉnh còn lại, phải có một đỉnh không kề với tất cả các đỉnh có bậc không vượt quá k này và do đó bậc của nó không vượt quá $n - k - 1$, mâu thuẫn với giả thiết đầu bài là tổng bậc của nó và của một đỉnh tùy ý trong các đỉnh có bậc không vượt quá k không nhỏ hơn n.



Hình 81

▷ **4.3.5** Hãy chỉ ra rằng giả thiết của định lí Pósa được thỏa mãn nếu đồ thị G có ít nhất $\binom{n-1}{2} + 2$ cạnh (H. 82).



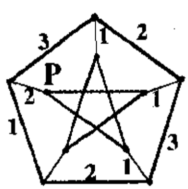
Hình 82

Thật vậy, nếu G không thỏa mãn giả thiết của định lí Pósa thì tồn tại $k < \frac{n-1}{2}$ sao cho G có k đỉnh có bậc không vượt quá $k < \frac{n-1}{2}$. Khi đó số các cạnh kề với ít nhất một trong các đỉnh này không vượt quá k^2 và số các cạnh không kề với đỉnh nào trong các đỉnh này không vượt quá $\binom{n-k}{2}$, suy ra tổng số các cạnh không vượt quá $k^2 + \binom{n-k}{2}$ cạnh. Một đánh giá đơn giản cho ta thấy số này không vượt quá $\binom{n-1}{2} + 1$, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu của bài toán.

Đồ thị G sinh ra bởi đồ thị đầy đủ có $n-1$ đỉnh K_{n-1} bằng cách thêm vào một đỉnh mới và một cạnh nối đỉnh này với một đỉnh của K_{n-1}. Khi đó G có đúng $\binom{n-1}{2} + 1$ cạnh và không có chu trình Hamilton.

▷ **5.1.1** Đồ thị Petersen không phân tích được thành các thành tố bậc 2, vì sau khi bỏ đi một thành tố bậc 2, bậc của đồ thị thu được đúng bằng 1.

Để chứng minh rằng đồ thị Petersen không phân tích được thành tích của 3 thành tố bậc nhất, ta giả sử ngược lại, rằng đồ thị Petersen có thể phân tích được thành 3 thành tố bậc nhất.



Hình 83

Ta tiến hành tô màu các cạnh của thành tố thứ nhất bởi màu đỏ (trên hình 83 được đánh số 1) , các cạnh của thành tố thứ hai bởi màu xanh (được đánh dấu bởi số 2) và các cạnh của thành tố thứ ba bởi màu vàng như sau:

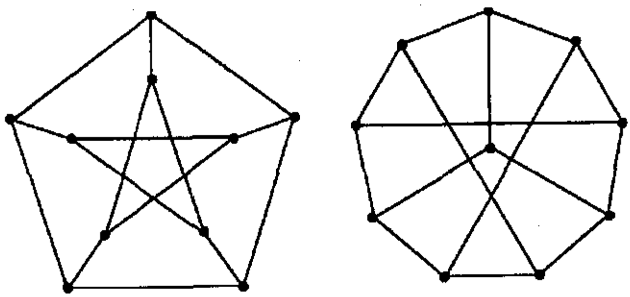
Xuất phát từ các cạnh của chu trình độ dài 5 của đồ thị (H. 83). Do trên chu trình cạnh 5 không thể có 3 cạnh cùng màu, cho nên chúng được tô đủ 3 màu. Trong số ba màu này chỉ có đúng một màu tô 1 cạnh của chu trình, giả sử đó là màu đỏ, và hai màu còn lại tô đúng 2 cạnh của đồ thị một cách đan màu nhau. Trong số các cạnh còn chưa được tô màu có 5 cạnh kề với một đỉnh của chu trình. Ta sẽ phải tô 3 cạnh kề với những đỉnh của chu trình không nằm trên cạnh đỏ bằng màu đỏ. Hai cạnh còn lại tất nhiên không thể tô đỏ, do chúng kề với cạnh đỏ của chu trình. Xét P là đỉnh không nằm trên chu trình của một trong hai cạnh còn lại này, và giả sử không mất tính tổng quát rằng cạnh nối P với chu trình được tô màu xanh (trên hình 83 được ghi 2). Hai cạnh kề với P không nối tới chu trình đều kề với cạnh đỏ, nên không thể tô màu đỏ và màu xanh (của cạnh nối P với chu trình), nên phải tô cùng bởi một màu còn lại là màu 3), là điều vô lí.

▷ **5.1.2** Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề: *Cho trước một đồ thị đều bậc 3 có thể phân tích thành một thành tố bậc 1 và một thành tố bậc 2. Ta tô màu các cạnh thuộc thành tố bậc 1 màu đỏ và các cạnh thuộc thành tố bậc 2 màu xanh. Khi đó tồn tại một chu trình có các cạnh đan màu.*

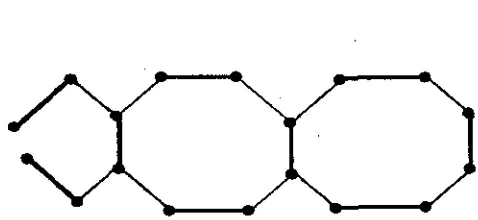
Ta biến đồ thị đã cho thành đồ thị không có đỉnh lẻ, và tại mỗi đỉnh số cạnh xanh bằng số cạnh đỏ bằng cách nối thêm đỉnh đầu và đỉnh cuối của mỗi cạnh đỏ bởi một cạnh màu đỏ.

Khi đó theo bài tập đã biết, ta có thể vẽ đồ thị bằng một đường một nét Euler khép kín sao cho các cạnh trên đường một nét này đan màu. Xuất phát từ một đỉnh, và đi theo đường một nét khép kín này cho đến khi ta trở về đỉnh nào đó đã đi qua. Lúc này ta thu được một chu trình có các cạnh đan màu mà không có cạnh nào lặp hai lần.



