

TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Nguyên hàm cơ bản có điều kiện

<i>Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp (với C là hằng số tùy ý)</i>	
① $\int 0 dx = C.$	$\longrightarrow \int k dx = kx + C.$
② $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$	$\longrightarrow \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C.$
③ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C.$
④ $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$	$\longrightarrow \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C.$
⑤ $\int \sin x dx = -\cos x + C.$	$\longrightarrow \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C.$
⑥ $\int \cos x dx = \sin x + C.$	$\longrightarrow \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C.$
⑦ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{dx}{\sin^2(ax+b)} = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C.$
⑧ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$	$\longrightarrow \int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C.$
⑨ $\int e^x dx = e^x + C.$	$\longrightarrow \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C.$
⑩ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	$\longrightarrow \int a^{\alpha x+\beta} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C.$
♦ Nhận xét. Khi thay x bằng $(ax+b)$ thì khi lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$.	

Một số nguyên tắc tính cơ bản

- Tích của đa thức hoặc lũy thừa $\xrightarrow{PP}$ khai triển.
- Tích các hàm mũ $\xrightarrow{PP}$ khai triển theo công thức mũ.
- Bậc chẵn của sin và cosin $\Rightarrow$ Hạ bậc: $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2a, \cos^2 a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2a.$
- Chứa tích các căn thức của $x \xrightarrow{PP}$ chuyển về lũy thừa.

Câu 1. (Đề Tham Khảo 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ thỏa mãn

$$f'(x) = \frac{2}{2x-1}, f(0) = 1, f(1) = 2. \text{ Giá trị của biểu thức } f(-1) + f(3) \text{ bằng}$$

A. $2 + \ln 15$

B. $3 + \ln 15$

C. $\ln 15$

D. $4 + \ln 15$

Lời giải

Chọn C

$$\int \frac{2}{2x-1} dx = \ln|2x-1| + C = f(x)$$

Với $x < \frac{1}{2}$, $f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$ nên $f(-1) = 1 + \ln 3$

Với $x > \frac{1}{2}$, $f(1) = 2 \Rightarrow C = 2$ nên $f(3) = 2 + \ln 5$

Nên $f(-1) + f(3) = 3 + \ln 15$

Câu 2. (Sở Phú Thọ 2019) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ thỏa mãn $F(e+1) = 4$ Tìm $F(x)$.

A. $2\ln(x-1) + 2$

B. $\ln(x-1) + 3$

C. $4\ln(x-1)$

D. $\ln(x-1) - 3$

Lời giải

Chọn B

$$F(x) = \int \frac{1}{x-1} dx + C = \ln|x-1| + C$$

$$F(e+1) = 4. \text{ Ta có } 1 + C = 4 \Rightarrow C = 3$$

Câu 3. (THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-2}$, biết $F(1) = 2$. Giá trị của $F(0)$ bằng

A. $2 + \ln 2$.

B. $\ln 2$.

C. $2 + \ln(-2)$.

D. $\ln(-2)$.

Lời giải

Cách 1:

$$\text{Ta có: } \int f(x) dx = \int \frac{1}{x-2} dx = \ln|x-2| + C, C \in \mathbb{R}.$$

Giả sử $F(x) = \ln|x-2| + C_0$ là một nguyên hàm của hàm số đã cho thỏa mãn $F(1) = 2$.

$$\text{Do } F(1) = 2 \Rightarrow C_0 = 2 \Rightarrow F(x) = \ln|x-2| + 2. \text{ Vậy } F(0) = 2 + \ln 2.$$

Câu 4. (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm

$$f(x) = \frac{1}{2x+1}; \text{ biết } F(0) = 2. \text{ Tính } F(1).$$

A. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2$. B. $F(1) = \ln 3 + 2$. C. $F(1) = 2 \ln 3 - 2$. D. $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } F(x) = \int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$$

$$\text{Do } F(0) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln|2 \cdot 0 + 1| + C = 2 \Rightarrow C = 2$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + 2 \Rightarrow F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2.$$

Câu 5. (Chuyên ĐHSPT Hà Nội 2019) Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$ trên $(-\infty; 0)$ thỏa mãn $F(-2) = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right) \quad \forall x \in (-\infty; 0)$

B. $F(x) = \ln|x| + C \quad \forall x \in (-\infty; 0)$ với C là một số thực bất kì.

C. $F(x) = \ln|x| + \ln 2 \quad \forall x \in (-\infty; 0)$.

D. $F(x) = \ln(-x) + C \quad \forall x \in (-\infty; 0)$ với C là một số thực bất kì.

Lời giải

Ta có $F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C = \ln(-x) + C$ với $\forall x \in (-\infty; 0)$.

Lại có $F(-2) = 0 \Leftrightarrow \ln 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\ln 2$. Do đó $F(x) = \ln(-x) - \ln 2 = \ln\left(\frac{-x}{2}\right)$.

Vậy $F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right) \quad \forall x \in (-\infty; 0)$.

Câu 6. (THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn

$f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$. Tính $S = f(3) - f(-1)$.

A. $S = \ln 4035$.

B. $S = 4$.

C. $S = \ln 2$.

D. $S = 1$.

Lời giải

Trên khoảng $(1; +\infty)$ ta có $\int f'(x) dx = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln(x-1) + C_1 \Rightarrow f(x) = \ln(x-1) + C_1$.

Mà $f(2) = 2018 \Rightarrow C_1 = 2018$.

Trên khoảng $(-\infty; 1)$ ta có $\int f'(x) dx = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln(1-x) + C_2 \Rightarrow f(x) = \ln(1-x) + C_2$.

Mà $f(0) = 2017 \Rightarrow C_2 = 2017$.

Vậy $f(x) = \begin{cases} \ln(x-1) + 2018 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + 2017 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Suy ra $f(3) - f(-1) = 1$.

Câu 7. (Mã 105 2017) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$.

Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$

B. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$

D. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C$

Theo bài ra ta có: $F(0) = 1 + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$.

Câu 8. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

A. 2.

B. 6.

C. 8.

D. 4.

Lời giải

$$F(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C; F(0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Khi đó } F(\ln 3) = \frac{1}{2}e^{2\ln 3} - \frac{1}{2} = 4.$$

Câu 9. (Sở Bình Phước 2019) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số e^{2x} và $F(0) = \frac{201}{2}$. Giá trị

$$F\left(\frac{1}{2}\right) \text{ là}$$

A. $\frac{1}{2}e + 200$

B. $2e + 100$

C. $\frac{1}{2}e + 50$

D. $\frac{1}{2}e + 100$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C.$$

$$\text{Theo đề ra ta được: } F(0) = \frac{201}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot e^0 + C = \frac{201}{2} \Leftrightarrow C = 100.$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 100 \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{2 \cdot \frac{1}{2}} + 100 = \frac{1}{2}e + 100.$$

Câu 10. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và:

$$f'(x) = 2e^{2x} + 1, \forall x, f(0) = 2. \text{ Hàm } f(x) \text{ là}$$

A. $y = 2e^x + 2x.$

B. $y = 2e^x + 2.$

C. $y = e^{2x} + x + 2.$

D. $y = e^{2x} + x + 1.$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \int f'(x) dx = \int (2e^{2x} + 1) dx = e^{2x} + x + C.$$

$$\text{Suy ra } f(x) = e^{2x} + x + C.$$

$$\text{Theo bài ra ta có: } f(0) = 2 \Rightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1.$$

$$\text{Vậy: } f(x) = e^{2x} + x + 1.$$

Câu 11. (Sở Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2019$.

A. $F(x) = x^2 + e^x + 2018.$

B. $F(x) = x^2 + e^x - 2018.$

C. $F(x) = x^2 + e^x + 2017.$

D. $F(x) = e^x - 2019.$

Lời giải

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int (2x + e^x) dx = x^2 + e^x + C.$$

$$\text{Có } F(x) \text{ là một nguyên hàm của } f(x) \text{ và } F(0) = 2019.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} F(x) = x^2 + e^x + C \\ F(0) = 2019 \end{cases} \Rightarrow 1 + C = 2019 \Leftrightarrow C = 2018.$$

$$\text{Vậy } F(x) = x^2 + e^x + 2018.$$

Câu 12. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$.

- A. $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} + 1}{\ln 2}$. B. $T = 2^{2019 \cdot 2020}$.
 C. $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$. D. $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

$$F(x) \text{ là một nguyên hàm của hàm số } f(x) = 2^x, \text{ ta có } F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C \text{ mà } F(0) = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}.$$

$$T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$$

$$= \frac{1}{\ln 2} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2018} + 2^{2019}) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2^{2020} - 1}{2 - 1} = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$$

Câu 13. (Mã 104 2017) Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

- A. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$ B. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$
 C. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$ D. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Có } F(x) = \int f(x) dx = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$$

$$\text{Do } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + C = 2 \Leftrightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = -\cos x + \sin x + 1.$$

Câu 14. (Mã 123 2017) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 15$ B. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 2$
 C. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$ D. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(x) = \int (3 - 5 \sin x) dx = 3x + 5 \cos x + C$$

$$\text{Theo giả thiết } f(0) = 10 \text{ nên } 5 + C = 10 \Rightarrow C = 5.$$

$$\text{Vậy } f(x) = 3x + 5 \cos x + 5.$$

Câu 15. (Việt Đức Hà Nội 2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $f(x) = 2x + 5 \cos x + 3$. B. $f(x) = 2x - 5 \cos x + 15$.
 C. $f(x) = 2x + 5 \cos x + 5$. D. $f(x) = 2x - 5 \cos x + 10$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = \int f'(x) dx = \int (2 - 5 \sin x) dx = 2x + 5 \cos x + C$.

Mà $f(0) = 10$ nên $5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$.

Vậy $f(x) = 2x + 5 \cos x + 5$.

Câu 16. (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm

$$f(x) = \cos 3x \text{ và } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}. \text{ Tính } F\left(\frac{\pi}{9}\right).$$

A. $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}+2}{6}$ **B.** $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}-2}{6}$ **C.** $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}+6}{6}$ **D.** $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}-6}{6}$

Lời giải

$$F(x) = \int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{\sin 3x}{3} + 1 \Rightarrow F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{3} + 1 = \frac{\sqrt{3}+6}{6}.$$

Câu 17. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}. \text{ Biết } F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k \text{ với mọi } k \in \mathbb{Z}. \text{ Tính } F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi).$$

A. 55.

B. 44.

C. 45.

D. 0.

Lời giải

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \begin{cases} \tan x + C_0, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_2, & x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right) \\ \dots \\ \tan x + C_9, & x \in \left(\frac{17\pi}{2}; \frac{19\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_{10}, & x \in \left(\frac{19\pi}{2}; \frac{21\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\left(\frac{\pi}{4} + 0\pi\right) = 1 + C_0 = 0 \Rightarrow C_0 = -1 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = 1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1 \\ \dots \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 9\pi\right) = 1 + C_9 = 9 \Rightarrow C_9 = 8 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 10\pi\right) = 1 + C_{10} = 10 \Rightarrow C_{10} = 9. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi) = \tan 0 - 1 + \tan \pi + \tan 2\pi + 1 + \dots + \tan 10\pi + 9 = 44.$$

Câu 18. (Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn

$$F(0) = \frac{1}{\ln 2}. \text{ Tính giá trị biểu thức } T = F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2019).$$

A. $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}.$

B. $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} - 1}{2}.$

C. $T = 2^{2019 \cdot 2020}.$

D. $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $F(x) = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

Theo giả thiết $F(0) = \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow \frac{2^0}{\ln 2} + C = \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow C = 0.$ Suy ra: $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$

Vậy $T = F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2019) = \frac{2^0}{\ln 2} + \frac{2^1}{\ln 2} + \frac{2^2}{\ln 2} + \dots + \frac{2^{2019}}{\ln 2}$
 $= \frac{1}{\ln 2} (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2019}) = \frac{1}{\ln 2} \cdot 1 \cdot \frac{1 - 2^{2020}}{1 - 2} = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}.$

Câu 19. (Đề minh họa 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 3.$ Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2,$ khi đó $F(1)$ bằng

A. -3.

B. 1.

C. 2.

D. 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int (12x^2 + 2) dx = 4x^3 + 2x + C_1.$

Mà $f(1) = 3$ nên $4.1^3 + 2.1 + C_1 = 3 \Leftrightarrow C_1 = -3.$

$\Rightarrow f(x) = 4x^3 + 2x - 3.$

Lại có $F(x) = \int f(x) dx = \int (4x^3 + 2x - 3) dx = x^4 + x^2 - 3x + C_2.$

Hơn nữa, $F(0) = 2 \Leftrightarrow 0^4 + 0^2 - 3.0 + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2.$

$\Rightarrow F(x) = x^4 + x^2 - 3x + 2.$

Suy ra $F(1) = 1^4 + 1^2 - 3.1 + 2 = 1.$

Câu 20. (Sở Hà Tĩnh 2022) Cho $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x) = \sin^2 x$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

Giá trị biểu thức $S = F(-\pi) + 2F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

A. $S = \frac{3}{4} - \frac{\pi}{4}.$

B. $S = \frac{3}{4} - \frac{3\pi}{4}.$

C. $S = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{8}.$

D. $S = \frac{3}{2} - \frac{3\pi}{8}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

Mà $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\sin \frac{\pi}{2} + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$

Vậy $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$

$S = F(-\pi) + 2F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin(-2\pi) - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} + 2\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right]$

$= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{3\pi}{8}.$

Câu 21. (Sở Nam Định 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 8x^3 + \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$, khi đó $F(1)$ bằng

- A. $\frac{32}{5} + \cos 1$. B. $\frac{32}{5} - \cos 1$. C. $\frac{32}{5} - \sin 1$. D. $\frac{32}{5} + \sin 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x) = 8x^3 + \sin x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 2x^4 - \cos x + C_1$.

