Phương trình hàm trên N

Trần Nam Dũng – ĐHKHTN Tp HCM
Dương Bửu Lộc – THPT chuyên Trần Đại Nghĩa

Tóm tắt: Bài này giới thiệu các phương pháp và kỹ thuật giải phương trình hàm trên các tập rời rạc như N, Z, Q, Z^2 … Cách tiếp cận của bài viết là Ví dụ – Phân tích – Lời giải – Nhận xét. Phần cuối là một số bài tập áp dụng tự giải.

Mở đầu

Một phương trình hàm bao gồm 3 thành phần chính: tập nguồn (miền xác định), tập đích (miền giá trị); phương trình hay hệ phương trình hàm; các điều kiện bổ sung cho hàm số (lớp hàm). Từ ba thành phần này có những phân loại tương ứng. Phương trình hàm trên N, phương trình hàm trên R, phương trình hàm trên Z^2 …; phương trình hàm với 1 biến tự do, 2 biến tự do, nhiều biến tự do, phương trình hàm chuyển đổi các giá trị trung bình …; phương trình hàm trên lớp hàm khả vi, phương trình hàm trên lớp hàm liên tục, phương trình hàm đa thức …

Đây là các yếu tố quan trọng cần xét đến khi giải phương trình hàm. Điều này có thể thấy rõ qua ví dụ về phương trình hàm Cauchy. Bài toán tổng quát tìm tất cả các hàm số f: R → R thoả mãn phương trình f(x+y) = f(x) + f(y) với mọi x, y thuộc R, theo một nghĩa nào đó không có lời giải, thế nhưng với những giới hạn trên tập nguồn, tập đích, các tính chất của hàm số (đơn điệu, liên tục, đa thức …) thì phương trình này giải được trọn vẹn.

Bài này xét các phương trình hàm với các hàm số xác định trên N (hay Z, Q và các tập rời rạc khác). Để giải phương trình hàm xác định trên một tập nào đó, ta phải hiểu rõ cấu trúc và tính chất của tập hợp đó. Đối với N, ta sẽ chú ý đến những yếu tố sau: các phép toán cộng và nhân trên N; N được sắp thứ tự; thứ tự trên N là tốt; định lý cơ bản của số học về phân tích một số ra thừa số nguyên tố.

Thứ tự trên N và phương trình hàm

Ví dụ 1 Tìm tất cả các hàm số f: N* → N* sao cho

(a) f(2) = 2;
(b) f(mn) = f(m)f(n) với mọi m, n thuộc N*;
(c) f(m) < f(n) với mọi m < n.

(Putnam 1963)

Lời giải: Một trong những công cụ quan trọng ta thường sử dụng khi giải các bài toán trên N* là *Nguyên lý quy nạp toán học*. Công cụ đơn giản này cho chúng ta một phương pháp hiệu quả để công phá các bài toán.

(i) $f(1) = f(1.1) = f(1)f(1) \Rightarrow f(1) = 1$.

(ii) $f(4) = f(2.2) = f(2).f(2) = 2.2 = 4$. Ta có $2 = f(2) < f(3) < f(4) = 4$. Từ đó, do $f(3)$ là số nguyên dương, suy ra $f(3) = 3$.

(iii) Tương tự như vậy, do $f(6) = f(2)f(3) = 2.3 = 6$ nên từ đây ta suy ra $f(6) = 6$ và cũng như trên, suy ra $f(5) = 5$.

(iv) Ta chứng minh $f(n) = n$ bằng quy nạp. Thật vậy, giả sử đã có $f(k) = k$ với mọi $k \le n$. Xét $k = n+1$. Nếu k chẵn thì $f(k) = f(2)f(k/2) = 2.(k/2) = k$. Nếu k lẻ thì $k+1$ chẵn và $f(k+1) = f(2)f((k+1)/2) = k+1$. Và từ bất đẳng thức $k-1 = f(k-1) < f(k) < f(k+1) = k+1$ ta suy ra $f(k) = k$.

(v) Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có $f(n) = n$ với mọi n nguyên dương.

Trong lời giải trên, chúng ta đã sử dụng hai tính chất quan trọng là thứ tự trên N* và phương pháp quy nạp toán học. Tính chất $k - 1 < f(k) < k+1$ suy ra $f(k) = k$ là một tính chất rất quan trọng đã được sử dụng. Trong lời giải trên, chúng ta đã sử dụng hiệu quả cả ba điều kiện. Điều gì sẽ xảy ra nếu chúng ta làm yếu đi một điều kiện?

Ví dụ 2 Tìm tất cả các hàm số f: N* → N* sao cho

(a) $f(2) = 2$;
(b) $f(mn) = f(m)f(n)$ với mọi m, n thuộc N*, $(m, n) = 1$;
(c) $f(m) < f(n)$ với mọi $m < n$.