Hình 84

Thay vào các cạnh đã thêm vào đồ thị trên chu trình (nếu có) bởi các cạnh tương ứng của đồ thị, và ta thu được chu trình như đầu bài yêu cầu (H. 84).

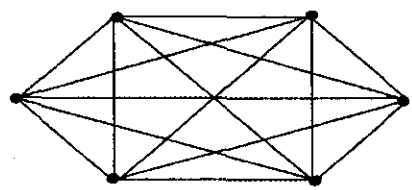


Hình 85

Áp dụng bổ đề trên, ta có một chu trình có các cạnh đan màu. Rõ ràng nếu đổi màu đỏ cho màu xanh như đầu bài yêu cầu thì các cạnh mới của ta đôi một không kề nhau, và chúng bằng số cạnh của thành tố bậc nhất ban đầu, cho nên mỗi đỉnh của đồ thị kề với ít nhất một cạnh đỏ. Vậy các cạnh đỏ mới lại là một thành tố bậc nhất.

Nếu bỏ đi các cạnh đỏ mới này, thì đồ thị thu được chỉ có các cạnh xanh và mỗi đỉnh có bậc đúng bằng 2. Rõ ràng các cạnh xanh này lập thành một thành tố bậc hai của đồ thị đã cho (H. 85).

▷ **5.1.3**

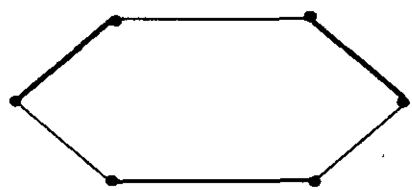


Hình 86

Ta lập một đồ thị đầy đủ có 6 đỉnh, mỗi đỉnh của đồ thị biểu thị cho một con gà. Như vậy bài toán trở thành xác định số các thành tố bậc nhất nhiều nhất có thể đôi một không có cạnh chung của đồ thị đầy đủ K_6 đã cho (H. 86).

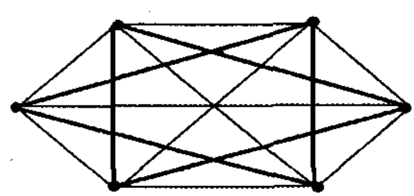
a) Sau 2 ngày nhốt gà, tương ứng với 2 thành tố bậc nhất không có cạnh chung của đồ thị đầy đủ 6 đỉnh K_6 đã cho. Sau khi bỏ đi các cạnh của hai thành tố bậc nhất này ta thu được một đồ thị G mà bậc của mỗi đỉnh là 3.

Theo định lí Dirac về sự tồn tại của chu trình Hamilton, đồ thị G có một chu trình Hamilton và rõ ràng các cạnh không kề nhau của chu trình Hamilton này lập thành một thành tố bậc nhất (H. 87). Như vậy ta nhốt gà được thêm một ngày nữa.



Hình 87

b) Có một cách nhốt để sau 3 ngày ta không còn có thể nhốt các con gà theo điều kiện như vậy. Trong đồ thị K_6 chọn hai tam giác không có đỉnh chung (H. 88).



Hình 88

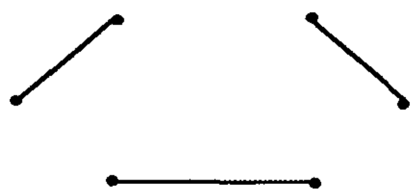
Bỏ đi 6 cạnh của hai tam giác này, ta có một đồ thị G có một chu trình Hamilton và 3 đường chéo nối các cặp đỉnh đối diện của chu trình Hamilton này với nhau.

Dễ thấy rằng đồ thị G là tích của 3 thành tố bậc nhất. Như vậy trong K_6 có 3 thành tố bậc nhất mà sau khi bỏ các cạnh của nó đi thì đồ thị thu được là hai tam giác rời nhau và rõ ràng nó không thể phân tích được thành tích của hai thành tố bậc nhất.

Cách nhốt các con gà tương ứng với 3 thành tố bậc nhất này chỉ kéo dài được đúng 3 ngày mà thôi.

c) Dễ thấy tồn tại cách nhốt kéo dài 5 ngày.

d)



Hình 89

Rõ ràng là không có cách nào nhốt các con gà kéo dài đúng 4 ngày. Bởi vì nếu bỏ các cạnh của 4 thành tố bậc nhất tương ứng trên đồ thị biểu diễn K_6, ta thu được một đồ thị mà bậc của mỗi đỉnh đúng bằng 1. Rõ ràng là các cạnh của đồ thị này là một thành tố bậc nhất, và tương ứng với nó là cách nhốt gà trong ngày thứ năm (H. 89).

▷ **5.1.4** Câu trả lời là có. Trước tiên ta có đồ thị biểu diễn là đồ thị mà mỗi đỉnh tương ứng với một ngoại ngữ, còn cạnh nối hai đỉnh là cạnh biểu diễn cho người phiên dịch biết hai ngoại ngữ này.

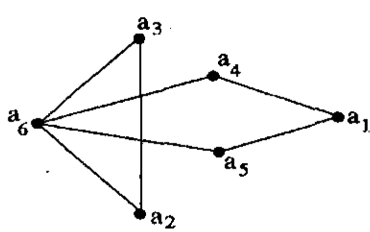
Bằng cách biểu diễn này ta thu được đồ thị có 6 đỉnh và 7 cạnh và bậc của mỗi đỉnh ít nhất là hai. Ta phải chứng tỏ rằng đồ thị thu được có một thành tố bậc nhất.