Mà $f(0) = 3 \Leftrightarrow -1 + C_1 = 3 \Rightarrow C_1 = 4$. Vậy $f(x) = 2x^4 - \cos x + 4$.

Ta có: $\int f(x) dx = \int (2x^4 - \cos x + 4) dx = \frac{2}{5}x^5 - \sin x + 4x + C$.

Do đó: $F(x) = \frac{2}{5}x^5 - \sin x + 4x + C_2$.

Mà: $F(0) = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2$. Suy ra: $F(x) = \frac{2}{5}x^5 - \sin x + 4x + 2$.

Khi đó: $F(1) = \frac{32}{5} - \sin 1$.

Câu 22. (Chuyên Hùng Vương – Gia Lai 2022) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ thỏa mãn

$$f'(x) = \frac{1}{x-2}, f(1) = 2021, f(3) = 2022. \text{ Tính } P = \frac{f(2023)}{f(-2019)}.$$

A. $P = \ln 4042$.

B. $P = \frac{\ln 2021}{\ln 2022}$.

C. $P = \ln \frac{2021}{2022}$.

D. $P = \frac{2022 + \ln 2021}{2021 + \ln 2021}$.

Lời giải

Trên khoảng $(2; +\infty)$: $\int f'(x) dx = \int \frac{1}{x-2} dx = \ln(x-2) + C_1 \Rightarrow f(x) = \ln(x-2) + C_1$.

Mà $f(3) = 2022 \Rightarrow C_1 = 2022$.

Trên khoảng $(-\infty; 2)$: $\int f'(x) dx = \int \frac{1}{x-2} dx = \ln(2-x) + C_2 \Rightarrow f(x) = \ln(2-x) + C_2$.

Mà $f(1) = 2021 \Rightarrow C_2 = 2021$.

$$\text{Vậy } f(x) = \begin{cases} \ln(x-2) + 2022 & \text{khi } x > 2 \\ \ln(2-x) + 2021 & \text{khi } x < 2 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } P = \frac{f(2023)}{f(-2019)} = \frac{2022 + \ln 2021}{2021 + \ln 2021}.$$

Câu 23. (THPT Hoàng Hoa Thám - Quảng Ninh - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} + 6x, \forall x \in (1; +\infty) \text{ và } f(2) = 12. \text{ Biết } F(x) \text{ là nguyên hàm của } f(x) \text{ thỏa } F(2) = 6, \text{ khi đó}$$

giá trị biểu thức $P = F(5) - 4F(3)$ bằng

A. 25.

B. 10.

C. 20.

D. 24.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Với } \forall x \in (1; +\infty) \text{ ta có } f(x) = \int \left(\frac{1}{x-1} + 6x \right) dx = \ln(x-1) + 3x^2 + C.$$

$$\text{Vì } f(2) = 12 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \ln(x-1) + 3x^2.$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (\ln(x-1) + 3x^2) dx = x \ln(x-1) - \int x d(\ln(x-1)) + x^3 = x \ln(x-1) - \int x \cdot \frac{1}{x-1} dx + x^3 \\ &= x \ln(x-1) - x - \ln(x-1) + x^3 + C' \end{aligned}$$

$$F(2) = 6 \text{ nên } C' = 0. \text{ Suy ra } F(x) = x \ln(x-1) - x - \ln(x-1) + x^3.$$

$$P = F(5) - 4F(3) = 5 \ln 4 - 5 - \ln 4 + 125 - 4(3 \ln 2 - 3 - \ln 2 + 27) = 120 - 96 = 24.$$

Câu 24. (THPT Trần Quốc Tuấn - Quảng Ngãi - 2022) Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{3}$ và

$$f'(x) = 16 \cos 4x \cdot \sin^2 x, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Biết } F(x) \text{ là nguyên hàm của } f(x) \text{ thỏa mãn } F(0) = \frac{15}{26}. \text{ Tính } F(\pi).$$

A. $\frac{64}{27}$.

B. $\frac{15}{26}$.

C. $\frac{31}{18}$.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 16 \cos 4x \cdot \sin^2 x dx$$

$$= \int 16 \cos 4x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$$

$$= 8 \int (\cos 4x - \cos 4x \cdot \cos 2x) dx$$

$$= 8 \left[\int \cos 4x dx - \int \cos 4x \cdot \cos 2x dx \right]$$

$$= 8 \left[\frac{\sin 4x}{4} - \frac{1}{2} \int (\cos 6x + \cos 2x) dx \right] + c$$

$$= 8 \left[\frac{\sin 4x}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 2x}{2} \right) \right] + c$$

$$= 2 \sin 4x - 4 \left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 2x}{2} \right) + c$$

$$= 2 \sin 4x - \frac{2}{3} \sin 6x - 2 \sin 2x + c$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow 2 \sin \pi - \frac{2}{3} \sin \frac{3\pi}{2} - 2 \sin \frac{\pi}{2} + c = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} + c = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow c = 0$$

$$f(x) = 2 \sin 4x - \frac{2}{3} \sin 6x - 2 \sin 2x$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x) dx = \int \left(2 \sin 4x - \frac{2}{3} \sin 6x - 2 \sin 2x \right) dx \\
&= -\frac{\cos 4x}{2} + \frac{\cos 6x}{9} + \cos 2x + c' \\
F(0) &= \frac{15}{26} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{9} + 1 + c' = \frac{15}{26} \Leftrightarrow \frac{11}{18} + c' = \frac{15}{26} \Leftrightarrow c' = \frac{15}{26} - \frac{11}{18} \Leftrightarrow c' = -\frac{4}{117} \\
F(x) &= -\frac{\cos 4x}{2} + \frac{\cos 6x}{9} + \cos 2x - \frac{4}{117} \\
\Rightarrow F(\pi) &= -\frac{\cos 4\pi}{2} + \frac{\cos 6\pi}{9} + \cos 2\pi - \frac{4}{117} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{9} + 1 - \frac{4}{117} = \frac{15}{26}
\end{aligned}$$

Câu 25. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2023) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, thỏa mãn

$$f'(x) = \frac{2}{2x-1}, f(0) = 1 \text{ và } f(1) = 3. \text{ Giá trị của biểu thức } f'(-1) + f(4) \text{ bằng}$$

- A. $5 + \ln 21$. B. $5 + \ln 12$. C. $4 + \ln 12$. **D. $4 + \ln 21$.**

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = \frac{2}{2x-1} \Rightarrow f(x) = \int \frac{2}{2x-1} dx = \begin{cases} \ln(2x-1) + C_1, & \text{khi } x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + C_2, & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$f(0) = \ln 1 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1$$

$$f(1) = \ln 1 + C_1 = 3 \Rightarrow C_1 = 3$$

$$\text{Suy ra } f(x) = \int \frac{2}{2x-1} dx = \begin{cases} \ln(2x-1) + 3, & \text{khi } x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + 1, & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } f(-1) + f(4) = \ln 3 + 1 + \ln 7 + 3 = 4 + \ln 21.$$

Câu 26. (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng- 2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là

$f'(x) = \sin x + x \cdot \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = F(\pi) = 1$, khi đó giá trị của $F(2\pi)$ bằng.

- A. $1 + 2\pi$. **B. $1 - 4\pi$.** C. $1 - 2\pi$. D. 4π .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) = \sin x + x \cdot \cos x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \int (\sin x + x \cdot \cos x) dx = -\cos x + \int x \cdot \cos x dx$$

$$f(x) = -\cos x + x \cdot \sin x - \int \sin x dx = -\cos x + x \sin x + \cos x + C_1 = x \sin x + C_1.$$

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (x \sin x + C_1) dx = -x \cos x + \int \cos x dx + C_1 x = -x \cos x + \sin x + C_1 x + C_2.$$

$$\text{Vì } F(0) = F(\pi) = 1 \text{ nên } \begin{cases} C_2 = 1 \\ \pi + C_1 \pi + C_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } F(x) = -x \cos x + \sin x - x + 1.$$

Vậy $F(2\pi) = -2\pi - 2\pi + 1 = 1 - 4\pi$.

- Câu 27. (SGD Hải Phòng - 2023)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{x-4}{x^2+x-2}$, $f(-3) - f(2) = 0$ và $f(0) = 1$. Giá trị của biểu thức $f(-4) + 2f(-1) - f(3)$ bằng
- A. $3\ln\frac{5}{2} + 2$. B. $3\ln\frac{2}{5} + 2$. C. $2\ln\frac{2}{5} + 2$. D. $3\ln\frac{2}{5} + 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = \frac{x-4}{x^2+x-2} = \frac{x-4}{(x+2)(x-1)} = \frac{2(x+1)-1(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{2}{x+2} + \frac{-1}{x-1}$

Suy ra: $f(x) = \int f'(x) dx = \begin{cases} 2\ln|x+2| - \ln|x-1| + C_1 & x < -2 \\ 2\ln|x+2| - \ln|x-1| + C_2 & -2 < x < 1 \\ 2\ln|x+2| - \ln|x-1| + C_3 & x > 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} \ln\frac{(x+2)^2}{1-x} + C_1, & x < -2 \\ \ln\frac{(x+2)^2}{1-x} + C_2, & -2 < x < 1. \\ \ln\frac{(x+2)^2}{x-1} + C_3, & x > 1 \end{cases}$

Lại có: $\begin{cases} f(-3) - f(2) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\frac{1}{4} + C_1 - C_3 - \ln 16 = 0 \\ \ln 4 + C_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 - C_3 = 6\ln 2 \\ C_2 = 1 - 2\ln 2 \end{cases}$

Suy ra: $f(-4) + 2f(-1) - f(3) = \ln\frac{4}{5} + C_1 + 2\left(\ln\frac{1}{2} + C_2\right) - \left(\ln\frac{25}{2} + C_3\right)$
 $= \left[\ln\frac{4}{5} + 2\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{25}{2}\right] + [C_1 + 2C_2 - C_3] = \ln\frac{2}{125} + 6\ln 2 + 2(1 - 2\ln 2) = \ln\frac{8}{125} + 2 = 3\ln\frac{2}{5} + 2$.

- Câu 28. (SGD Hưng Yên 2023)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2$ và $f(2) = \frac{9}{2}$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(2) = 4 + \ln 2$, khi đó $F(1)$ bằng
- A. $3 + \ln 2$. B. $-3 - \ln 2$. C. 1. D. -1.

Lời giải

Chọn C

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} + 2x + C$.

Theo bài ra $f(2) = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + 4 + C = \frac{9}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} + 2x \Rightarrow F(x) = \ln|x| + x^2 + M$.

Theo bài ra $F(2) = 4 + \ln 2 \Rightarrow \ln 2 + 4 + M = 4 + \ln 2 \Rightarrow M = 0 \Rightarrow F(x) = \ln|x| + x^2 \Rightarrow F(1) = 1$.

- Câu 29. (THPT- Việt Trì- Phú Thọ - 2023)** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn

$f'(x) = \frac{2}{2x-1}$ và $f(0) = 1, f(1) = -2$. Giá trị $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $2 + \ln 15$.