Lời giải: Điểm khác biệt so với bài toán 1 chính là ở điều kiện (b). Chúng ta sẽ không có được $f(4) = f(2)f(2) = 4$ như trong lời giải trước. Chúng ta sẽ cố gắng chứng minh rằng $f(3) = 3$, từ đó suy ra $f(6) = 6$. Từ đây, dùng tính chất $3 = f(3) < f(4) < f(5) < f(6) = 6$ ta suy ra $f(4) = 4$, $f(5) = 5$. Tiếp tục ta lại có $f(10) = f(2)f(5) = 2.5 = 10$ và lại suy ra $f(7) = 7$, $f(8) = 8$, $f(9) = 9$ …

Như thế, điểm mấu chốt là chứng minh $f(3) = 3$. Điều này có thể thực hiện được bằng cách sử dụng ba tính chất ở đề bài như sau:

$$f(3)f(5) = f(15) < f(18) = f(2)f(9) < f(2)f(10) = f(2)f(2)f(5) = 4f(5)$$

Suy ra $f(3) < 4$, từ đó $f(3) = 3$.

Nếu ta thay đổi điều kiện (a) thì chú ý là có thể xảy ra trường hợp phương trình hàm không có nghiệm. Ta xét ví dụ dưới đây:

Ví dụ 3 Chứng minh rằng không tồn tại hàm số f: N* → N* sao cho

(a) $f(2) = 3$;
(b) $f(mn) = f(m)f(n)$ với mọi m, n thuộc N*, $(m, n) = 1$;
(c) $f(m) < f(n)$ với mọi $m < n$.

Lời giải: Giả sử ngược lại, tồn tại hàm số f thoả mãn các điều kiện đề bài. Đặt f(3) = a. Sử dụng bất đẳng thức $2^3 < 3^2$ ta có $27 = f(2)^3 = f(2^3) < f(3^2) = f(3)2 = a^2$, suy ra a > 5. Mặt khác ta lại có $3^3 < 2^5$ suy ra $a^3 < 243 < 343 = 7^3$, từ đó a < 7. Như vậy ta phải có a = 6. Bây giờ, chú ý $3^8 = 6^{561} < 8192 = 2^{13}$, từ đây $6^8 < 3^{13}$ hay $2^8 < 3^5$ mâu thuẫn vì $2^8 = 256$, $3^5 = 243$. Mâu thuẫn này chứng tỏ điều giả sử ban đầu là sai, tức là kết luận của bài toán là đúng.

Mặt khác, rõ ràng là hàm số $f(n) = n^2$ thoả mãn các tính chất (b), (c) và điều kiện f(2) = 4. Để nghiên cứu thêm về vấn đề này, chúng ta hãy xét các bài tập sau:

Bài tập 1 Tìm tất cả các hàm số f: N* → N* sao cho

(a) f(2) = 2;

(b) f(mn) = f(m)f(n) với mọi m, n thuộc N*;

(c) f(m) < f(n) với mọi m < n.

Bài tập 2 Tìm tất cả các giá trị nguyên dương k sao cho tồn tại hàm số f: N* → N* thoả mãn đồng thời các điều kiện:

(a) f(2) = k;

(b) f(mn) = f(m)f(n) với mọi m, n thuộc N*;

(c) f(m) < f(n) với mọi m < n.

Trong tất cả các ví dụ và bài tập đã xem xét ở trên, tính đơn điệu của hàm số f đóng một vai trò quan trọng trong lời giải. Để thấy rõ hơn tầm quan trọng của tính chất này, ta có thể chỉ ra rằng nếu bỏ đi tính đơn điệu, sẽ có vô số hàm số thoả mãn các điều kiện (a), (b). Cụ thể, sử dụng định lý cơ bản của số học $n = p_1^{a1}\ldots p_k^{ak}$, ta có thể cho f(2) = 2, $f(p_i) = q_i$ với q_i nguyên dương rồi thác triển hàm số f đối với các hợp số theo công thức $f(n) = q_1^{a1}\ldots q_k^{ak}$ với $n = p_1^{a1}\ldots p_k^{ak}$.

Trong các ví dụ trên, chúng ta cũng đã sử dụng một điều kiện quan trọng, được sử dụng một cách rất tự nhiên (làm chúng ta nhầm tưởng về vai trò của nó). Đó chính là điều kiện về tập đích. Thực sự, nếu không có điều kiện này, những lý luận 2 < f(3) < 4 suy ra f(3) = 3 sẽ không thực hiện được. Vì thế, bài tập dưới đây chắc chắn sẽ gây khó khăn cho nhiều người và vượt qua được nó, chúng ta sẽ hiểu rõ hơn đâu là những tính chất quan trọng để giải được phương trình hàm ban đầu.