Kí hiệu a_i là bậc của đỉnh thứ i và giả sử không mất tính tổng quát rằng

$$2 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq a_6.$$

Do $\sum a_i = 14$, cho nên có hai trường hợp xảy ra tương ứng với $a_6 = 4$, $a_i = 2$ cho mọi $i \leq 5$ hoặc là $a_6 = a_5 = 3$ và $a_i = 2$ cho mọi $i \leq 4$.

a) Trường hợp $a_6 = 4$, $a_i = 2$ cho mọi $i \leq 5$ (H. 90).



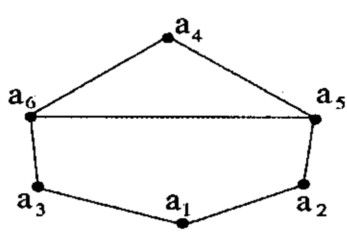
Hình 90

Không mất tính tổng quát giả sử rằng các đỉnh kề với đỉnh a_6 là a_5, a_4, a_3 và a_2 còn a_1 kề với a_5 và a_4. Khi đó hai đỉnh còn lại a_2 và a_3 phải kề với nhau. Khi đó các cạnh (a_1, a_5), (a_6, a_4) và (a_3, a_2) lập thành một thành tố bậc nhất.

b) Trường hợp $a_6 = a_5 = 3$ và $a_i = 2$ cho mọi $i \leq 4$ (H. 91). Nếu tập láng giềng của đỉnh a_6 và đỉnh a_5 không có đỉnh chung thì đỉnh a_6 và đỉnh a_5 phải kề nhau, nếu không số đỉnh của đồ thị sẽ không nhỏ hơn $3 + 3 + 2 = 8$, vô lí. Nhưng tập láng giềng của đỉnh a_6 và đỉnh a_5 không thể trùng nhau được. Trong trường hợp ngược lại, nếu chúng trùng nhau thì hai đỉnh còn lại chỉ có thể kề với nhau và bậc của chúng chỉ có thể là 1 mà thôi. Tùy theo số đỉnh chung của hai tập láng giềng này là 1 hay là 2 mà ta có ba trường hợp sau đây:

b_1) Tập láng giềng của đỉnh a_6 và đỉnh a_5 có chung nhau đúng một đỉnh, giả sử không mất tính tổng quát là đỉnh a_4.

Trong trường hợp này đỉnh a_6 và đỉnh a_5 phải kề nhau, nếu không tổng số đỉnh của ta là 7, vô lí.



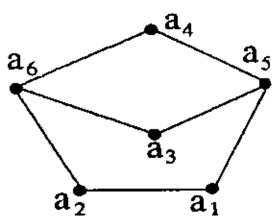
Hình 91

Gọi đỉnh a_3 và đỉnh a_2 là hai láng giềng riêng của đỉnh a_5 và đỉnh a_6, đỉnh a_6 kề với đỉnh a_3 và đỉnh a_5 kề với đỉnh a_2. Đỉnh còn lại đỉnh a_1 phải kề với đỉnh a_3 và đỉnh a_2, do bậc của đỉnh a_3, a_2 và đỉnh a_1 là 2 (H. 91). Tập cạnh (a_6, a_3),

(a_4, a_5) và (a_2, a_1) lập thành một thành tố bậc nhất của đồ thị đã cho.

b_2) Tập láng giềng của đỉnh a_6 và đỉnh a_5 có chung nhau đúng hai đỉnh, gọi là đỉnh a_4 và đỉnh a_3 (H. 92).

Khi đó đỉnh a_6 và đỉnh a_5 không thể kề nhau được, nếu không hai đỉnh còn lại chỉ có thể nối với nhau do $a_6 = a_5 = 3$ và $a_4 = a_3 = 2$, và bậc của chúng chỉ có thể là 1, vô lí.

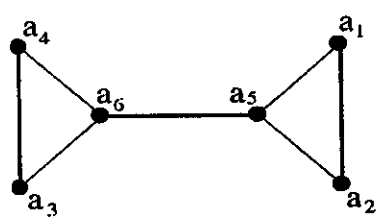


Hình 92

Như vậy hai láng giềng riêng của đỉnh a_6 và a_5 là a_2 và a_1. Do bậc của chúng là 2, cho nên chúng phải được nối với nhau bởi một cạnh.

Tập cạnh $(a_6, a_4), (a_5, a_3), (a_2, a_1)$ lập thành một thành tố bậc nhất.

b_3) Tập láng giềng của a_6 và a_5 không trùng nhau.



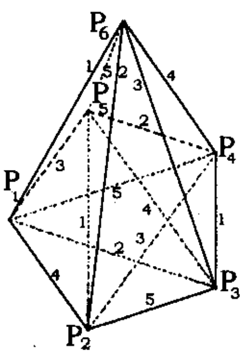
Hình 93

Trong trường hợp này, đỉnh a_6 và đỉnh a_5 phải kề với nhau, nếu không số đỉnh của đồ thị sẽ là không nhỏ hơn $3+3+2=8$, vô lí. Gọi láng giềng của a_6 là a_3 và a_4, còn láng giềng của a_5 là a_1 và a_2. Chỉ có thể xảy ra hai trường hợp là hoặc a_4 kề với a_3 và a_1 kề với a_2, hoặc a_4 không kề với a_3 và a_1 không kề với a_2. Trong cả hai trường hợp đều dễ dàng xác định được thành tố bậc nhất. Chẳng hạn khi đồ thị biểu diễn có thể như hình 93, ta có 3 cạnh tô đậm tạo thành một thành tố bậc nhất. Tóm lại, luôn tìm được 3 người phiên dịch cho 6 ngoại ngữ đã cho.

▷ **5.1.5**

a) Rõ ràng chỉ có thể nhốt mỗi con không quá 1999 ngày.

b) Có một cách nhốt kéo dài 1999 ngày.