B. $\ln 15 - 1$.

C. $3 - \ln 15$.

D. $\ln 15$.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{2}{2x-1} \Leftrightarrow f(x) = \int \frac{2}{2x-1} dx = \ln|2x-1| + C = \begin{cases} \ln(2x-1) + C_1, & x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + C_2, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do } f(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1; f(1) = -2 \Rightarrow C_1 = -2.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \begin{cases} \ln(2x-1) - 2, & x > \frac{1}{2} \\ \ln(1-2x) + 1, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Do đó } f(-1) + f(3) = \ln 3 + 1 + \ln 5 - 2 = \ln 15 - 1.$$

Dạng 2. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số

“ Nếu $\int f(x) dx = F(x) + C$ thì $\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u(x)) + C$ ”.

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I = \int f(x) dx$, trong đó ta có thể phân tích

$$f(x) = g(u(x)) u'(x) dx \text{ thì ta thực hiện phép đổi biến số } t = u(x)$$

$$\Rightarrow dt = u'(x) dx. \text{ Khi đó: } I = \int g(t) dt = G(t) + C = G(u(x)) + C$$

Chú ý: Sau khi ta tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t = u(x)$

1. Đổi biến số với một số hàm thường gặp

$$\begin{aligned} & \bullet \int f(ax+b)^n x dx \xrightarrow{PP} t = ax+b. \bullet \int_a^b \sqrt[n]{f(x)} f'(x) dx \xrightarrow{PP} t = \sqrt[n]{f(x)}. \\ & \bullet \int_a^b f(\ln x) \frac{1}{x} dx \xrightarrow{PP} t = \ln x. \bullet \int_a^b f(e^x) e^x dx \xrightarrow{PP} t = e^x. \\ & \bullet \int_a^b f(\sin x) \cos x dx \xrightarrow{PP} t = \sin x. \bullet \int_a^b f(\cos x) \sin x dx \xrightarrow{PP} t = \cos x. \\ & \bullet \int_a^b f(\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} dx \xrightarrow{PP} t = \tan x. \bullet \int_a^b f(\sin x \pm \cos x) \cdot (\sin x \pm \cos x) dx \Rightarrow t = \sin x \pm \cos x. \\ & \bullet \int_a^\beta f(\sqrt{a^2 - x^2}) x^{2n} dx \xrightarrow{PP} x = a \sin t. \bullet \int_a^\beta f\left((\sqrt{x^2 + a^2})^m\right) x^{2n} dx \xrightarrow{PP} x = a \tan t. \\ & \bullet \int_a^\beta f\left(\sqrt{\frac{a \pm x}{a \mp x}}\right) dx \xrightarrow{PP} x = a \cos 2t. \bullet \int_a^\beta \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(cx+d)}} \Rightarrow t = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d}. \\ & \bullet \int_a^\beta R\left[\sqrt[n]{ax+b}, \sqrt[k]{ax+b}\right] dx \Rightarrow t^n = ax+b. \bullet \int_a^\beta \frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[n]{a+bx^n}} \xrightarrow{PP} x = \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

2. Đổi biến số với hàm ẩn

- **Nhận dạng tương đối:** Đề cho $f(x)$, yêu cầu tính $f(\neq x)$ hoặc đề cho $f(\neq x)$, yêu cầu tính $f(x)$.
- **Phương pháp:** Đặt $t = (\neq x)$.

• **Lưu ý:** Đổi biến nhớ đổi cận và ở trên đã sử dụng tính chất: “**Tích phân không phụ thuộc vào biến số, mà chỉ phụ thuộc vào hai cận**”, nghĩa là $\int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt = \dots = \int_a^b f(x)dx = \dots$

Câu 30. (Mã 101 – 2020 Lần 2) Biết $F(x) = e^x + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng

- A. $2e^x + 2x^2 + C$. B. $\frac{1}{2}e^{2x} + x^2 + C$. C. $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C$. D. $e^{2x} + 4x^2 + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F(x) = e^x + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int f(2x)dx = \frac{1}{2} \int f(2x)d(2x) = \frac{1}{2}F(2x) + C = \frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C.$$

Câu 31. (Mã 102 - 2020 Lần 2) Biết $F(x) = e^x - 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng

- A. $2e^x - 4x^2 + C$. B. $\frac{1}{2}e^{2x} - 4x^2 + C$. C. $e^{2x} - 8x^2 + C$. D. $\frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $F(x) = e^x - 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$

Suy ra:

$$f(x) = F'(x) = (e^x - 2x^2)' = e^x - 4x \Rightarrow f(2x) = e^{2x} - 8x$$

$$\Rightarrow \int f(2x)dx = \int (e^{2x} - 8x)dx = \frac{1}{2}e^{2x} - 4x^2 + C.$$

Câu 32. (Mã 103 - 2020 Lần 2) Biết $F(x) = e^x - x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng

- A. $\frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$. B. $e^{2x} - 4x^2 + C$. C. $2e^x - 2x^2 + C$. D. $\frac{1}{2}e^{2x} - x^2 + C$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \int f(2x)dx = \frac{1}{2} \int f(2x)d(2x) = \frac{1}{2}F(2x) + C = \frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C.$$

Câu 33. (Mã 104 - 2020 Lần 2) Biết $F(x) = e^x + 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng

- A. $e^{2x} + 8x^2 + C$. B. $2e^x + 4x^2 + C$. C. $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C$. D. $\frac{1}{2}e^{2x} + 4x^2 + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$$

$$\int f(2x)dx = \frac{1}{2} \int f(t)dt = \frac{1}{2} F(t) + C = \frac{1}{2} [e^t + 2t^2] + C = \frac{1}{2} e^{2x} + (2x)^2 + C = \frac{1}{2} e^{2x} + 4x^2 + C.$$

Câu 34. [DS12.C3.1.D09.b] (Thi thử Lâmônônôxốp - Hà Nội lần V 2019) Biết

$\int f(2x)dx = \sin^2 x + \ln x + C$. Tìm nguyên hàm $\int f(x)dx$?

A. $\int f(x)dx = \sin^2 \frac{x}{2} + \ln x + C.$

B. $\int f(x)dx = 2 \sin^2 2x + 2 \ln x + C.$

C. $\int f(x)dx = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \ln x + C.$

D. $\int f(x)dx = 2 \sin^2 x + 2 \ln x + C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int f(2x)dx = \sin^2 x + \ln x + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int f(2x)d(2x) = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \ln(2x) - \ln 2 + C$

$\Leftrightarrow \int f(2x)d(2x) = 1 - \cos 2x + 2 \ln(2x) - 2 \ln 2 + 2C$

$\Leftrightarrow \int f(x)dx = 1 - \cos x + 2 \ln x - 2 \ln 2 + 2C \Leftrightarrow \int f(x)dx = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \ln x + C'.$

Câu 35. [DS12.C3.1.D09.b] Cho $\int f(4x)dx = x^2 + 3x + c$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x+2)dx = \frac{x^2}{4} + 2x + C.$

B. $\int f(x+2)dx = x^2 + 7x + C.$

C. $\int f(x+2)dx = \frac{x^2}{4} + 4x + C.$

D. $\int f(x+2)dx = \frac{x^2}{2} + 4x + C.$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết bài toán $\int f(4x)dx = x^2 + 3x + c$.

Đặt $t = 4x \Rightarrow dt = 4dx$ từ đó ta có $\frac{1}{4} \int f(t)dt = \left(\frac{t}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{t}{4}\right) + c \Rightarrow \int f(t)dt = \frac{t^2}{4} + 3t + c.$

Xét $\int f(x+2)dx = \int f(x+2)d(x+2) = \frac{(x+2)^2}{4} + 3(x+2) + c = \frac{x^2}{4} + 4x + C.$

Vậy mệnh đề đúng là $\int f(x+2)dx = \frac{x^2}{4} + 4x + C.$

Câu 36. [DS12.C3.1.D09.b] Cho $\int f(x)dx = 4x^3 + 2x + C_0$. Tính $I = \int xf(x^2)dx$.

A. $I = 2x^6 + x^2 + C.$ **B.** $I = \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^6}{6} + C.$

C. $I = 4x^6 + 2x^2 + C.$ **D.** $I = 12x^2 + 2.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $I = \int xf(x^2)dx = \frac{1}{2} \int f(x^2)dx^2 = \frac{1}{2} \left(4(x^2)^3 + 2(x^2) \right) + C = 2x^6 + x^2 + C.$

Câu 37. (Sở Bắc Ninh 2019) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+1}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} \cdot e^{x^3+1} + C.$

B. $\int f(x)dx = 3e^{x^3+1} + C.$

C. $\int f(x)dx = e^{x^3+1} + C.$ D. $\int f(x)dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C.$

Lời giải

$$\int f(x)dx = \int x^2 e^{x^3+1} dx = \frac{1}{3} \int e^{x^3+1} d(x^3+1) = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$$

Câu 38. (THPT Hà Huy Tập - 2018) Nguyên hàm của $f(x) = \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}$ là

A. $\sin^2 x \cdot e^{\sin^2 x-1} + C.$

B. $\frac{e^{\sin^2 x+1}}{\sin^2 x+1} + C.$

C. $e^{\sin^2 x} + C.$

D. $\frac{e^{\sin^2 x-1}}{\sin^2 x-1} + C.$

Lời giải

Ta có $\int \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x} dx = \int e^{\sin^2 x} d(\sin^2 x) = e^{\sin^2 x} + C$

Câu 39. Tìm tất cả các họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^9+3x^5}$

A. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$

B. $\int f(x)dx = -\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$

C. $\int f(x)dx = -\frac{1}{3x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$

D. $\int f(x)dx = -\frac{1}{12x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4+3} \right| + C$

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{1}{x^9+3x^5} dx = \int \frac{x^3}{(x^4)^2(x^4+3)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dx^4}{(x^4)^2(x^4+3)} = \frac{1}{12} \int \frac{(x^4+3)-x^4}{(x^4)^2(x^4+3)} dx^4 \\ &= \frac{1}{12} \int \frac{dx^4}{(x^4)^2} - \frac{1}{12} \int \frac{dx^4}{x^4(x^4+3)} = -\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36} \ln \left(\frac{x^4}{x^4+3} \right) + C \end{aligned}$$

Câu 40. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4+1} dx$ và $F(0) = 1.$

A. $F(x) = \ln(x^4+1) + 1.$ B. $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + \frac{3}{4}.$

C. $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + 1.$

D. $F(x) = 4 \ln(x^4+1) + 1.$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F(x) = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x^4+1} d(x^4+1) = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + C.$

Do $F(0) = 1$ nên $\frac{1}{4} \ln(0+1) + C = 1 \Leftrightarrow C = 1.$

Vậy: $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4+1) + 1.$

Câu 41. Biết $\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^b + C, x \neq -1$ với $a, b \in \mathbb{N}^*.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a = 2b$.