Bài tập 3 Tìm tất cả các hàm số f: N* → [1, ∞) sao cho

(a) f(2) = 2;

(b) f(mn) = f(m)f(n) với mọi m, n thuộc N*;

(c) f(m) < f(n) với mọi m < n.

Trong phần trên, chúng ta đã xem xét ứng dụng của thứ tự trên N để giải phương trình hàm. Chú ý là trên Q, R và một số tập hợp số khác cũng có thứ tự, do đó các tính chất đã được sử dụng ở trên không chỉ là thứ tự, mà còn là tính "số phần tử tiếp sau" của N. Dưới đây, chúng ta sẽ xem xét ứng dụng của một tính chất khác của N, đó là *Nguyên lý sắp thứ tự tốt.* Cụ thể một tập con bất kỳ của N thì có phần tử nhỏ nhất. Tính chất trông có vẻ rất đơn giản này thực ra vô cùng hiệu quả, và nó tương đương với Nguyên lý quy nạp toán học. Chúng ta xem xét một số ví dụ áp dụng

Ví dụ 4 Nếu f: $N^* \rightarrow N^*$ là hàm số thoả mãn điều kiện

$$f(n+1) > f(f(n))$$ với mọi n nguyên dương,

chứng minh rằng $f(n) = n$ với mọi n thuộc N^* (IMO 1977)

Lời giải: Gọi d là phần tử nhỏ nhất trong miền giá trị của f, tức là

$$d = \min \{ f(n): n \in N^*\}$$

Theo nguyên lý sắp thứ tự tốt, d tồn tại và duy nhất. Gọi m là giá trị sao cho $f(m) = d$. Nếu $m > 1$ thì ta có $d = f(m) > f(f(m-1))$, mâu thuẫn. Vậy $m = 1$. Như vậy $f(n)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại duy nhất điểm $m = 1$.

Bây giờ xét tập hợp $\{f(n): n \geq 2\}$. Ta có thể chứng minh tương tự như ở mục trước là giá trị nhỏ nhất của tập này là $f(2)$. Hơn nữa, $f(1) < f(2)$ theo cách chọn $f(1)$. Cụ thể, nếu $f(1) = f(2)$ thì $f(1) > f(f(1))$ mâu thuẫn. Điều này có thể làm tiếp tục để nhận được

$$f(1) < f(2) < f(3) \ldots < f(n) < \ldots \qquad (1)$$

Chú ý rằng $f(1) \geq 1$. Điều này cộng với (1) suy ra rằng $f(k) \geq k$ với mọi k nguyên dương. Giả sử $f(k) > k$ với k nào đó. Khi đó $f(k) \geq k+1$. Sử dụng (1) ta suy ra rằng $f(k+1) \leq f(f(k))$. Nhưng điều này mâu thuẫn với điều kiện đề bài. Như vậy ta có $f(k) = k$ với mọi k nguyên dương.

Một cách giải khác: Cũng như ở cách giải trên ta chứng tỏ rằng $f(1)$ là giá trị nhỏ nhất của tập $\{f(n), n \in N^*\}$ và $f(2)$ là giá trị nhỏ nhất của $\{f(n), n \geq 2\}$. Nếu $f(1) > 1$ thì ta có $f(1) \geq 2$ và do đó $f(f(1)) \geq f(2)$ theo tính chất nhỏ nhất của $f(2)$. Nhưng điều này mâu thuẫn với điều kiện đề bài. Vậy $f(1) = 1$. Bây giờ ta xét $g(n) = f(n+1) - 1$. Ta thấy rằng

$$g(g(n)) = g((f(n+1)-1) = f(f(n+1)) - 1 < f(n+2) - 1 = g(n+1).$$

Như vậy g thoả mãn tất cả những điều kiện mà f thoả mãn. Điều này chứng tỏ rằng $g(1) = 1$ và vì thế $f(2) = 2$. Bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng $f(n) = n$ với mọi n.

Các tính chất số học của N và phương trình hàm

Ngoài các phép toán cơ bản và tính thứ tự, tập hợp các số tự nhiên có nhiều tính chất số học thú vị, ví dụ định lý cơ bản của số học, các vấn đề biểu diễn số (additive number theory), sự chia hết, phép chia Euclid … Tất cả các tính chất này có thể ứng dụng trong việc giải các phương trình hàm. Chúng ta xem xét một số ví dụ minh hoạ.