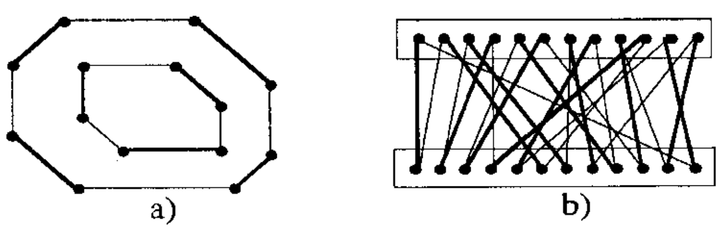
Hình 94

Để chứng minh khẳng định của ta, ta áp dụng phương pháp hình học như sau. Trước hết ta biểu diễn $2n-1$ đỉnh của đồ thị đầy đủ K_{2n} thành $2n-1$ đỉnh P_1, P_2, ..., P_{2n-1} của một $(2n-1)$-giác đều. Còn đỉnh P_{2n} là đỉnh của hình chóp đều nhận $P_1 ... P_{2n-1}$ làm đáy.

Bây giờ ta chọn một cạnh đáy bất kì và chọn tất cả các đường chéo song song với nó (H. 94). Sau đó ta chọn thêm cạnh bên nối đỉnh còn lại không nằm trên cạnh hoặc đường chéo được chọn nào với đỉnh của hình chóp. Cạnh và các đường chéo cùng với cạnh bên được chọn đôi một không có đỉnh chung và là một thành tố bậc 1 của đồ thị đầy đủ K_{2n} của ta. Như vậy, ứng với $2n-1$ cạnh của đa giác đều $P_1P_2...P_{2n-1}$ là $2n-1$ thành tố bậc 1 đôi một không có cạnh chung. Trong hình 94 ta đánh số các cạnh của đồ thị cùng thuộc một thành tố bởi cùng một số.

Tóm lại là tồn tại một cách nhốt 2000 con gà trong vòng 1999 ngày thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

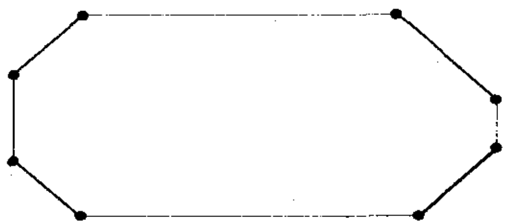
▷ **5.3.1** Nếu đồ thị phân tích được thành hai thành tố bậc nhất thì ta tô màu các cạnh của thành tố thứ nhất bởi màu đỏ và các cạnh của thành tố thứ hai bởi màu xanh. Khi đó rõ ràng mọi chu trình của đồ thị có số chẵn cạnh, vì các cạnh xanh và đỏ đan màu nhau trên chu trình này. Theo định lí thì đồ thị phải là đồ thị lưỡng phân. Ngoài ra cũng dễ thấy đồ thị phải là đồ thị đều bậc 2 (H. 95a).



Hình 95

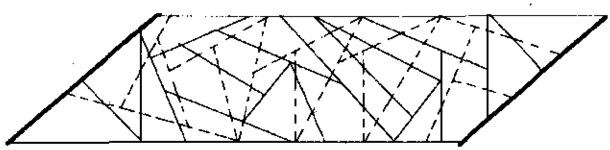
Đảo lại, đồ thị đã cho là đồ thị lưỡng phân đều bậc 2, thì theo định lí König, chúng có một thành tố bậc nhất. Lấy các cạnh thuộc thành tố bậc nhất này khỏi đồ thị thì các cạnh còn lại của chúng rõ ràng lập thành một thành tố bậc nhất thứ hai (H. 95b).

▷ **5.3.2** Nếu chu trình Hamilton là $P_1P_2...P_{2k}$ thì các cạnh P_iP_{i+1} $(i = 1, 2, ..., k)$ là một thành tố bậc nhất (H. 96). Chú ý rằng điều này chỉ đúng với chu trình Hamilton có số chẵn cạnh.



Hình 96

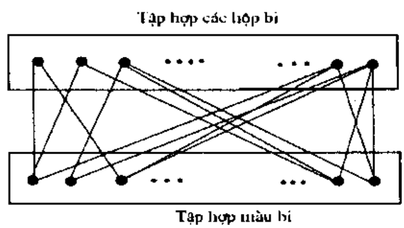
▷ **5.3.3**



Hình 97

Rõ ràng là k phần tùy ý ở mặt trước của tờ giấy luôn có *"điểm chung"* với ít nhất k phần ở mặt sau vì diện tích của các phần bằng nhau. Từ đó suy ra tồn tại một song ánh từ các phần của diện tích có màu với các phần ở mặt sau trang giấy theo quy tắc có *"điểm chung"*. Điều này suy được nhờ thiết lập đồ thị lưỡng phân có tập đỉnh thứ nhất là các phần ở mặt trước và tập đỉnh thứ hai là tập các phần ở mặt thứ hai trang giấy. Tập cạnh được thiết lập theo tương ứng nối hai đỉnh bởi một cạnh nếu hai phần tương ứng có điểm chung. Đồ thị lưỡng phân này thỏa mãn điều kiện của định lí König, được chứng minh ở mục 5.3, rằng k đỉnh bất kì ở một lớp phải kề với ít nhất k đỉnh ở tập thứ hai, và do đó nó có một thành tố bậc nhất (H. 97).