B. $b = 2a$.

C. $a = 2018b$.

D. $b = 2018a$.

Lời giải

Ta có:

$$\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \int \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2017} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2017} d \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{1}{4036} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{2018} + C.$$

$$\Rightarrow a = 4036, b = 2018$$

$$\text{Do đó: } a = 2b.$$

Câu 42. (Chuyên Quốc Học Huế - 2018) Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ của hàm số

$$f(x) = \frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}} \text{ thỏa mãn } F(1) = 0. \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất } m \text{ của } F(x).$$

A. $m = -\frac{1}{2}$.

B. $m = \frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}$.

C. $m = \frac{1+2^{2017}}{2^{2018}}$.

D. $m = \frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \int f(x) dx &= \int \frac{2017x}{(x^2+1)^{2018}} dx = \frac{2017}{2} \int (x^2+1)^{-2018} d(x^2+1) = \frac{2017}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{-2017}}{-2017} + C \\ &= -\frac{1}{2(x^2+1)^{2017}} + C = F(x) \end{aligned}$$

$$\text{Mà } F(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2 \cdot 2^{2017}} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2^{2018}}$$

$$\text{Do đó } F(x) = -\frac{1}{2 \cdot (x^2+1)^{2017}} + \frac{1}{2^{2018}} \text{ suy ra}$$

$$F(x) \text{ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi } \frac{1}{2(x^2+1)^{2017}} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow (x^2+1) \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Vậy } m = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2018}} = \frac{1-2^{2017}}{2^{2018}}.$$

Câu 43. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$ và $F(0) = -\ln 2e$. Tập nghiệm S của phương trình $F(x) + \ln(e^x+1) = 2$ là:

A. $S = \{3\}$

B. $S = \{2; 3\}$

C. $S = \{-2; 3\}$

D. $S = \{-3; 3\}$

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{dx}{e^x+1} = \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1} \right) dx = x - \ln(e^x+1) + C$$

$$F(0) = -\ln 2 + C = -\ln 2e \Rightarrow C = -1$$

$$PT: F(x) + \ln(e^x+1) = 2 \Leftrightarrow x - \ln(e^x+1) - 1 + \ln(e^x+1) = 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

Câu 44. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3(x^2+1)^{2019}$ là

$$\text{A. } \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} \right].$$

$$\text{B. } \frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020}.$$

$$\text{C. } \frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} + C.$$

$$\text{D. } \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} \right] + C.$$

Lời giải

$$\text{Xét } \int f(x) dx = \int x^3 (x^2+1)^{2019} dx = \int x^2 (x^2+1)^{2019} x dx.$$

Đổi biến $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx$, ta có:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \frac{1}{2} \int (t-1)t^{2019} dt = \frac{1}{2} \int (t^{2020} - t^{2019}) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{t^{2021}}{2021} - \frac{t^{2020}}{2020} \right] + C = \frac{1}{2} \left[\frac{(x^2+1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2+1)^{2020}}{2020} \right] + C. \end{aligned}$$

Câu 45. (THPT Hà Huy Tập - 2018) Nguyên hàm của $f(x) = \frac{1+\ln x}{x \cdot \ln x}$ là:

$$\text{A. } \int \frac{1+\ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |\ln x| + C.$$

$$\text{B. } \int \frac{1+\ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x^2 \cdot \ln x| + C.$$

$$\text{C. } \int \frac{1+\ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x + \ln x| + C.$$

$$\text{D. } \int \frac{1+\ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x \cdot \ln x| + C.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } I = \int f(x) dx = \int \frac{1+\ln x}{x \cdot \ln x} dx.$$

$$\text{Đặt } x \ln x = t \Rightarrow (\ln x + 1) dx = dt. \text{ Khi đó ta có } I = \int \frac{1+\ln x}{x \cdot \ln x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |x \cdot \ln x| + C.$$

Câu 46. (Chuyên Hạ Long - 2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^{x^3+1}$

$$\text{A. } \int f(x) dx = e^{x^3+1} + C. \quad \text{B. } \int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C.$$

$$\text{C. } \int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$$

$$\text{D. } \int f(x) dx = \frac{x^3}{3} e^{x^3+1} + C.$$

Lời giải

$$\text{Đặt } t = x^3 + 1 \Rightarrow dt = 3x^2 dx$$

$$\text{Do đó, ta có } \int f(x) dx = \int x^2 e^{x^3+1} dx = \int e^t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$$

$$\text{Vậy } \int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$$

Câu 47. (Chuyên Lương Văn Chánh Phú Yên 2019) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$ là

$$\text{A. } \int f(x) dx = (3x+1) \sqrt[3]{3x+1} + C.$$

$$\text{B. } \int f(x) dx = \sqrt[3]{3x+1} + C.$$

$$\text{C. } \int f(x) dx = \frac{1}{3} \sqrt[3]{3x+1} + C.$$

$$\text{D. } \int f(x) dx = \frac{1}{4} (3x+1) \sqrt[3]{3x+1} + C.$$

Lời giải

Ta có $\int f(x)dx = \frac{1}{3} \int (3x+1)^{\frac{1}{3}} d(3x+1) = \frac{1}{4} (3x+1)^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{3x+1} + C.$

Câu 48. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{3x+2}$ là

A. $\frac{2}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C$

B. $\frac{1}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C$

C. $\frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C$

D. $\frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{3x+2}} + C$

Lời giải

Chọn C

Do $\int \sqrt{3x+2} dx = \frac{1}{3} \int (3x+2)^{\frac{1}{2}} d(3x+2) = \frac{1}{3} \frac{(3x+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{9} (3x+2)\sqrt{3x+2} + C$

Câu 49. (HSG Bắc Ninh 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}$ là

A. $-\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

B. $\frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

C. $\frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

D. $\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} dx \Rightarrow t dt = dx$

$\Rightarrow \int f(x) dx = \int \sqrt{2x+1} dx = \int t^2 dx = \int t^2 \cdot t dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{3} (2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

Câu 50. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Cho hàm số $f(x) = 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}}$. Hàm số nào dưới đây **không** là nguyên hàm của hàm số $f(x)$?

A. $F(x) = 2^{\sqrt{x}} + C$

B. $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C$

C. $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C$

D. $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + C$

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} dx = \int 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} dx.$

Đặt $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx.$

Vậy $F(x) = 2 \ln 2 \cdot \int 2^u \cdot du = 2 \ln 2 \cdot \frac{2^u}{\ln 2} + C = 2^{\sqrt{x}+1} + C.$

Phương án B: $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} - 2 + C$ thỏa.

Phương án C: $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + 2 + C$ thỏa.

Câu 51. (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019) Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

A. $\int 2(u^2 - 4) du.$

B. $\int (u^2 - 4) du.$

C. $\int (u^2 - 3) du.$

D. $\int 2u(u^2 - 4) du.$

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x+1} \Rightarrow x = u^2 - 1 \Rightarrow dx = 2u du.$$

$$\text{Khi đó } \int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx \text{ trở thành } \int \frac{u^2-4}{u} \cdot 2u du = \int 2(u^2-4) du.$$

Câu 52. (Chuyên Hạ Long - 2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

B. $\int f(x)dx = \sqrt{2x+1} + C.$

C. $\int f(x)dx = 2\sqrt{2x+1} + C.$

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C.$

Lời giải

$$\text{Đặt } \sqrt{2x+1} = t \Rightarrow 2x+1 = t^2 \Rightarrow dx = t dt.$$

$$\text{Khi đó ta có } \int \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{t dt}{t} = \frac{1}{2} \int dt = \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$$

Câu 53. (THCS - THPT Nguyễn Khuyến - 2018) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ là

A. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \sqrt{x^2+1} + C.$

B. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} + C.$

C. $F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$

D. $F(x) = x^2 \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$

Lời giải

$$\text{Đặt } t = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow t = \frac{(x + \sqrt{x^2+1})(x - \sqrt{x^2+1})}{x - \sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x - \sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \frac{1}{t} = \sqrt{x^2+1} - x.$$

$$t - \frac{1}{t} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right); t + \frac{1}{t} = 2\sqrt{x^2+1}$$

$$\int f(x) dx = \int \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx = \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \ln t dt = \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \ln t dt = I.$$

$$\text{Đặt } u = \ln t \rightarrow du = \frac{1}{t} dt$$

$$dv = \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) dt \rightarrow v = t - \frac{1}{t};$$

$$I = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \ln t - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \left(t - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \ln t - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \ln t - \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) + C$$

$$= x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} + C.$$

Câu 54. (Chuyên Hạ Long - 2018) Biết rằng trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty \right)$, hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$ có

một nguyên hàm $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ (a, b, c là các số nguyên). Tổng $S = a + b + c$ bằng

A. 4.

B. 3.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2x-3} \Rightarrow t^2 = 2x-3 \Rightarrow dx = t dt$$

Khi đó

$$\begin{aligned}\int \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}} dx &= \int \frac{20\left(\frac{t^2+3}{2}\right)^2 - 30\left(\frac{t^2+3}{2}\right) + 7}{t} t dt = \int (5t^4 + 15t^2 + 7) dt = t^5 + 5t^3 + 7t + C \\ &= \sqrt{(2x-3)^5} + 5\sqrt{(2x-3)^3} + 7\sqrt{2x-3} + C = (2x-3)^2 \sqrt{2x-3} + 5(2x-3)\sqrt{2x-3} + 7\sqrt{2x-3} + C \\ &= (4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C\end{aligned}$$

Vậy $F(x) = (4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3}$. Suy ra $S = a + b + c = 3$.

Câu 55. (Chuyên Bắc Ninh 2019) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln |1 + 3 \cos x| + C$.

B. $\int f(x) dx = \ln |1 + 3 \cos x| + C$.

C. $\int f(x) dx = 3 \ln |1 + 3 \cos x| + C$.

D. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} \ln |1 + 3 \cos x| + C$.

Lời giải

Ta có: $\int \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{1 + 3 \cos x} d(1 + 3 \cos x) = -\frac{1}{3} \ln |1 + 3 \cos x| + C$.

Câu 56. (Sở Thanh Hóa 2019) Tìm các hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2}$.

A. $f(x) = \frac{\sin x}{(2 + \sin x)^2} + C$.

B. $f(x) = \frac{1}{(2 + \cos x)} + C$.

C. $f(x) = -\frac{1}{2 + \sin x} + C$.

D. $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \sin x} + C$.

Lời giải

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2} dx = \int \frac{d(2 + \sin x)}{(2 + \sin x)^2} = -\frac{1}{2 + \sin x} + C$.

Câu 57. (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$f(x) = \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Tính $F(0)$.

A. $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 2 + 2$. B. $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2$. C. $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 - 2$. D. $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 2 - 2$.

Lời giải

Ta có $F(x) = \int \frac{\sin x dx}{1 + 3 \cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{3 \cos x + 1} = -\frac{1}{3} \ln |3 \cos x + 1| + C$.

mà $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3} \ln \left|3 \cos \left(\frac{\pi}{2}\right) + 1\right| + C = 2 \Rightarrow C = 2$.

Do đó, $F(0) = -\frac{1}{3} \ln |3 \cos(0) + 1| + 2 = -\frac{1}{3} \ln 4 + 2 = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2$.

Vậy $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2$.

Câu 58. (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019) Biết $\int f(x) dx = 3x \cos(2x-5) + C$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $\int f(3x)dx = 3x \cos(6x-5) + C$

B. $\int f(3x)dx = 9x \cos(6x-5) + C$

C. $\int f(3x)dx = 9x \cos(2x-5) + C$

D. $\int f(3x)dx = 3x \cos(2x-5) + C$

Lời giải

Cách 2:

Đặt $x = 3t \Rightarrow dx = 3dt$.

Khi đó: $\int f(x)dx = 3x \cos(2x-5) + C$

$$\Leftrightarrow 3 \int f(3t)dt = 3.(3t) \cos(2.3t-5) + C \Leftrightarrow \int f(3t)dt = 3t \cos(6t-5) + C$$

$$\Leftrightarrow \int f(3x)dx = 3x \cos(6x-5) + C.$$

Câu 59. (Chuyên Hạ Long - 2018) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^5 x$.

A. $\int f(x)dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x| + C$.

B. $\int f(x)dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + C$.

C. $\int f(x)dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x| + C$.

D. $\int f(x)dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + C$.

Lời giải

$$I = \int f(x)dx = \int \tan^5 x dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx$$

$$= \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x) \cdot (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x}{\cos^5 x} dx$$

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \quad I = \int \frac{(1-t^2) \cdot (1-t^2)}{t^5} (-dt) = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^5} (-dt)$$

$$= \int \left(-\frac{1}{t^5} + \frac{2}{t^3} - \frac{1}{t} \right) dt = \int \left(-t^{-5} + 2t^{-3} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{4} t^{-4} - t^{-2} - \ln|t| + C$$

$$= \frac{1}{4} \cos x^{-4} - \cos x^{-2} - \ln|\cos x| + C = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\cos x^4} - \frac{1}{\cos x^2} - \ln|\cos x| + C$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (\tan^2 x + 1)^2 - (\tan^2 x + 1) - \ln|\cos x| + C$$

$$= \frac{1}{4} (\tan^4 x + 2 \tan^2 x + 1) - (\tan^2 x + 1) - \ln|\cos x| + C$$

$$= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + \frac{1}{4} + C$$

$$= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + C.$$

Câu 60. (Hồng Bàng - Hải Phòng - 2018) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x \text{ và } F(0) = \pi. \text{ Tính } F\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

A. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$. B. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$. C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi$. D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi$.

Lời giải

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \sin^3 x \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

$$F(0) = \pi \Rightarrow \frac{\sin^4 \pi}{4} + C = \pi \Leftrightarrow C = \pi \Rightarrow F(x) = \frac{\sin^4 x}{4} + \pi.$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin^4 \frac{\pi}{2}}{4} = \frac{1}{4} + \pi.$$

Câu 61. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{e}\right) = 2$ và $F(e) = \ln 2$.