Ví dụ 5 Tìm tất cả các hàm f: N → N thoả mãn các điều kiện

a) $f(m^2 + n^2) = f^2(m) + f^2(n)$ với mọi m, n thuộc N

b) $f(1) > 0$

Lời giải: Cho m = n = 0 vào phương trình hàm, ta được $f(0) = 2f^2(0)$. Nếu $f(0) \neq 0$ thì từ đây suy ra $f(0) = 1/2$, điều này mâu thuẫn vì f nhận các giá trị trong N. Vậy $f(0) = 0$ và điều này dẫn đến $f(m^2) = f^2(m)$. Ta có thể viết a) dưới dạng

$$f(m^2+n^2) = f^2(m) + f^2(n) = f(m^2) + f(n^2)$$

Ta cũng chú ý rằng $f(1) = f(1^2) = f^2(1)$. Vì $f(1) > 0$ nên $f(1) = 1$. Từ đây suy ra

$$f(2) = f(1^2+1^2) = f^2(1) + f^2(1) = 2;$$
$$f(4) = f(2^2) = f^2(2) = 4;$$
$$f(5) = f(2^2+1^2) = f^2(2) + f^2(1) = 5;$$
$$f(8) = f(2^2+2^2) = f^2(2) + f^2(2) = 8.$$

Hơn nữa, ta thấy rằng

$$25 = f^2(5) = f(5^2) = f(3^2+4^2) = f^2(3) + f^2(4) = f^2(3) + 16,$$

từ đó suy ra $f(3) = 3$. Từ đây ta lại có

$$f(9) = f(3^2) = f^2(3) = 9;$$
$$f(10) = f(3^2+1^2) = f^2(3) + f^2(1) = 10.$$

Sử dụng đẳng thức $7^2 + 1^2 = 5^2 + 5^2$, và đã biết f(5), f(1), ta có thể tính được $f(7) = 7$. Cuối cùng, ta sử dụng đẳng thức $10^2 = 6^2 + 8^2$ để thu được $f(6) = 6$.

Như vậy ta có $f(n) = n$ với mọi $n \leq 10$. Ta sử dụng các hằng đẳng thức sau

$$(5k+1)^2 + 2^2 = (4k+2)^2 + (3k-1)^2;$$
$$(5k+2)^2 + 1^2 = (4k+1)^2 + (3k+2)^2;$$
$$(5k+3)^2 + 1^2 = (4k+3)^2 + (3k+1)^2;$$
$$(5k+4)^2 + 2^2 = (4k+2)^2 + (3k+4)^2;$$
$$(5k+5)^2 = (4k+4)^2 + (3k+3)^2.$$

Với $k \geq 3$, ta thấy rằng các số hạng ở vế phải nhỏ hơn số hạng lớn nhất ở vế trái. Các đẳng thức này cho phép chúng ta tính f(n) theo các giá trị của f tại các điểm nhỏ hơn. Ví dụ với k = 2, từ đẳng thức đầu tiên ta có

$$f(11^2 + 2^2) = f(10^2 + 5^2)$$

Từ đó tính được $f(11) = 11$. (Vì đã biết $f(2) = 2$, $f(10) = 10$, $f(5) = 5$.)

Vậy ta có thể kết luận rằng $f(n) = n$ với mọi n thuộc N.

Bài toán dưới đây có thể giải được bằng kỹ thuật tương tự. Bài này đăng trên AMM năm 1999 và được nhiều nước sử dụng làm đề thị chọn đội tuyển (Pháp 2004, Hà Nội 2005, Việt Nam 2005)

Bài tập 4 Tìm tất cả các hàm số f: Z → Z thoả mãn phương trình

$$f(a^3 + b^3 + c^3) = f^3(a) + f^3(b) + f^3(c)$$

với mọi a, b, c thuộc Z.

Ví dụ 6 Tìm tất cả các hàm số f: N* → N* thoả mãn các điều kiện

a) f là toàn ánh;

b) m | n khi và chỉ khi f(m) | f(n) với mọi m, n nguyên dương.

Tương tự như vậy, với các phương trình hàm trên Z, Q, ta cần hiểu rõ cấu trúc của các tập hợp nguồn để xây dựng lời giải. Dưới đây ta xem xét một số ví dụ về các phương trình hàm trên Q.

Ví dụ 7 Tìm tất cả các hàm số f: Q → Q thoả mãn phương trình

$$f(x+y) + f(x-y) = f(2x)$$

với mọi x, y thuộc Q.

Lời giải: Đây là một ví dụ kinh điển.

Ví dụ 8 Tìm tất cả các hàm số f: $Q^+ \to Q^+$ thoả mãn điều kiện

a) $f(x+1) = f(x) + 1$ với mọi x thuộc Q^+;

b) $f(x^3) = f^3(x)$ với mọi x thuộc Q^+.