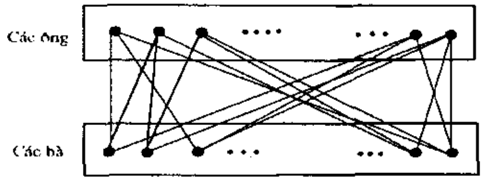
▷ **5.3.4**



Hình 98

Ta thiết lập đồ thị lưỡng phân $G = (X, Y; E)$ với X là tập hợp các hộp và Y là tập hợp màu. Một đỉnh $x \in X$ được nối với đỉnh $y \in Y$ khi hộp tương ứng có chứa bi màu y. Dễ chứng minh rằng đồ thị lưỡng phân này thỏa mãn điều kiện của định lí König, được chứng minh ở mục 5.3, rằng k đỉnh bất kì ở một lớp kề với ít nhất k đỉnh ở tập thứ hai, và do đó nó có một thành tố bậc nhất (H. 98).

▷ **5.3.5**



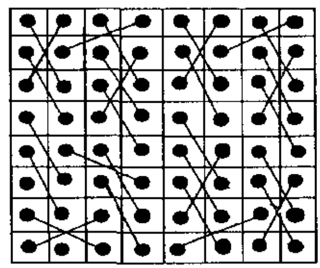
Hình 99

Ta thiết lập đồ thị lưỡng phân $G = (X, Y; E)$ với X là tập hợp các ông và Y là tập hợp các bà. Một đỉnh $x \in X$ được nối với đỉnh $y \in Y$ khi ông x tương ứng quen bà y. Dễ chứng minh rằng đồ thị lưỡng phân này thỏa mãn điều kiện của định lí König, được chứng minh ở mục 5.3, rằng mỗi đỉnh bất kì ở một lớp thì kề với đúng k đỉnh ở tập thứ hai, và do đó nó có một thành tố bậc nhất (H. 99).

▷ **5.3.6** Đồ thị được tạo bởi đỉnh và cạnh của 2000-giác đều có một thành tố bậc nhất. Ta tô đỏ các cạnh của thành tố bậc nhất này. Người B thắng với chiến thuật sau: B sẽ luôn lấy đi các viên đá ở đỉnh cùng một cạnh đỏ (thuộc thành tố bậc nhất này) với các viên đá mà A lấy (trong trường hợp không chỉ có 1 viên như vậy, thì B lấy đi thêm hai viên ở đỉnh đầu và cuối của một cạnh đỏ). Như vậy đồ thị thu được vẫn có một thành tố bậc nhất, và do đó B sẽ thắng, vì hai viên còn lại sẽ nằm cạnh nhau.

▷ 5.3.7

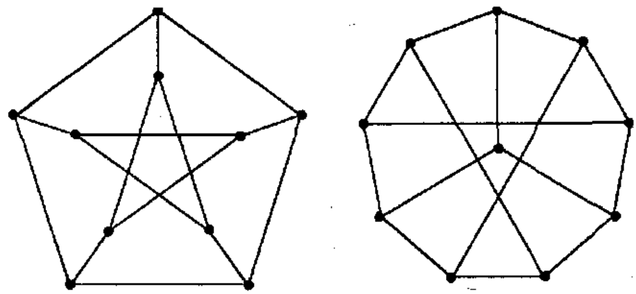
50	59	48	33	22	31	12	5
41	34	51	58	13	6	23	30
60	49	40	47	32	21	4	11
35	42	57	52	7	14	29	24
56	61	46	39	20	25	10	3
43	36	53	62	15	8	17	28
64	55	38	45	26	19	2	9
37	44	63	54	1	16	27	18



Hình 100

Lời giải tương tự bài toán trên. Ta thiết lập một đồ thị với các đỉnh là các ô bàn cờ, còn hai ô được nối với nhau bởi một cạnh nếu từ một ô này tới được ô kia bởi một bước chân con mã. Đồ thị này có một chu trình Hamilton, như ví dụ trong chương trước đã chỉ ra, và do đó nó có một thành tố bậc nhất (số cạnh của đồ thị là số chẵn). Bây giờ ta thấy rõ ràng B có thể thắng được A bằng cách luôn dẫn con mã đi theo các cạnh của thành tố bậc nhất này, người cuối cùng không có bước đi là A (H. 100).

▷ 5.5.1 Có thể thấy chu trình cạnh chẵn duy nhất của đồ thị Petersen có độ dài 6. Do $2 \times 6 > 10$, cho nên không thể phân tích đồ thị Petersen thành các chu trình độ dài chẵn được. Giả sử đồ thị Petersen có thể phân tích thành được tích của ba thành tố bậc nhất, ta sẽ tô màu các cạnh của thành tố bậc nhất thứ nhất bởi màu đỏ, các cạnh của thành tố bậc nhất thứ hai bởi màu xanh và các cạnh của thành tố bậc nhất thứ ba bởi màu vàng. Khi đó bỏ đi các cạnh màu đỏ, thì các đỉnh của đồ thị thu được có bậc là hai và do đó là các chu trình không có đỉnh chung hợp thành.

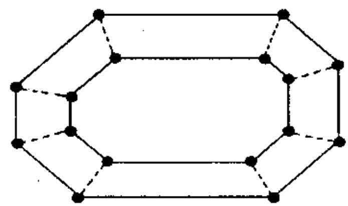


Hình 101

Trên các chu trình này, các cạnh cùng màu không kề nhau, cho nên các chu trình này đều là chu trình có chẵn cạnh, là điều vô lí như ta đã chứng minh ngay ở trên đầu (H. 101).

▷ **5.4.2** Giả sử đồ thị G có thể phân tích thành được tích của ba thành tố bậc nhất, ta sẽ tô màu các cạnh của thành tố bậc nhất thứ nhất của G bởi màu đỏ, các cạnh của thành tố bậc nhất thứ hai của G bởi màu xanh và các cạnh của thành tố bậc nhất thứ ba của G bởi màu vàng. Khi đó bỏ đi các cạnh màu đỏ, thì các đỉnh của đồ thị thu được có bậc là hai và do đó là các chu trình không có đỉnh chung hợp thành. Trên các chu trình này, các cạnh cùng màu không kề nhau, cho nên các cạnh xanh và vàng phải đan màu nhau và do đó các chu trình này đều là chu trình có chẵn cạnh.