Giá trị của biểu thức $F\left(\frac{1}{e^2}\right) + F(e^2)$ bằng

A. $-3 \ln 2 + 2$. B. $\ln 2 + 2$. C. $\ln 2 + 1$. D. $2 \ln 2 + 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln |\ln x| + C, x > 0, x \neq 1.$

Nên: $F(x) = \begin{cases} \ln(\ln x) + C_1 & \text{ khi } x > 1 \\ \ln(-\ln x) + C_2 & \text{ khi } 0 < x < 1 \end{cases}.$

Mà $F\left(\frac{1}{e}\right) = 2$ nên $\ln\left(-\ln \frac{1}{e}\right) + C_2 = 2 \Leftrightarrow C_2 = 2$; $F(e) = \ln 2$ nên $\ln(\ln e) + C_1 = \ln 2 \Leftrightarrow C_1 = \ln 2$.

Suy ra $F(x) = \begin{cases} \ln(\ln x) + \ln 2 & \text{ khi } x > 1 \\ \ln(-\ln x) + 2 & \text{ khi } 0 < x < 1 \end{cases}.$

Vậy $F\left(\frac{1}{e^2}\right) + F(e^2) = \ln\left(-\ln \frac{1}{e^2}\right) + 2 + \ln(\ln e^2) + \ln 2 = 3 \ln 2 + 2.$

Câu 62. (Chuyên Nguyễn Huệ-HN 2019) Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ thỏa

mãn $F(2) = 0$. Khi đó phương trình $F(x) = x$ có nghiệm là:

A. $x = 0$. B. $x = 1$. C. $x = -1$. D. $x = 1 - \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int \frac{x}{\sqrt{8-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int (8-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(8-x^2) = -\sqrt{8-x^2} + C.$

Mặt khác: $F(2) = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{8-2^2} + C = 0 \Leftrightarrow C = 2.$

Nên $F(x) = -\sqrt{8-x^2} + 2.$

$$F(x) = x \Leftrightarrow -\sqrt{8-x^2} + 2 = x \Leftrightarrow \sqrt{8-x^2} = 2-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 8-x^2 = (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ -2x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = 1 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Câu 63. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x^2}$. Biết $F(3) = 6$, giá trị của $F(8)$ là

A. $\frac{217}{8}$.

B. 27.

C. $\frac{215}{24}$.

D. $\frac{215}{8}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \int f(x) dx = \int \left(\frac{2x}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int \left(\frac{2(x+1)-2}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= 2 \int \sqrt{x+1} dx - 2 \int \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx - \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$= 2 \int (x+1)^{\frac{1}{2}} d(x+1) - 2 \int (x+1)^{-\frac{1}{2}} d(x+1) - \int x^{-2} dx$$

$$= \frac{4(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{x+1} + \frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \frac{4(x+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{x+1} + \frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Mặt khác: } F(3) = 6 \Leftrightarrow 6 = \frac{4(3+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{3+1} + \frac{1}{3} + C \Leftrightarrow C = 3.$$

$$\text{Vậy } F(8) = \frac{4(8+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{8+1} + \frac{1}{8} + 3 = \frac{217}{8}.$$

Câu 64. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ là

A. $(4x^2 + 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C.$

B. $(4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3}.$

C. $(3x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3}.$

D. $(4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C.$

Lời giải

Chọn D

Xét trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, ta có:

$$\int f(x) dx = \int \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}} dx = \int \frac{10x(2x-3) + 7}{\sqrt{2x-3}} dx.$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{2x-3} \Rightarrow u^2 = 2x-3 \Rightarrow 2u du = 2dx \Rightarrow u du = dx.$$

Khi đó:

$$\int \frac{10x(2x-3) + 7}{\sqrt{2x-3}} dx = \int \frac{5(u^2 + 3)u^2 + 7}{u} u du = \int [5(u^2 + 3)u^2 + 7] du = \int [5u^4 + 15u^2 + 7] du$$

$$= u^5 + 5u^3 + 7u + C = (u^4 + 5u^2 + 7)u + C = [(2x-3)^2 + 5(2x-3) + 7]\sqrt{2x-3} + C$$

$$= (4x^2 - 2x + 1)\sqrt{2x-3} + C.$$

Câu 65. (Chuyên Hạ Long - 2023) Tìm họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2 - 4}$.

A. $\frac{1}{4} \ln \left(\frac{2 + \sin x + \cos x}{2 - \sin x - \cos x} \right) + C.$

B. $-\frac{1}{4} \ln \left(\frac{2 + \sin x + \cos x}{2 - \sin x - \cos x} \right) + C.$

C. $\frac{1}{4} \ln \left(\frac{2 + \sin x - \cos x}{2 - \sin x + \cos x} \right) + C.$

D. $\frac{1}{4} \ln \left(\frac{\sin x + \cos x + 2}{\sin x + \cos x - 2} \right) + C.$

Lời giải

Chọn A

$$\int f(x) dx = \int \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2 - 4} dx$$

$$\text{Đặt } \sin x + \cos x = t \Rightarrow (\sin x - \cos x) dx = -dt$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = -\int \frac{dt}{t^2 - 4} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t-2} \right) dt = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+2}{t-2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \frac{2 + \sin x + \cos x}{2 - \sin x - \cos x} + C.$$

Dạng 3. Nguyên hàm của hàm số hữu tỉ

1. Công thức thường áp dụng

$$\bullet \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C. \bullet \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax+b} + C.$$

$$\bullet \ln a + \ln b = \ln(ab). \bullet \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}.$$

$$\bullet \ln a^n = n \ln a. \bullet \ln 1 = 0.$$

2. Phương pháp tính nguyên hàm, tích phân của hàm số hữu tỷ $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$.

• Nếu bậc của tử số $P(x) \geq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ Chia đa thức.

• Nếu bậc của tử số $P(x) <$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ phân tích mẫu $Q(x)$ thành tích số, rồi sử dụng phương pháp che để đưa về công thức nguyên hàm số 01.

• Nếu mẫu không phân tích được thành tích số $\xrightarrow{PP}$ thêm bớt để đổi biến hoặc lượng giác hóa bằng cách đặt $X = a \tan t$, nếu mẫu đưa được về dạng $X^2 + a^2$.

Câu 66. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ trên khoảng

$(1; +\infty)$ là

A. $x + 3 \ln(x-1) + C.$ **B.** $x - 3 \ln(x-1) + C.$

C. $x - \frac{3}{(x-1)^2} + C.$ **D.** $x + \frac{3}{(x-1)^2} + C.$

Lời giải

Chọn A

Trên khoảng $(1; +\infty)$ thì $x-1 > 0$ nên

$$\int f(x) dx = \int \frac{x+2}{x-1} dx = \int \left(1 + \frac{3}{x-1} \right) dx = x + 3 \ln |x-1| + C = x + 3 \ln(x-1) + C.$$

Câu 67. (Mã đề 104 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng $(2; +\infty)$ là

- A. $3\ln(x-2) + \frac{2}{x-2} + C$ B. $3\ln(x-2) - \frac{2}{x-2} + C$
 C. $3\ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C$ D. $3\ln(x-2) + \frac{4}{x-2} + C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2} = \frac{3(x-2)+4}{(x-2)^2} = \frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}$. Do đó

$$\int \frac{3x-2}{(x-2)^2} dx = \int \left(\frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \right) dx = 3\ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C.$$

Câu 68. (Mã đề 101 - BGD - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

- A. $2\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C.$ B. $2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$
 C. $2\ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C.$ D. $2\ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \int f(x) dx = \int \frac{2x-1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2} dx = \int \left[\frac{2}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} \right] dx = 2\ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$$

Câu 69. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x+2}$ là

- A. $\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C.$ B. $2\ln|x+1| + \ln|x+2| + C.$
 C. $2\ln|x+1| - \ln|x+2| + C.$ D. $-\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + C.$

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x+2} = \frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

Suy ra họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x+2}$ là

Câu 70. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số

$f(x) = ax + \frac{b}{x^2} (x \neq 0)$, biết rằng $F(-1) = 1, F(1) = 4, f(1) = 0$

- A. $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}.$ B. $F(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}.$
 C. $F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}.$ D. $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}.$

Lời giải

Ta có $F(x) = \int f(x) dx = \int \left(ax + \frac{b}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2} ax^2 - \frac{b}{x} + C.$

Theo bài ra $\begin{cases} F(-1)=1 \\ F(1)=4 \\ f(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a+b+C=1 \\ \frac{1}{2}a-b+C=4 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\frac{3}{2} \\ a=\frac{3}{2} \\ C=\frac{7}{4} \end{cases}.$

Vậy $F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}.$

Câu 71. Cho biết $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = a \ln|x+1| + b \ln|x-2| + C.$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $a+2b=8.$ **B.** $a+b=8.$ **C.** $2a-b=8.$ **D.** $a-b=8.$

Lời giải

Ta có: $\frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)x+(-2A+B)}{(x+1)(x-2)}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ -2A+B=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=5 \\ B=-3 \end{cases}.$

Khi đó: $\int \frac{2x-13}{(x+1)(x-2)} dx = \int \left(\frac{5}{x+1} - \frac{3}{x-2} \right) dx = 5 \ln|x+1| - 3 \ln|x-2| + C.$

Suy ra $a=5; b=-3$ nên $a-b=8.$

Câu 72. Cho biết $\int \frac{1}{x^3-x} dx = a \ln|(x-1)(x+1)| + b \ln|x| + C.$ Tính giá trị biểu thức: $P=2a+b.$

- A.** 0. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{2}.$ **D.** 1.

Lời giải

Ta có:

$\frac{1}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{D}{x+1} = \frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Dx(x-1)}{x^3-x} = \frac{(A+B+D)x^2+(B-D)x-A}{x^3-x}$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B+D=0 \\ B-D=0 \\ -A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=\frac{1}{2} \\ D=\frac{1}{2} \end{cases}.$

Khi đó: $\int \frac{1}{x^3-x} dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} \right) dx = \frac{1}{2} \ln|(x-1)(x+1)| - \ln|x| + C.$

Suy ra $a=\frac{1}{2}; b=-1$ nên $P=2a+b=0.$

Câu 73. Cho biết $\int \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx = a \ln|x+2| + b \ln|x+3| + C.$ Tính giá trị biểu thức: $P=a^2+ab+b^2.$

- A.** 12. **B.** 13. **C.** 14. **D.** 15.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{4x+11}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{(A+B)x+(3A+2B)}{(x+2)(x+3)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=4 \\ 3A+2B=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=1 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó: } \int \frac{4x+11}{x^2+5x+6} dx = \int \left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right) dx = 3 \ln|x+2| + \ln|x+3| + C.$$

$$\text{Suy ra } a=3; b=1 \text{ nên } P=a^2+ab+b^2=13.$$

Câu 74. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}$, $f'(1)=3$, $f(1)=2$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$. Khi đó $2a+b$ bằng

A. $-\frac{3}{2}$.

B. 0.

C. 5.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(1)=3 \Rightarrow a+b=3 \quad (1).$$

Hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0;+\infty)$, các điểm $x=1$, $x=\frac{1}{2}$ đều thuộc $(0;+\infty)$ nên

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(ax^2 + \frac{b}{x^3} \right) dx = \frac{ax^3}{3} - \frac{b}{2x^2} + C.$$

$$+ f(1)=2 \Rightarrow \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + C = 2 \quad (2).$$

$$+ f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{a}{24} - 2b + C = -\frac{1}{12} \quad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b=3 \\ \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + C = 2 \\ \frac{a}{24} - 2b + C = -\frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ C=\frac{11}{6} \end{cases} \Rightarrow 2a+b=2.2+1=5.$$

Câu 75. (Mã 102 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. $3\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} + c$. B. $3\ln(x-1) + \frac{2}{x-1} + c$.