Lời giải: Từ b), cho x = 1 suy ra f(1) = 1. Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được rằng f(n) = n với mọi n thuộc N*, hơn nữa, f(x+n) = f(x) + n với mọi n nguyên dương. Xét x = p/q. Ta chứng minh rằng f(x) = x. Thật vậy, ta có

$$(x + q^2)^3 = x^3 + 3(p/q)^2q^2 + 3(p/q)q^4 + q^6 = x^3 + (3p^2 + 3pq^3 + q^6)$$

Ở đây, số hạng ở trong ngoặc là số nguyên dương. Áp dụng tính chất a), và điều vừa chứng minh nói trên, ta có

$$f((x + q^2)^3) = f(x^3 + (3p^2 + 3pq^3 + q^6)) = f(x^3) + 3p^2 + 3pq^3 + q^6 \qquad (1)$$

Áp dụng tính chất b) ta có (1) có thể viết lại thành

$$(f(x) + q^2)^3 = f^3(x) + 3p^2 + 3pq^3 + q^6$$

Đây là một phương trình bậc 2 theo f(x). Giải ra, chú ý rằng f(x) > 0, ta được f(x) = p/q = x.

Một kỹ thuật hiệu quả khác để giải phương trình hàm là sử dụng điểm bất động. Nếu X là một tập hợp và f: X → X là một ánh xạ thì điểm x được gọi là điểm bất động của f nếu f(x) = x. Sự tồn tại điểm bất động có thể giúp chúng ta giải quyết một số bài toán

Ví dụ 9 Tìm tất cả các hàm số f: N → N thoả mãn phương trình hàm

$$f(m+f(n)) = f(f(m)) + f(n), \text{ với mọi m, n thuộc N}$$

(IMO 1996)

Hệ đếm cơ số và phương trình hàm

Bài toán phương trình hàm trên N, trên một phương diện nào đó, có thể coi là bài toán về dãy số. Vì vậy, dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của hệ đếm cơ số trong các bài toán dãy số.
Hệ đếm cơ số có thể dùng để xây dựng nhiều dãy số có tính chất rất thú vị. Nhìn trên phương diện của một cơ số khác, có thể rất khó nhận ra quy luật, nhưng nếu chọn đúng cơ số thì bài toán trở nên vô cùng đơn giản.

Xin nhắc lại là với b là một số nguyên dương lớn hơn hay bằng 2 thì mọi số nguyên dương N đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng

$$N = a_1...a_{k\,(b)} = a_1b^{k-1} + ... + a_k \text{ với } 1 \le a_1 \le b-1,\ 0 \le a_2, ..., a_k \le b-1.$$

Đó là định nghĩa hệ đếm cơ số dạng cơ bản nhất. Tuy nhiên, có thể lấy một dãy số nguyên bất kỳ (có trị tuyệt đối tăng nghiêm ngặt) làm hệ đếm cơ số ví dụ hệ đếm cơ số (-2), hệ đếm cơ số Fibonacci ($3 = 4 - 2 + 1$, $17 = 13 + 3 + 1$ ...)

Các hệ đếm thường sử dụng nhất là hệ đếm cơ số 2 và cơ số 3. Dưới đây ta xét một vài ví dụ:

Ví dụ 10 (IMO 1983) Chứng minh hoặc phủ định mệnh đề sau: Từ tập hợp 10^5 số nguyên dương đầu tiên luôn có thể chọn ra một tập con gồm 1983 số sao cho không có ba số nào lập thành một cấp số cộng.

Lời giải: Ta chứng minh mệnh đề tổng quát: Từ 3^n số tự nhiên đầu tiên luôn có thể chọn ra 2n số sao cho không có ba số nào lập thành một cấp số cộng. Thật vậy, xét trong hệ đếm cơ số 3 tập hợp tất cả các số có $\le n$ chữ số. Chọn các số mà trong biểu diễn tam phân của nó chỉ chứa chữ số 2 và chữ số 0. Khi đó có 2^n số như vậy và không có ba số nào trong chúng lập thành một cấp số cộng.

Ví dụ 11 (Singapore 1995) Cho dãy số $\{f_n\}$ xác định bởi

$f_1 = 1$, $f_{2n} = f_n$ và $f_{2n+1} = f_{2n}+1$.

(i) Tính $M = \max\{f_1, ..., f_{1994}\}$

(ii) Tìm tất cả các giá trị n, $1 \le n \le 1994$ sao cho $f_n = M$.

Lời giải: Kinh nghiệm một chút ta thấy ngay f_n chính là tổng các chữ số của n trong hệ đếm nhị phân. Từ đây do $1994 < 2048 = 2^{11}$ suy ra M = 10.

Ví dụ 12 Dãy số $\{f_n\}$ được xác định bởi $f_1 = 1$, $f_{2n} = 3f_n$, $f_{2n+1} = f_{2n} + 1$. Hãy tính f_{100}.