Đảo lại, nếu G là tích của một thành tố bậc nhất với một thành tố bậc hai có độ dài các chu trình là chẵn, thì thành tố bậc hai này phân tích được thành tích của hai thành tố bậc nhất bằng cách ta tô màu các cạnh của các chu trình độ dài chẵn của nó bởi hai màu xanh và đỏ.

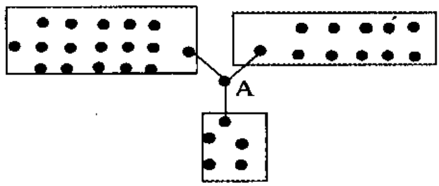


Hình 102

Khi đó các cạnh cùng màu lập thành một thành tố bậc nhất và thành tố bậc hai này được phân tích thành tích của hai thành tố bậc nhất, như trong hình 102 chỉ ra.

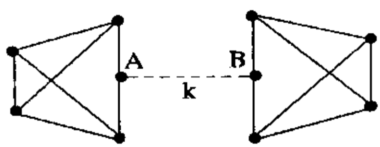
▷ **5.4.3** Một đồ thị có 6 đỉnh và đều bậc 3 sẽ có một chu trình Hamilton. Ta tô màu các cạnh của chu trình Hamilton này bởi hai màu xanh và đỏ xen kẽ nhau sao cho không có hai cạnh cùng màu nào kề nhau cả. Khi bỏ các cạnh của chu trình Hamilton này đi, các cạnh còn lại sẽ lập thành một thành tố bậc nhất của đồ thị đã cho. Vậy mọi đồ thị đều bậc 3 có 6 đỉnh luôn phân tích thành được tích của 3 thành tố bậc nhất.

▷ **5.4.4**



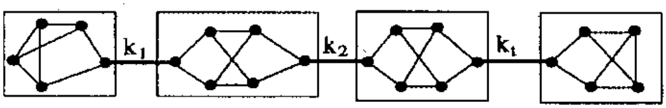
Hình 103

Trước hết ta thấy những cầu này không có đỉnh chung. Nếu có hai cầu có chung đỉnh tại A thì cạnh thứ ba của A cũng sẽ là một cầu - nếu không thì nó phải nằm trên một chu trình đi qua A và suy ra A có hai cạnh không phải là cầu, mâu thuẫn với việc A có bậc là 3 - lúc này đồ thị có 3 cầu không cùng nằm trên một đường là điều vô lí (H. 103).



Hình 104

Đồ thị có đúng một cầu $k = (A, B)$ sẽ có thành tố bậc nhất. Trước tiên ta bỏ cầu k và các đỉnh A và B rồi nối các đỉnh bậc hai trong cùng một thành phần liên thông thu được bởi một cạnh mới (có 2 cạnh mới được thêm vào như vậy). Mỗi thành phần liên thông của đồ thị thu được không có cầu và do đó có thành tố bậc nhất. Ta có thể giả sử rằng thành tố bậc nhất này không chứa cạnh mới, vì nếu xảy ra trường hợp như vậy, ta có thể xét một chu trình đan màu chứa cạnh này và bằng cách thay đổi màu các cạnh trên chu trình đan màu này, ta sẽ có một thành tố bậc nhất không chứa cạnh mới thêm vào. Thêm vào 2 thành tố bậc nhất này cầu $k = (A, B)$, ta sẽ nhận được một thành tố bậc nhất cho đồ thị ban đầu của ta (H. 104).



Hình 105

Bây giờ giả sử G là đồ thị có cầu $k_1 = (A_1, B_1)$, $k_2 = (A_2, B_2)$, ... , $k_t = (A_t, B_t)$ nằm trên một đường thẳng W nào đó (H. 105) . Lời giải của ta tương tự như trên. Như đã nhận xét ở trên thì $A_i \not\equiv B_{i-1}$. Ta bỏ các cầu ra khỏi đồ thị G và thêm vào các cạnh nối các đỉnh bậc 2 cho mỗi thành phần liên thông. Khi đó mỗi thành phần liên thông không có cầu và đều là đồ thị đều bậc 3 nên có thành tố bậc nhất, mà ta có thể giả sử không mất tính tổng quát là không chứa cạnh mới thêm vào nào cả. Trong đồ thị G ban đầu ta thêm vào các cầu k_1, k_2, ..., k_t và ta thu được một thành tố bậc nhất của G.

Tài liệu tham khảo

[1] A. Ainouche and Christofides, N.: *Conditions for the existence of hamiltonian circuits in graphs based on vertex degrees.* J. London Math. Soc. (2), **32**, (1985), 385-391.

[2] A. Ainouche and N. Christofides: *Strong sufficient conditions for the existence of hamiltonian circuits in undirected graphs.* J. Combin. Theory Ser. B **31** (1981), 339-343.

[3] D. Bauer, H. J. Broersma, J. Van den Heuvel and H. J. Veldman: *On Hamiltonian Properties of 2-Tough Graphs.* J. Graph Th. **18** (1994), 539-543..

[4] D. Bauer, H. J. Broersma, and H. J. Veldman: *A generalization of a Result of Häggkvist and Nicoghossian.* Combinatorial Theory, Series B, **47**, October 1989, 237 - 243.

[5] D. Bauer, A. Morgana, E. Schmeichel and H. J. Veldman: *Long cycles in graphs with large degree sums.* Discrete Mathematics **79** (1989/90), 59-70.

[6] D. Bauer, E. F. Schmeichel and H. J. Veldman: *A generalization of a theorem of Bigalke and Jung.* Ars

Combinatoria **26**, (12) 1988, 53-58.