C. $3\ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + c$. D. $3\ln(x-1) + \frac{1}{x-1} + c$.

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{3x-3+2}{(x-1)^2} = \frac{3(x-1)+2}{(x-1)^2} = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

$$\text{Vậy } \int f(x) dx = \int \left(\frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} \right) dx = 3 \int \frac{d(x-1)}{x-1} + 2 \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= 3\ln|x-1| + 2\int (x-1)^{-2} d(x-1) = 3\ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C \text{ vì } x > 1.$$

Câu 76. (Mã 103 - 2019) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2; +\infty)$ là

A. $2\ln(x+2) + \frac{3}{x+2} + C.$

B. $2\ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C.$

C. $2\ln(x+2) - \frac{1}{x+2} + C.$

D. $2\ln(x+2) - \frac{3}{x+2} + C.$

Lời giải

Chọn B

Đặt $x+2=t \Rightarrow x=t-1 \Rightarrow dx=dt$ với $t > 0$

Ta có $\int f(x)dx = \int \frac{2t-1}{t^2} dt = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt = 2\ln t + \frac{1}{t} + C$

Hay $\int f(x)dx = 2\ln(x+2) + \frac{1}{x+2} + C.$

Câu 77. (THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số

$f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $F(1) = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức

$S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019)$ bằng

A. $\frac{2019}{2020}.$

B. $\frac{2019 \cdot 2021}{2020}.$

C. $2018 \frac{1}{2020}.$

D. $-\frac{2019}{2020}.$

Lời giải

Ta có $f(x) = \frac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}.$

Đặt $t = x(x+1) = x^2 + x \Rightarrow dt = (2x+1)dx.$

Khi đó $F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{x(x+1)} + C.$

Mặt khác, $F(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} + C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 1.$

Vậy $F(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + 1.$

Suy ra

$$\begin{aligned} S &= F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019) = -\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2019 \cdot 2020} \right) + 2019 \\ &= -\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020} \right) + 2019 = -\left(1 - \frac{1}{2020} \right) + 2019 \\ &= 2018 + \frac{1}{2020} = 2018 \frac{1}{2020}. \end{aligned}$$

Câu 78. Giả sử $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{g(x)} + C$ (C là hằng số).

Tính tổng các nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

A. -1.

B. 1.

C. 3.

D. -3.

Lời giải

Ta có $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 = [(x^2+3x)+1]^2$.

Đặt $t = x^2 + 3x$, khi đó $dt = (2x+3)dx$.

Tích phân ban đầu trở thành $\int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1} + C$.

Trở lại biến x , ta có $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{x^2+3x+1} + C$.

Vậy $g(x) = x^2 + 3x + 1$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng -3.

Câu 79. (Nam Trực - Nam Định - 2018) Cho $I = \int \frac{1}{x^3(1+x^2)} dx = \frac{-a}{x^2} - b \ln|x| + 2c \ln(1+x^2) + C$. Khi

đó $S = a + b + c$ bằng

A. $-\frac{1}{4}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. $\frac{7}{4}$.

D. 2.

Lời giải

$$I = \int \frac{x}{x^4(1+x^2)} dx$$

$$t = 1 + x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(t-1)^2 \cdot t} dt = \frac{1}{2} \int \left(\frac{-1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2} \left(-\ln|t-1| - \frac{1}{t-1} + \ln|t| \right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\ln|x^2| - \frac{1}{x^2} + \ln|1+x^2| \right) + C = -\frac{1}{2x^2} - \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow S = a + b + c = \frac{7}{4}.$$

Câu 80. (Trường VINSCHOOL - 2020) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $R \setminus \{-1; 1\}$ thỏa mãn

$f'(x) = \frac{1}{x^2-1}$. Biết $f(3) + f(-3) = 4$ và $f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{-1}{3}\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-5) + f(0) + f(2)$ bằng

A. $5 - \frac{1}{2} \ln 2$.

B. $6 - \frac{1}{2} \ln 2$.

C. $5 + \frac{1}{2} \ln 2$.

D. $6 + \frac{1}{2} \ln 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$ với $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

$$\text{Khi đó: } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_1 & \text{ khi } x > 1 \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_2 & \text{ khi } -1 < x < 1 \\ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_3 & \text{ khi } x < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(3) + f(-3) = C_1 + C_3 = 4 \\ f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 4 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

Vậy $f(-5) + f(0) + f(2) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} + C_3 + C_2 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} + C_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + 5 = 5 - \frac{1}{2} \ln 2$.

Câu 81. (Quảng Xương - Thanh Hóa - 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ thỏa mãn

$f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$, $f(-3) - f(3) = 0$ và $f(0) = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4) + f(-1) - f(4)$ bằng

A. $\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}$.

B. $\ln 80 + 1$.

C. $\frac{1}{3} \ln \frac{4}{5} + \ln 2 + 1$.

D. $\frac{1}{3} \ln \frac{8}{5} + 1$.

Lời giải

$$f(x) = \int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx = \begin{cases} \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_1, \forall x \in (-\infty; -2) \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_2, \forall x \in (-2; 1) \\ \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C_3, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Ta có $f(-3) = \frac{1}{3} \ln 4 + C_1, \forall x \in (-\infty; -2)$, $f(0) = \frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} + C_2, \forall x \in (-2; 1)$,

$f(3) = \frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} + C_3, \forall x \in (1; +\infty)$,

Theo giả thiết ta có $f(0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow C_2 = \frac{1}{3}(1 + \ln 2)$.

$\Rightarrow f(-1) = \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}$.

Và $f(-3) - f(3) = 0 \Leftrightarrow C_1 - C_3 = \frac{1}{3} \ln \frac{1}{10}$.

Vậy $f(-4) + f(-1) - f(4) = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{2} + C_1 + \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 2 - C_2 = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}$.

Câu 82. (Chuyên Nguyễn Quang Diêu - Đồng Tháp - 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$. Tính $S = (f(3) - 2018)(f(-1) - 2017)$.

A. $S = 1$.

B. $S = 1 + \ln^2 2$.

C. $S = 2 \ln 2$.

D. $S = \ln^2 2$.

Lời giải

Ta có $f(x) = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C = \begin{cases} \ln(x-1) + C_1 & \text{ khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + C_2 & \text{ khi } x < 1 \end{cases}$.

Lại có $f(0) = 2017 \Rightarrow \ln(1-0) + C_2 = 2017 \Rightarrow C_2 = 2017$.

$f(2) = 2018 \ln(2-1) + C_1 = 2018 \Rightarrow C_1 = 2018$.

Do đó $S = [\ln(3-1) + 2018 - 2018][\ln(1-(-1)) + 2017 - 2017] = \ln^2 2$.

Câu 83. (Sở Phú Thọ - 2018) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$,

$f(-2) + f(2) = 0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Tính $f(-3) + f(0) + f(4)$ được kết quả

A. $\ln \frac{6}{5} + 1$.

B. $\ln \frac{6}{5} - 1$.

C. $\ln \frac{4}{5} + 1$.

D. $\ln \frac{4}{5} - 1$.

Lời giải

Ta có $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{2}{x^2 - 1} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \begin{cases} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_1 & \text{ khi } x < -1 \\ \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_2 & \text{ khi } -1 < x < 1 \\ \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C_3 & \text{ khi } x > 1 \end{cases}$

Khi đó $\begin{cases} f(-2) + f(2) = 0 \\ f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln 3 + C_1 + \ln \frac{1}{3} + C_3 = 0 \\ \ln 3 + C_2 + \ln \frac{1}{3} + C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_3 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$

Do đó $f(-3) + f(0) + f(4) = \ln 2 + C_1 + C_2 + \ln \frac{3}{5} + C_3 = \ln \frac{6}{5} + 1$.

Câu 84. (Liên trường Hà Tĩnh - 2022) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$ thỏa mãn

$f'(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}$; $f(-3) - f(3) = 0$ và $f(0) = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4) + f(1) - f(4)$ bằng

A. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 2$.

B. $1 + \ln 5$.

C. $\frac{1}{3} - \ln 2$.

D. $1 + \frac{1}{3} \ln \frac{8}{5}$.

Lời giải

$f(x) = \int \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C = \begin{cases} \frac{1}{3} \ln \frac{x-2}{x+1} + C_1 & \text{ khi } x > 2 \\ \frac{1}{3} \ln \left(\frac{2-x}{x+1} \right) + C_2 & \text{ khi } -1 < x < 2 \\ \frac{1}{3} \ln \frac{x-2}{x+1} + C_3 & \text{ khi } x < -1 \end{cases}$

$$\text{Khi đó: } f(-3) - f(-4) = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{4}; f(4) - f(3) = \frac{1}{3} \ln \frac{8}{5}$$

$$f(-3) - f(-4) + f(4) - f(3) = \frac{1}{3} \ln 2 \Rightarrow f(-4) - f(4) = -\frac{1}{3} \ln 2$$

$$\text{Mặt khác } f(1) - f(0) = \frac{1}{3} \ln \frac{1}{4} \Rightarrow f(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln \frac{1}{4}$$

$$\text{Do đó } f(-4) + f(1) - f(4) = \frac{1}{3} - \ln 2.$$

Câu 85. (THPT Nguyễn Hiền - 2023) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn

$$f'(x) = \frac{1}{x-1}, f(0) = 2022, f(2) = 2023. \text{ Tính } S = f(3) - f(-1).$$

A. $S = \ln 4035$. B. $S = \ln 2$. C. $S = 4$. **D. $S = 1$.**

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } f(x) = \int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1| + C = \begin{cases} \ln(x-1) + C_1 & \text{khi } x > 1 \\ \ln(1-x) + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Do } f(2) = 2023 \Rightarrow \ln(2-1) + C_1 = 2023 \Rightarrow C_1 = 2023 \Rightarrow f(3) = \ln 2 + 2023.$$

$$\text{Mặt khác } f(0) = 2022 \Rightarrow \ln(1-0) + C_2 = 2022 \Rightarrow C_2 = 2022 \Rightarrow f(-1) = \ln 2 + 2022.$$

$$\text{Từ đó ta có: } S = f(3) - f(-1) = 1.$$

Câu 86. (Chuyên Hạ Long - 2023) Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+2x^3-10x^2-2x+1}$ có dạng

$$F(x) = \frac{a}{b} \ln \left| \frac{x^2-cx-1}{x^2+dx-1} \right|, \text{ trong đó } a, b, c, d \text{ là các số nguyên dương và phân số } \frac{a}{b} \text{ tối giản. Tính}$$

$$a+b+c+d.$$

A. 24.

B. 21.

C. 15.

D. 13.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{x^4+2x^3-10x^2-2x+1} dx &= \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+2x-10-2\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x-\frac{1}{x}\right)-8} \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{\left(x-\frac{1}{x}+4\right)-\left(x-\frac{1}{x}-2\right)}{\left(x-\frac{1}{x}-2\right)\left(x-\frac{1}{x}+4\right)} d\left(x-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{6} \int \left[\frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{x-\frac{1}{x}-2} - \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{x-\frac{1}{x}+4} \right] \\ &= \frac{1}{6} \ln \left| x-\frac{1}{x}-2 \right| - \frac{1}{6} \ln \left| x-\frac{1}{x}+4 \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-\frac{1}{x}-2}{x-\frac{1}{x}+4} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x^2-2x-1}{x^2+4x-1} \right| + C. \end{aligned}$$

Dạng 4. Nguyên hàm từng phần

Cho hai hàm số u và v liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$. Khi đó:

$$\int u dv = uv - \int v du (*)$$

Để tính tích phân $I = \int_a^b f(x) dx$ bằng phương pháp từng phần ta làm như sau:

Bước 1: Chọn u, v sao cho $f(x) dx = u dv$ (chú ý: $dv = v'(x) dx$).

Tính $v = \int dv$ và $du = u' \cdot dx$.

Bước 2: Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.

Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ dễ tính hơn

$\int u dv$. Ta thường gặp các dạng sau

Dạng 1: $I = \int P(x) \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức

Với dạng này, ta đặt $u = P(x)$, $dv = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx$.

Dạng 2: $I = \int (x) e^{ax+b} dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases}$, trong đó $P(x)$ là đa thức

Dạng 3: $I = \int P(x) \ln(mx+n) dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \ln(mx+n) \\ dv = P(x) dx \end{cases}$.

Dạng 4: $I = \int \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} e^x dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$ để tính $\int v du$ ta đặt $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$.

Câu 87. (Mã 101 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số

$g(x) = (x+1) \cdot f'(x)$ là

- A. $\frac{x^2+2x-2}{2\sqrt{x^2+2}} + C$. B. $\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}} + C$. C. $\frac{x^2+x+2}{\sqrt{x^2+2}} + C$. D. $\frac{x+2}{2\sqrt{x^2+2}} + C$.