Lời giải: f_n được xác định như sau: Xét biểu diễn nhị phân của n rồi tính giá trị của số nhị phân này trong hệ tam phân. Vì $100 = 2^6 + 2^5 + 2^2$ nên $f_{100} = 3^6 + 3^5 + 3^2 = 981$.

Ví dụ 13 Dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi $0 \le a_0 < 1$, $a_n = 2a_{n-1}$ nếu $2a_{n-1} < 1$ và $a_n = 2a_{n-1} - 1$ nếu $2a_{n-1} \ge 1$. Hỏi có bao nhiêu giá trị a_0 để $a_5 = a_0$.

Lời giải: Phân tích. Khi tính a_n theo a_{n-1} ta có thể "lựa chọn" một trong hai công thức. Tất nhiên, với a_0 đã chọn rồi thì tất cả các bước tiếp theo đều xác định một cách duy nhất. Tuy nhiên, ta có thể chọn a_0 như thế nào đó để sau đó các công thức tính theo đúng kịch bản đã cho. Có $2^5 = 32$ kịch bản như vậy. Ví dụ với kịch bản (1, 1, 2, 1, 2) ta có

$x_1 = 2x_0$, $x_2 = 2x_1 = 4x_0$, $x_3 = 2x_2 - 1 = 8x_0-1$, $x_4=2x_3 = 16x_0-2$, $x_5=2x_4-1 = 32x_0-3$

Giải phương trình $x_0 = x_5$ ta được $x_0 = 3/31$. Tất nhiên, để có được một lời giải hoàn chỉnh, ta cần phải lập luận chặt chẽ để thấy rằng các x_0 thu được là khác nhau và với mỗi x0 thu được, dãy số sẽ "đi" đúng như kịch bản đã định. Tuy nhiên, phân tích này gợi chúng ta hướng đến hệ nhị phân. Và ta có lời giải đẹp mắt sau:

Nếu $a_0 =0,d_1d_2d_3...$ là biểu diễn nhị phân của a_0 thì $a_1 = 0,d_2d_3d_4....$ Thật vậy, nếu $2a_0 < 1$ thì $d_1 = 0$ và $a_1 = 2a_0 = 0,d_2d_3d_4$ ... còn nếu $2a_0 \geq 1$ thì $d_1 = 1$ và $a_1 = 2a_0 - 1 = 0,d_2d_3d_4...$

Hoàn toàn tương tự, $a_2 = 0,d_3d_4d_5...$,..., $a_5 = 0,d_6d_7d_8...$ Như vậy $a_5 = a_0$ khi và chỉ khi a_0 là phân số nhị phân tuần hoàn chu kỳ 5. Có $2^5 = 32$ chu kỳ tuần hoàn như vậy, trong đó chu kỳ 11111 cho chúng ta $a_0 = 1$ (loại). Vậy tất cả có 31 giá trị a_0 thoả mãn yêu cầu đề bài. Đó là 0,(00000), 0,(00001), ..., (0,11110). Tính sang hệ thập phân đó là các giá trị 0, 1/31, 2/31, ..., 30/31.

Ví dụ 14 Hàm số f xác định trên tập hợp các số nguyên dương như sau

$f(1) = 1$, $f(3) = 3$, $f(2n) = f(n)$

$f(4n+1) = 2f(2n+1) – f(n)$

$f(4n+3) = 3f(2n+1) – 2f(n)$.

Tìm số các giá trị n sao cho $f(n) = n$, $1 \leq n \leq 1988$.

(IMO 1988)

Dãy số $[\alpha n]$ và phương trình hàm

Tương tự như phần trước, trước hết ta xét một số vấn đề lý thuyết về dãy số $[\alpha n]$. Dãy số dạng $x_n = [n\alpha]$ có nhiều tính chất số học thú vị. Nếu $\alpha > 1$ thì $\{[n\alpha]\}_{n \geq 1}$ là dãy các số nguyên dương phân biệt, có sự biến thiên gần giống một cấp số cộng nhưng lại không phải là một cấp số cộng. Dãy số này đặc biệt thú vị khi α là số vô tỉ bậc 2. Ta có một kết quả quen thuộc sau đây:

Định lý: Nếu α, β là các số vô tỷ dương thoả mãn điều kiện $1/\alpha + 1/\beta = 1$ thì hai dãy số $x_n = [n\alpha]$, $y_n = [n\beta]$, n=1, 2, 3, ...lập thành một phân hoạch của tập hợp các số nguyên dương.