[7] D. Bauer, H. J. Broersma and H. J. Veldman: *Around three lemmas in hamiltonian graph theory.* In : R. Bodendiek and R. Henn, eds., Topics in Combinatorics and Graph Theory. Festschrift in honour of Gerhard Ringel, Physica-Verlag, Heidelberg (1990), 101-110.

[8] D. Bauer, G. Fan and H. J. Veldman: *Hamiltonian properties of graphs with large neighborhood unions.* Discrete Mathematics **96** (1991), 33-49.

[9] D. Bauer, and E. Schmeichel: *A sufficient condition for hamiltonian cycles in 1-tough graphs.* (Stevens research reports in Mathematics, 1988, Stevens Institute of Technology, Hoboken, NJ 07030).

[10] D. Bauer, S. L. Hakimi and E. Schmeichel: *Recognizing tough graph is NP-hard.* Discrete Appl. **28** (1990), 191-195.

[11] M. Behzad, G. Chartrand and L. Lesniak-Forster: *"Graphs and Digraph".* Prindle, Weber & Schmidt, Boston 1979.

[12] J. C. Bermond: *Hamiltonian graphs.* L. Beineke and R. J. Wilson, editors, "Selected Topies in Graph Theory". London and Elsevier, New York (1976).

[13] A. Bigalke and H. A. Jung: *Über Hamiltonsche*

Kreise und unabhängige Ecken in Graphen. Monatsh. Mathematics **88** (1979), 195-210.

[14] J. A. BONDY AND U. S. R. MURTY: *Graph theory with applications.* Macmillan, London and Elsevier, New York (1976).

[15] H. J. BROERSMA, J. VAN DEN HEUVEL AND H. J. VELDMAN: *Long Cycles, Degree sums and Neighborhood Unions.* Discrete Mathematics **121** (1993), 25-35.

[16] V. CHVÁTAL: *Tough graphs and hamiltonian circuits.* Discrete Mathematics **5** (1973), 215-228.

[17] V. CHVÁTAL AND P. ERDÖS: *A note on hamiltonian circuits.* Discrete Mathematics **2** (1972), 111-113.

[18] G. A. DIRAC: *Some theorems on abstract graphs.* Proc. London. Mathematics Soc. **2** (1950), 69-81.

[19] G. A. DIRAC: *On Hamilton-Circuits and H-Paths.* Mathe. Ann. **197**, 57-70 (1972).

[20] G. A. DIRAC: *Note on Hamilton-circuits and H-Paths.* Mathe. Ann. **206** (1973), 139-147.

[21] H. ENOMOTO, B. JACKSON, P. KATERINIS AND A. SAITO: *Toughness and the existence of k-factors.* J. Graph Th. **9** (1985), 87-95.

[22] L. EULER: *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.* Comment. Academiae Sci. l. Petropolitanae

8 (1736), 128-140.

[23] B. FASSBENDER: *A sufficient condition on degree sums of independent triples for hamiltonian cycles in 1-tough graphs.* Ars Combinatoria **33** (1992), 300-304.

[24] J. FLACHSMEYER: *Kombinatorik.* Berlin 1972.

[25] E. FLANDRIN, H. A. JUNG AND H. LI: *Hamiltonism, degree sum and neighborhood intersections.* Discrete Mathematics **90** (1991), 41-52.

[26] P. FRAISSE AND H. A. JUNG: *Longest cycle and independent sets in k-connected Graphs.* Recent Studies in Graph Theory ed. V. R. Kulli 1989, (by Vishwa International Publications Gulbara, India, (1989), 114-139.

[27] T. GALLAI: *Über extreme Punkt- und Kantenmenge.* Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math. **2** (1959), 133-138.

[28] M. R. GAREY / D. S. JOHNSON: *Computers and Intractability.* San Francisco, 1979.

[29] HOÀNG CHÚNG: *Đại cương về toán học hữu hạn.* Nhà xuất bản giáo dục, Hà nội 1997.

[30] HOÀNG CHÚNG: *Graph và giải toán phổ thông.* Nhà xuất bản giáo dục, Hà nội 1997.

[31] R. HALIN: *Graphentheorie.* Akademie-Verlag Berlin, 1989.

[32] R. HÄGGKVIST: *Twenty odd statements in Twente.* In:"Twente Workshop on Hamiltonian Graph Theory", (1992), 67-76..

[33] R. HÄGGVIST, AND G. G. NICOGHOSSIAN: *A remark on Hamiltonian cycles..* J. of Combin. Theory B **30** (1981), 118-120.

[34] B. JACKSON: *Problem A 10.* Presented at the "Twente Workshop on Hamiltonian Graph Theory" (1992), p. 118.

[35] H. A. JUNG: *On maximal circuits in finite graphs.* Annals of Discrete Mathematics **3** (1978), 129 - 144.

[36] KAMKE, E. : *Mengenlehre.* Walter der Gruytér & co, Berlin 1955.

[37] D. KÖNIG: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.* Leipzig 1936.

[38] M. LAS VERGNAS: *Sur l'existence des cycles hamiltonies danns ungraphs.* Comptes Rendus de l'academie des Sciences (Paris) **270** (1970), Serie A, 1361-1364.

[39] A. MARCZYK AND Z. SKUPIEŃ: *Maximum nonhamiltonian tough graphs.* Disc. Mathematics **96** (1991), 213-220.

[40] C. ST. J. A. NASH - WILLIAMS: *Edge- disjoint hamiltonian circuits in graphs with vertices of large valency.*

In "Studies in Pure Mathematics", L. Mirsky ed. Academic Press, London 1971, 157-183.

[41] C. G. NICOGHOSSIAN: *On maximum cycles in graphs.* In: Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica **17** (1982), 251-282.

[42] O. ORE: *Note on hamiltonian cycles.* Amer. Math. Monthly **67** (1960), p. 55.