Lời giải

Chọn B.

$$\begin{aligned} \text{Tính } g(x) &= \int (x+1)f'(x) dx = (x+1)f(x) - \int (x+1)' f(x) dx = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2}} - \int f(x) dx \\ &= \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2}} - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{x^2+2} + C = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}} + C. \end{aligned}$$

Câu 88. (Mã 102 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số

$g(x) = (x+1)f'(x)$ là

- A. $\frac{x^2+2x-3}{2\sqrt{x^2+3}} + C$. B. $\frac{x+3}{2\sqrt{x^2+3}} + C$. C. $\frac{2x^2+x+3}{\sqrt{x^2+3}} + C$. **D. $\frac{x-3}{\sqrt{x^2+3}} + C$.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \int (x+1)f'(x)dx = (x+1)f(x) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+3}} + C.$$

Câu 89. (Mã 103 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số

$g(x) = (x+1)f'(x)$

- A. $\frac{x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+1}} + C$. B. $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$. C. $\frac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}} + C$. **D. $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + C$.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } \int g(x)dx = \int (x+1)f'(x)dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \int g(x)dx = (x+1)f(x) - \int f(x)dx \Rightarrow \int g(x)dx = \frac{(x+1)x}{\sqrt{x^2+1}} - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

$$\Rightarrow \int g(x)dx = \frac{(x+1)x}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+1} + C \Rightarrow \int g(x)dx = \frac{x^2+x-x^2-1}{\sqrt{x^2+1}} + C$$

$$\Rightarrow \int g(x)dx = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

Câu 90. (Mã 104 - 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số

$g(x) = (x+1)f'(x)$ là

- A. $\frac{x+4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$. B. $\frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}} + C$. C. $\frac{x^2+2x-4}{2\sqrt{x^2+4}} + C$. **D. $\frac{2x^2+x+4}{\sqrt{x^2+4}} + C$.**

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{x' \cdot \sqrt{x^2+4} - \left(\sqrt{x^2+4}\right)' \cdot x}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+4} - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \cdot x}{x^2+4} = \frac{\frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4} = \frac{4}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^3}$$

$$\text{Suy ra: } g(x) = (x+1)f'(x) = x.f'(x) + f'(x)$$

$$\int g(x)dx = \int [x.f'(x) + f'(x)]dx = \int x.f'(x)dx + \int f'(x)dx$$

$$= \int \frac{4x}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^3} dx + \int f'(x) dx$$

$$\text{Xét: } I = \int \frac{4x}{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^3} dx$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 4 \Rightarrow dt = 2x dx$$

$$\text{Suy ra: } I = \int \frac{2dt}{\left(\sqrt{t}\right)^3} = \int \frac{2dt}{t^{\frac{3}{2}}} = 2 \int t^{-\frac{3}{2}} dt = 2 \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C_1 = \frac{-4}{\sqrt{t}} + C_1 = \frac{-4}{\sqrt{x^2+4}} + C_1$$

$$\text{và: } J = \int f'(x) dx = f(x) + C_2$$

$$\text{Vậy: } \int g(x) dx = \frac{-4}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + C = \frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}} + C.$$

$$\text{Cách 2: } g(x) = (x+1)f'(x)$$

$$\Rightarrow \int g(x) dx = \int (x+1)f'(x) dx$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x+1 \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } \int g(x) dx &= (x+1)f(x) - \int f(x) dx = \frac{(x+1)x}{\sqrt{x^2+4}} - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx \\ &= \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+4}} - \int \frac{d(x^2+4)}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+4}} - \sqrt{x^2+4} + C = \frac{x-4}{\sqrt{x^2+4}} + C. \end{aligned}$$

Câu 91. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là:

A. $-\sin 2x + \cos 2x + C$. **B.** $-2 \sin 2x + \cos 2x + C$.

C. $-2 \sin 2x - \cos 2x + C$.

D. $2 \sin 2x - \cos 2x + C$.

Lời giải

Chọn C

Do $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$

$$\text{nên } f(x)e^x = (\cos 2x)' \Leftrightarrow f(x)e^x = -2 \sin 2x.$$

$$\text{Khi đó ta có } \int f(x)e^x dx = \cos 2x + C.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x) dx \\ v = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \int f(x)e^x dx = \cos 2x + C \Leftrightarrow \int f(x) d(e^x) = \cos 2x + C$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^x - \int f'(x)e^x dx = \cos 2x + C \Leftrightarrow \int f'(x)e^x dx = -2 \sin 2x - \cos 2x + C.$$

Vậy tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là $-2 \sin 2x - \cos 2x + C$.

Câu 92. (Đề Tham Khảo 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là:

- A. $2x^2 \ln x + 3x^2$. B. $2x^2 \ln x + x^2$.
C. $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$. D. $2x^2 \ln x + x^2 + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x) = 4x(1 + \ln x) \Rightarrow F(x) = \int (4x(1 + \ln x)) dx$

đặt

$$\begin{cases} u = 1 + \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} \\ dv = 4x \Rightarrow v = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow F(x) = 2x^2(1 + \ln x) - \int 2x dx = 2x^2(1 + \ln x) - x^2 + C = 2x^2 \ln x + x^2 + C$$

Câu 93. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ là

- A. $F(x) = x \cos x + \sin x + C$. B. $F(x) = x \cos x - \sin x + C$.
C. $F(x) = -x \cos x - \sin x + C$. D. $F(x) = -x \cos x + \sin x + C$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Câu 94. (Chuyên Phan Bội Châu 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$ là :

- A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$ B. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} (x - 2) + C$
C. $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C$ D. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int x.e^{2x} dx = \frac{1}{2}x.e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx$$

$$\Rightarrow \int x.e^{2x} dx = \frac{1}{2}x.e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C$$

Câu 95. (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x - 1)e^x$ là

- A. $(2x - 3)e^x + C$. B. $(2x + 3)e^x + C$.
C. $(2x + 1)e^x + C$. D. $(2x - 1)e^x + C$.

Lời giải

$$\text{Gọi } I = \int (2x - 1)e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x - 1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = (2x - 1)e^x - 2 \int e^x dx = (2x - 1)e^x - 2e^x + C = (2x - 3)e^x + C.$$

Câu 96. (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019) Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{2x}$?

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}(x - 2) + C.$

C. $F(x) = 2e^{2x}(x - 2) + C.$

D. $F(x) = 2e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$

Lời giải

Ta có $F(x) = \int xe^{2x} dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Suy ra $F(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$

Câu 97. (Chuyên Sơn La 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(1 + \sin x)$ là

A. $\frac{x^2}{2} - x \sin x + \cos x + C.$

B. $\frac{x^2}{2} - x \cos x + \sin x + C.$

C. $\frac{x^2}{2} - x \cos x - \sin x + C.$

D. $\frac{x^2}{2} - x \sin x - \cos x + C.$

Lời giải

Ta có: $\int f(x) dx = \int x(1 + \sin x) dx = \int x dx + \int x \sin x dx = \int x dx - \int x d(\cos x)$

$= \frac{x^2}{2} - \left(x \cos x - \int \cos x dx\right) = \frac{x^2}{2} - x \cos x + \sin x + C.$

Câu 98. (Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2020) Giả sử $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2e^x$. Tính tích $P = abc$.

A. $-4.$

B. $1.$

C. $-5.$

D. $-3.$

Lời giải

Chọn A

Ta đặt: $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$

Ta đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \Rightarrow \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx\right) = (x^2 - 2x + 2)e^x.$

Vậy $a = 1, b = -2, c = 2 \Rightarrow P = abc = -4.$

Câu 99. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(1 + e^x)$ là

A. $(2x - 1)e^x + x^2.$

B. $(2x + 1)e^x + x^2.$

C. $(2x + 2)e^x + x^2.$

D. $(2x - 2)e^x + x^2.$

Lời giải

Ta có $\int 2x(1 + e^x) dx = 2 \int x dx + 2 \int x e^x dx.$

Gọi $I = 2 \int x \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}.$

Khi đó $I = 2xe^x - 2 \int e^x dx.$

$$\begin{aligned}\text{Vậy } \int 2x(1+e^x)dx &= 2\int xdx + xe^x - 2\int e^x dx = x^2 + xe^x - 2x + C \\ &= (2x-2)e^x + x^2 + C.\end{aligned}$$

Câu 100. Họ nguyên hàm của $f(x) = x \ln x$ là kết quả nào sau đây?

A. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{2}x^2 + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C.$

C. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$

D. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x + C.$

Lời giải

Ta có $F(x) = \int f(x)dx = \int x \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$

Theo công thức tính nguyên hàm từng phần, ta có:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Câu 101. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = (3x^2 + 1) \cdot \ln x$.

A. $\int f(x)dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} + C.$

B. $\int f(x)dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} + C.$

C. $\int f(x)dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C.$

D. $\int f(x)dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $I = \int (3x^2 + 1) \ln x dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (3x^2 + 1)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \int (3x^2 + 1)dx = x^3 + x \end{cases}.$

$$\Rightarrow I = (x^3 + x) \ln x - \int (x^3 + x) \frac{1}{x} dx = x(x^2 + 1) \ln x - \int (x^2 + 1) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C.$$

Câu 102. (Chuyên Đại Học Vinh 2019) Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

A. $-x \cot x + \ln(\sin x) + C.$

B. $x \cot x - \ln|\sin x| + C.$

C. $x \cot x + \ln|\sin x| + C.$

D. $-x \cot x - \ln(\sin x) + C.$

Lời giải

Chọn A

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cot x \end{cases}.$

Khi đó: $F(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = -x \cdot \cot x + \int \cot x dx = -x \cdot \cot x + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -x \cdot \cot x + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$
 $= -x \cdot \cot x + \ln|\sin x| + C$. Với $x \in (0; \pi) \Rightarrow \sin x > 0 \Rightarrow \ln|\sin x| = \ln(\sin x)$.
 Vậy $F(x) = -x \cot x + \ln(\sin x) + C$.

Câu 103. (Sở Phú Thọ 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $y = 3x(x + \cos x)$ là

- A.** $x^3 + 3(x \sin x + \cos x) + C$ **B.** $x^3 - 3(x \sin x + \cos x) + C$
C. $x^3 + 3(x \sin x - \cos x) + C$ **D.** $x^3 - 3(x \sin x - \cos x) + C$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int 3x(x + \cos x) dx = \int 3x^2 dx + \int 3x \cos x dx$

- $\int 3x^2 dx = x^3 + C_1$
- $\int 3x \cos x dx = \int 3x \cdot d(\sin x) = 3x \cdot \sin x - \int 3 \sin x dx = 3x \cdot \sin x + 3 \cos x + C_2$

Vậy $\int 3x(x + \cos x) dx = x^3 + 3(x \sin x + \cos x) + C$

Câu 104. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + xe^x$ là

- A.** $\frac{1}{5}x^5 + (x+1)e^x + C$. **B.** $\frac{1}{5}x^5 + (x-1)e^x + C$.
C. $\frac{1}{5}x^5 + xe^x + C$. **D.** $4x^3 + (x+1)e^x + C$.

Lời giải

Ta có: $\int (x^4 + xe^x) dx = \int x^4 dx + \int xe^x dx$.

+) $\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C_1$.

+) Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$.

Suy ra: $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C_2 = (x-1)e^x + C_2$.

Vậy $\int (x^4 + xe^x) dx = \frac{1}{5}x^5 + (x-1)e^x + C$.

Câu 105. Cho hai hàm số $F(x), G(x)$ xác định và có đạo hàm lần lượt là $f(x), g(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng

$F(x).G(x) = x^2 \ln(x^2 + 1)$ và $F(x).g(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$. Họ nguyên hàm của $f(x).G(x)$ là

- A.** $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + 2x^2 + C$. **B.** $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - 2x^2 + C$.
C. $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2 + C$. **D.** $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + x^2 + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$F(x).G(x) = \int (F(x).G(x))' dx = \int (F'(x).G(x) + F(x).G'(x)) dx.$$

$$\Rightarrow \int (F'(x).G(x)) dx = F(x).G(x) - \int (F(x).G'(x)) dx$$

$$= x^2 \ln(x^2 + 1) - \int \left(\frac{2x^3}{x^2 + 1} \right) dx = x^2 \ln(x^2 + 1) - (x^2 + 1) + \ln(x^2 + 1) + C$$

$$= (x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2 + C.$$

Câu 33. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$ là

A. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C.$

B. $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} (x - 2) + C.$

C. $F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C.$

D. $F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C.$

Lời giải.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}.$

$$F(x) = x.e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x.e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C = \frac{1}{2} e^{2x} \left(x - \frac{1}{2} \right) + C.$$

Câu 106. (Sở Bắc Ninh 2019) Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\int x e^x dx = e^x + x e^x + C.$

B. $\int x e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x + e^x + C.$

C. $\int x e^x dx = x e^x - e^x + C.$

D. $\int x e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x + C.$

Lời giải

Sử dụng công thức: $\int u dv = u.v - \int v du.$

Ta có: $\int x e^x dx = \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$

Câu 107. (Sở Bắc Giang 2019) Cho hai hàm số $F(x), G(x)$ xác định và có đạo hàm lần lượt là $f(x), g(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết $F(x).G(x) = x^2 \ln(x^2 + 1)$ và $F(x)g(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$. Tìm họ nguyên hàm của $f(x)G(x)$.