Chứng minh: Xét hai dãy số α, 2α, 3α, ... và β, 2β, 3β, ... Không một số hạng nào trong các số hạng trên là số nguyên. Với mỗi số nguyên dương N, có $[N/\alpha]$ số hạng của dãy thứ nhất nằm bên trái N và $[N/\beta]$ số hạng của dãy thứ hai. Nhưng

$N/\alpha + N/\beta = N$, vì α, β là các số vô tỉ, phần lẻ của các số N/α và N/β là các số dương có tổng bằng 1 (do đẳng thức trên). Suy ra có $[N/\alpha] + [N/\beta] = N - 1$ số hạng của cả hai dãy nằm bên trái N. Vì bên trái N+1 có N số hạng của cả hai dãy nên giữa N và N+1 có đúng một số hạng của một trong hai dãy, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Hai dãy số trên vét hết tập hợp các số nguyên dương. Điều này cho chúng ta một hướng suy nghĩ: nếu hai dãy số vét hết tập hợp các số nguyên dương thì có khả năng chúng sẽ có dạng trên. Và nhiều bài toán đã được xây dựng theo hướng này. Chúng ta xét một ví dụ

Ví dụ 15 (AMM) Giả sử $\{f_n\}$ và $\{g_n\}$ là hai dãy số nguyên dương được xác định như sau

1) $f_1 = 1$
2) $g_n = na - 1 - f_n$, trong đó a là số nguyên lớn hơn 4,
3) f_{n+1} là số nguyên dương nhỏ nhất khác các số $f_1, f_2, ..., f_n, g_1, g_2, ..., g_n$.

Chứng minh rằng tồn tại các hằng số α, β, sao cho $f_n = [n\alpha]$, $g_n = [n\beta]$ với mọi n = 1, 2, 3, ...

Lời giải: Theo cách xây dựng $\{f_n\}$ và $\{g_n\}$ lập thành một phân hoạch của N*. Giả sử ta đã tìm được α, β thoả mãn điều kiện đầu bài, khi đó, ta phải có $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Ngoài ra, khi n đủ lớn thì $na - 1 = f_n + g_n \sim n\alpha + n\beta$, suy ra $\alpha + \beta = a$. Vậy α, β phải là nghiệm của phương trình $x^2 - ax + a = 0$.

Xét phương trình $x^2 - ax + a = 0$ có hai nghiệm $\alpha < \beta$. Vì $a > 4$, α, β là các số vô tỉ. Dãy số $\{f_n\}$ và $\{g_n\}$ được xác định một cách duy nhất, do đó để chứng minh khẳng định của bài toán, ta chỉ cần chứng minh $\{[n\alpha]\}$ và $\{[n\beta]\}$ thoả mãn các điều kiện 1), 2), 3).

Rõ ràng $[\alpha] = 1$, $[n\beta] = [n(a-\alpha)] = na + [-n\alpha)] = na - [n\alpha] - 1$ (do $- n\alpha$ vô tỉ).

Giả sử $[n\alpha] = [m\beta] = k$, đặt $n\alpha = k + r$, $m\beta = k + s$ với $0 < r, s < 1$ thì

$$n + m = k(1/\alpha + 1/\beta) + r/\alpha + s/\beta = k + r/\alpha + s/\beta,$$

điều này không thể xảy ra vì $0 < r/\alpha + s/\beta < 1$. Như vậy với mọi m, n ta có $[n\alpha] \neq [m\beta]$.

Tiếp theo,

$$[(n+1)\alpha] \geq [n\alpha] + 1,\ [(n+1)\beta] \geq [n\beta] + 2 > [n\alpha] + 1.$$

Cuối cùng giả sử k là một số nguyên bất kỳ và $n = [(k+1)/\alpha]$. Nếu $n > k/\alpha$ thì $k < n\alpha < \alpha(k+1)/\alpha = k+1$ và $[n\alpha] = k$. Nếu $n < k/\alpha$ thì

$(k-n)\beta > k\beta - \beta k/\alpha = \beta k(1-1/\alpha) = k$, $(k-n)\beta < k\beta - \beta((k+1)/\alpha - 1) = k+1$,

suy ra $[(k-n)\beta] = k$.

Từ các nhận xét trên ta suy ra mỗi số nguyên dương k có mặt trong dãy số đúng 1 lần và hai dãy số $\{[n\alpha]\}$ và $\{[n\beta]\}$ thoả mãn điều kiện 3) (đpcm).

Ghi chú: Trong lời giải trên, ta đã không dùng đến kết quả của định lý ở trên và đó cũng chính là một cách chứng minh khác cho định lý.

Ví dụ 16 Tìm tất cả các hàm số h: N* → N* thoả mãn điều kiện

$h(h(n)) + h(n+1) = n+2$ với mọi n thuộc N*.