[43] C. M. PAREEK AND Z. SKUPIEŃ: *On the smallest non-hamiltonian locally hamiltonian graph.* Journal of the Uni. of Kuwait (Science) Vol. **10**, No. 1, 9-17 (1983).

[44] H. SACHS: *Einführung in die Theorie der endlichen Graphen.* Leipzig 1970.

[45] I. SCHIERMEYER: *Hamilton Cycles in path-tough graphs.* In: "Twente Workshop on Hamiltonian Graph Theory" (1992), 97-99.

[46] Z. SKUPIEŃ: *Path partitions of vertices and hamiltonity of graphs.* Recent Advances in Graph Theory, Proccedings of the Symposium held in Prague, June 1974, Academia, Praha 1975, 481-491.

[47] Z. SKUPIEŃ: *Locally Hamiltonian and planar graphs.* Fund. Math. **58** (1966), 193-200.

[48] Z. SKUPIEŃ: *Locally Hamiltonian graphs and Kuratowski theorem.* Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci.

Math. Astr. Phys. **13** (1965), 615-619.

[49] Z. SKUPIEŃ: *On Tough Maximally Non-Hamiltonian Graphs.* Bull. Pol. Acad. Sci., Math. **36**, No 5-6 (1988), 357-362.

[50] Z. SKUPIEŃ: *Hamiltonian circuits and path coverings of vertices in graphs.* Colloq. Math. **30** (1974), 295-316.

[51] Z. SKUPIEŃ: *Maximally non-Hamilton-connected and hypohamiltonian graphs.* Lưu hành nội bộ, 133-144.

[52] Z. SKUPIEŃ: *Some Examples in Hamiltonian Graph Theory.* Lưu hành nội bộ, 363-374.

[53] Z. SKUPIEŃ: *Sharp sufficient conditions for Hamiltonian cycles in tough graphs.* In: Combinatorics and Graph Theory (ed. by Z. Skupień and M. Borowi-ecki), Banach Center Publications, vol. **25**, PWN-Pol. Sci. Publ. (1989), 163-175.

[54] Z. SKUPIEŃ: *Degrees in homogeneously traceable graphs.* Discrete Mathematics **8** (1980), 185-188.

[55] SHWE KYAW: *A Dirac-Type criterion for Hamiltonicity.* Thesis TU Berlin, 1994.

[56] M. STIEBITZ: *Proof of a conjecture of T. Gallai concerning connectivity properties of colour critical graphs.* Combinatorica **2** (1982), 315-323.

[57] J. VAN DEN HEUVEL: *Degree and Toughness Condition for Cycles in Graphs.* Thesis University of Twente, Enschede Niederland 1994.

[58] H. J. VELDMAN: *Existence of D_λ−cycles and D_λ-paths..* Discrete Mathematics **44** (1983) 2/3, 281-296.

[59] H. J. VOSS: *Cycles and Bridges in Graphs.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1991.

[60] VU DINH HOA: *"Ein Struktursatz für 2-fach zusammenhängende Graphen mit großer Minimalvalenz".* Math. Nachr. **128** (1986), 151-160.

[61] VU DINH HOA: *Über Hamiltonizität in einer Klasse spezieller Graphen.* J. Inform. Process. Cybernet. EIK **28** (1992), 29-35.

[62] VU DINH HOA: *A Remark on Hamiltonian Cycles.* Math. Nachr. **157** (1992), 163-168.

[63] VU DINH HOA: *On the length of longest dominating cycles in graphs.* Discrete Mathematics **121** (1993), 211-222.

[64] VU DINH HOA: *On the Length of Maximal Dominating Cycles in 2-Connected Graphs.* J. Inform. Process. Cybernet. EIK **30** (1994), 55-60.

[65] VU DINH HOA: *Vertexset containing in longest dominating cycles.* Acta Math. Vietnam. Volume **19** (1994),

25-30.

[66] VU DINH HOA: *A sharp lower bound for the circumference of 1-tough graphs with large degree sums.* J. of Graph Th., Vol. **20**, No. 2, 137-140 (1995).

[67] VU DINH HOA: *Long cycles and Neighborhood Union in 1-tough graphs with large degree sums.* "Discussiones Mathematicae - Graph Theory" Vol. **18** (1999) No. 1, p.5-13.

[68] VU DINH HOA: *A sufficient condition for hamiltonian cycles in tough graphs.* "Vietnam Journal of Mathematics" **23** (1995), 57-67.

[69] VU DINH HOA: *Path covering number and hamiltonicity in tough graphs.* Proceedings of the *"Second Kraków Conference of Graph Theory"*, September 29-23, 1994.

[70] H. WALTHER & H. J. VOSS: *Über Kreise in Graphen.* Berlin 1974.

Bảng phiên âm tên riêng nước ngoài

Berge	Bec-giơ
Cayley	Cay-lây
Cantor	Can-to
Dirac	Đi-rắc
Dirichlet	Đi-ric-lê
Euler	Ơ-le
Erdös	Ec-đôt
Frink	Fring-khơ
Hamilton	Ha-min-tơn
Gallai	Ga-lai
Gauß	Gau-sơ
König	Khuê-nic
Königsberg	Khuê-nic-sbéc
Leipzig	Lai-xích
Paris	Pa-ri
Petersen	Pê-tơ-zen
Pósa	Pô-za
Tutte	Thát
Wien	Viên

MỤC LỤC

Trang

ĐỊNH LÍ VÀ VẤN ĐỀ VỀ ĐỒ THỊ HỮU HẠN

In 5.000 bản. Khổ 14,5 x 20,5cm. In tại Nhà in Công ty Sách Thiết bị Trường học Đà Nẵng. Số in : 83. Số xuất bản : 1419/214 - 02. In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2003.