A. $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + 2x^2 + C.$

B. $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - 2x^2 + C.$

C. $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2 + C.$

D. $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + x^2 + C.$

Lời giải

Ta có:

$$\int f(x)G(x) dx = \int G(x)d(F(x))$$

$$= G(x).F(x) - \int F(x)d(G(x)) = G(x).F(x) - \int F(x)g(x) dx.$$

$$\Leftrightarrow \int f(x)G(x) dx = x^2 \ln(x^2 + 1) - \int \frac{2x^3}{x^2 + 1} dx = x^2 \ln(x^2 + 1) - \int \left(2x - \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx =$$

$$x^2 \ln(x^2 + 1) - x^2 + \int \frac{1}{x^2 + 1} d(x^2 + 1) = x^2 \ln(x^2 + 1) - x^2 + \ln(x^2 + 1) + C$$

$$= (x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2 + C.$$

Câu 108. Cho biết $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của

$g(x) = x \cos ax.$

A. $x \sin x - \cos x + C$ **B.** $\frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$

C. $x \sin x + \cos x + C$ **D.** $\frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$

Lời giải

Chọn C

Ta có $F'(x) = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{(x^2 + 1)^2}{x^2}$.

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$ nên $a = 1$.

$\int g(x) dx = \int x \cos x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \sin x \end{cases}$

$\int g(x) dx = \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$

Câu 109. Họ nguyên hàm của hàm số $y = \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x}$ là

A. $(x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$.

B. $(x^2 + x - 1) \ln x + \frac{x^2}{2} - x + C$.

C. $(x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C$.

D. $(x^2 + x - 1) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C$.

Lời giải

Ta có: $\int \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x} dx = \int (2x + 1) \ln x dx + \int \frac{1}{x} dx = I_1 + I_2$.

$I_1 = \int (2x + 1) \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = (2x + 1) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x^2 + x \end{cases}$.

$I_1 = (x^2 + x) \ln x - \int (x^2 + x) \frac{1}{x} dx = (x^2 + x) \ln x - \int (x + 1) dx$

$= (x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C_1$.

$I_2 = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C_2$.

$\int \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x} dx = I_1 + I_2$

$= (x^2 + x) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C_1 + \ln x + C_2 = (x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C$.

Dạng 4.2 Tìm nguyên hàm có điều kiện

Câu 110. (Mã 104 2017) Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

A. $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C$

B. $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$

$$\text{C. } \int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$$

$$\text{D. } \int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C$$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2x^2}$. Chọn $f(x) = \frac{-1}{x^2}$.

Suy ra $\int f'(x) \ln x dx = \int \frac{2}{x^3} \ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{2}{x^3} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{-1}{x^2} \end{cases}$.

Khi đó: $\int f'(x) \ln x dx = \int \frac{\ln x}{x^3} dx = -\frac{\ln x}{x^2} + \int \frac{1}{x^3} dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C$.

Câu 111. (Mã 105 2017) Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$

$$\text{A. } \int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C$$

$$\text{B. } \int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C$$

$$\text{C. } \int f'(x) \ln x dx = -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$$

$$\text{D. } \int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$$

Lời giải

Chọn C

Ta có $F'(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow f(x) = x.F'(x) = x \cdot \left(-\frac{1}{3}x^{-3}\right)' = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$

$$\Rightarrow f'(x) = -3x^{-4} \Rightarrow f'(x) \ln x = -3x^{-4} \ln x$$

Vậy $\int f'(x) \ln x dx = \int (-3x^{-4} \ln x) dx = -3 \int \ln x \cdot x^{-4} dx$

Đặt $u = \ln x; dv = x^{-4} dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}; v = \frac{x^{-3}}{-3}$

Nên $\int f'(x) \ln x dx = -3 \int \ln x \cdot x^{-4} dx = -3 \left(\frac{\ln x}{-3x^3} + \int \frac{x^{-4}}{3} dx \right) = \frac{\ln x}{x^3} - \int x^{-4} dx = \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C$

Câu 112. (Mã 110 2017) Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

$$\text{A. } \int f'(x)e^{2x} dx = (4-2x)e^x + C$$

$$\text{B. } \int f'(x)e^{2x} dx = (x-2)e^x + C$$

$$\text{C. } \int f'(x)e^{2x} dx = \frac{2-x}{2}e^x + C$$

$$\text{D. } \int f'(x)e^{2x} dx = (2-x)e^x + C$$

Lời giải

Chọn D

Theo đề bài ta có $\int f(x) \cdot e^{2x} dx = (x-1)e^x + C$, suy ra $f(x) \cdot e^{2x} = [(x-1)e^x]' = e^x + (x-1) \cdot e^x$

$$\Rightarrow f(x) = e^{-x} + (x-1) \cdot e^{-x} = x \cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x) = (1-x) \cdot e^{-x}$$

Suy ra $K = \int f'(x)e^{2x} dx = \int (1-x)e^x dx = \int (1-x) d(e^x) = e^x(1-x) + \int e^x dx = (2-x)e^x + C$.

Câu 113. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = xe^x$ và $f(0) = 2$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = 3$.

B. $f(1) = e$.

C. $f(1) = 5 - e$.

D. $f(1) = 8 - 2e$.

Lời giải

Ta có:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int x.e^x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases} \rightarrow f(x) = x.e^x - \int e^x dx = x.e^x - e^x + C$$

$$\text{Theo đề: } f(0) = 2 \Leftrightarrow 2 = -1 + C \Leftrightarrow C = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = x.e^x - e^x + 3$$

$$\Rightarrow f(1) = 3.$$

Câu 114. (Chuyên Đại Học Vinh 2019) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

A. $(x-2)e^x + e^x + C$

B. $(x+2)e^{2x} + e^x + C$

C. $(x-1)e^x + C$

D. $(x+1)e^x + C$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f(x) + f'(x) = e^{-x} \Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1 \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1 \Leftrightarrow f(x)e^x = x + C_1.$$

$$\text{Vì } f(0) = 2 \Rightarrow C_1 = 2 \Rightarrow f(x)e^{2x} = (x+2)e^x \Rightarrow \int f(x)e^{2x} dx = \int (x+2)e^x dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int f(x)e^{2x} dx = \int (x+2)e^x dx = (x+2)e^x - \int e^x dx = (x+2)e^x - e^x + C = (x+1)e^x + C.$$

Câu 115. (Việt Đức Hà Nội 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (x+1)e^x, f(0) = 0$ và $\int f(x) dx = (ax+b)e^x + c$ với a, b, c là các hằng số. Khi đó:

A. $a+b=2$.

B. $a+b=3$.

C. $a+b=1$.

D. $a+b=0$.

Lời giải

Theo đề: $f'(x) = (x+1)e^x$. Nguyên hàm 2 vế ta được

$$\int f'(x) dx = \int (x+1)e^x dx \Leftrightarrow f(x) = (x+1)e^x - \int e^x dx$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+1)e^x - e^x + C = xe^x + C$$

$$\text{Mà } f(0) = 0 \Rightarrow 0.e^0 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = xe^x.$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

$$\text{Suy ra } a=1; b=-1 \Rightarrow a+b=0.$$

Câu 116. (THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh - 2018) Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{-x}$. Tính $F(x)$ biết $F(0) = 1$.

A. $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2$.

B. $F(x) = (x+1)e^{-x} + 1$.

C. $F(x) = (x+1)e^{-x} + 2$.

D. $F(x) = -(x+1)e^{-x} + 1$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C = F(x; C).$$

$$F(0) = 1 \Leftrightarrow -e^{-0} + C = 1 \Leftrightarrow C = 2. \text{ Vậy } F(x) = -(x+1)e^{-x} + 2.$$

Câu 117. (Sở Quảng Nam - 2018) Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ.

Tính tích ab ?

A. $ab = \frac{1}{8}.$

B. $ab = \frac{1}{4}.$

C. $ab = -\frac{1}{8}.$

D. $ab = -\frac{1}{4}.$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } ab = \frac{1}{8}.$$

Câu 118. (Chuyên ĐH Vinh - 2018) Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho

$F(-2) + F(1) = 0$. Giá trị của $F(-1) + F(2)$ bằng

A. $\frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5.$

B. $0.$

C. $\frac{7}{3} \ln 2.$

D. $\frac{2}{3} \ln 2 + \frac{3}{6} \ln 5.$

Lời giải

$$\text{Tính } \int \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x+3) \\ dv = \frac{dx}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x+3} \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \int \frac{\ln(x+3)}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln(x+3) + \int \frac{dx}{x(x+3)} = -\frac{1}{x} \ln(x+3) + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x}{x+3} \right| + C = F(x, C).$$

$$\text{Lại có } F(-2) + F(1) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} \ln 2 + C \right) + \left(-\ln 4 + \frac{1}{3} \ln \frac{1}{4} + C \right) = 0 \Leftrightarrow 2C = \frac{7}{3} \ln 2.$$

$$\text{Suy ra } F(-1) + F(2) = \ln 2 + \frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} + 2C = \frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5.$$

Câu 119. (THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018) Gọi $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln(x-1)$. Cho biết $g(2) = 1$ và $g(3) = a \ln b$ trong đó a, b là các số nguyên dương phân biệt.

Hãy tính giá trị của $T = 3a^2 - b^2$

A. $T = 8.$

B. $T = -17.$

C. $T = 2.$

D. $T = -13.$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln(x-1) \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x-1} \\ v = x-1 \end{cases}$$

$$g(x) = \int \ln(x-1) dx = (x-1) \ln(x-1) - \int \frac{x-1}{x-1} dx = (x-1) \ln(x-1) - x + C$$

$$\text{Do } g(2) = 1 \Leftrightarrow 1 \ln 1 - 2 + C = 1 \Leftrightarrow C = 3 \Rightarrow g(x) = (x-1) \ln(x-1) - x + 3$$

$$\text{Suy ra: } g(3) = 2 \ln 2 - 3 + 3 = 2 \ln 2 = \ln 4 \Rightarrow a = 1, b = 4 \Rightarrow 3a^2 - b^2 = -13$$

Câu 120. (Sở Quảng Nam - 2018) Biết $\int x \cos 2x dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ.

Tính tích ab ?

A. $ab = \frac{1}{8}$.

B. $ab = \frac{1}{4}$.

C. $ab = -\frac{1}{8}$.

D. $ab = -\frac{1}{4}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \\ dv = \cos 2x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } ab = \frac{1}{8}.$$

Câu 121. (Sở Hậu Giang 2022) Biết $\int (ax^2 + bx + 5)e^x dx = (3x^2 - 8x + 13)e^x + C$, với a, b là các số nguyên. Tìm $S = a + b$.

A. $S = 1$.

B. $S = 4$.

C. $S = 5$.

D. $S = 9$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Xét } I = \int (ax^2 + bx + 5)e^x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = ax^2 + bx + 5 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = (2ax + b) dx \\ v = e^x \end{cases}$$

Khi đó:

$$I = \int (ax^2 + bx + 5)e^x dx = (ax^2 + bx + 5)e^x - \int (2ax + b)e^x dx$$

$$\Leftrightarrow I = (ax^2 + bx + 5)e^x - (2ax + b)e^x + \int 2a.e^x dx$$

$$\Leftrightarrow I = (ax^2 + bx + 5)e^x - (2ax + b)e^x + 2ae^x + C$$

$$\Leftrightarrow I = e^x [ax^2 + (b - 2a)x + (5 - b + 2a)] + C.$$

$$\text{Vậy } \int (ax^2 + bx + 5)e^x dx = e^x [ax^2 + (b - 2a)x + (5 - b + 2a)] + C = (3x^2 - 8x + 13)e^x + C$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a = 3 \\ b - 2a = -8 \\ 5 - b + 2a = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases} (t/m)$$

$$\text{Vậy } S = a + b = 1$$