Bài tập

1. Cho hàm số f: N* → N* tăng nghiêm ngặt thoả mãn điều kiện $f(f(n)) = 3n$. Hãy tìm f(2001).

2. Tìm tất cả các hàm số f: N* → N* thoả mãn điều kiện $f(f(n)) = 2n$ với mọi n.

3. Chứng minh rằng tồn tại hàm số f: N* → N* thoả mãn điều kiện $f(f(n)) = n^2$ với mọi n.

4. (Ba Lan 1997) Hàm số f: N* → Z được xác định như sau

$f(1) = 0$, $f(n) = f([n/2]) + (-1)^{n(n+1)/2}$ với mọi n = 2, 3, …

Với mọi số tự nhiên k, tìm số các giá trị n sao cho $2^k \le n < 2^{k+1}$ và $f(n) = 0$.

5. Cho hàm số f: [0, 1] → [0, 1] thoả mãn các điều kiện sau

i) f không giảm;

ii) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$;

iii) $f(1-x) = 1 - f(x)$ với mọi x thuộc [0, 1]

iv) $f(x/2) = x/3$

Hãy tìm

a) f(1/7), f(1/9), f(1/13);

b)* Nêu phương pháp tìm f(x) với x bất kỳ cho trước.

6. Tìm tất cả các hàm số f: N* → N* sao cho

$f(f(m) + f(n)) = m + n$

với mọi m, n thuộc N*.

(IMO 1988 SL)

7. Tìm tất cả các hàm số f: N → N sao cho

$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3$

với mọi n thuộc N.

8. Tìm tất cả các hàm số f: N* → N* sao cho

$f(m + f(n)) = n + f(m+1)$

với mọi m, n thuộc N*

9. Tìm tất cả các hàm số f: Z → Z thoả mãn phương trình

$f(m+n) + f(m)f(n) = f(mn+1)$

với mọi số nguyên m, n.

10. Chứng minh rằng không tồn tại hàm số f: N $\rightarrow$ N sao cho

$$f(f(n)) = n + 1987$$

(IMO 1987)

11. Hãy xác định xem có tồn tại hay không hàm số f: N* $\rightarrow$ N* sao cho
a) $f(1) = 2$;
b) $f(f(n)) = f(n) + n$ với mọi n nguyên dương;
c) $f(n) < f(n+1)$ với mọi n nguyên dương.

(IMO 1993)

12. Xét tất cả các hàm số f: N* $\rightarrow$ N* thoả mãn điều kiện

$$f(m^2f(n)) = n(f(m))^2$$

với mọi m, n nguyên dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của f(1998).

(IMO 1998)

13. Hàm số f(n) xác định với mọi giá trị nguyên dương n và nhận các giá trị nguyên không âm. Ngoài ra, biết rằng

$$f(m+n) - f(m) - f(n) = 0 \text{ hoặc } 1,$$

$f(2) = 0$, $f(3) > 0$ và $f(9999) = 3333$.

Hãy tìm f(1982)

(IMO 1982)

14. Tìm tất cả các hàm số f: Z $\rightarrow$ Z sao cho với mọi số nguyên x, y,

$$f(f(x) + y)) = x + f(y + 2006).$$

(CH Séc 2006)

15. Xét tất cả các hàm số f: N* $\rightarrow$ N* thoả mãn điều kiện

$f(xf(y)) = yf(x)$ với mọi x, y nguyên dương.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của f(2007).

(CH Séc 2007)

16. Tồn tại hay không một song ánh f từ N* vào N* thoả mãn các điều kiện sau?
i) $f(n+2006) = f(n) + 2006$ với mọi n thuộc N*;
ii) $f(f(n)) = n + 2$ nếu $n = 1, 2, 3, \ldots, 2004$
iii) $f(2549) > 2550$.

(Thái Lan 2006)

17. Cho f là hàm số từ N vào N thoả mãn điều kiện

$$f(|f(n) - n|) + n \le |f(n) - n| + 1$$

với mọi n thuộc n. Chứng minh rằng phương trình f(m) = 0 có vô số nghiệm.

18. Cho f: N* → N* là một toàn ánh và g: N* → N* là một đơn ánh sao cho với mọi n nguyên dương ta có $f(n) \geq g(n)$. Chứng minh rằng f = g.

(Rumani 1988)

19. Cho f: N* → N* là một song ánh. Chứng minh rằng tồn tại ba số nguyên dương a, b, c sao cho a < b < c và f(a) + f(c) = 2f(b).

(Concours general 1995)

20. Xây dựng một hàm số f: $Q^+ \to Q^+$ thoả mãn điều kiện

$$f(xf(y)) = f(x)/y$$

với mọi x, y là số hữu tỷ dương.

21. Cho f: N* → N* sao cho

a) Với mọi a, b nguyên tố cùng nhau f(ab) = f(a)f(b);

b) Với mọi p, q nguyên tố, f(p+q) = f(p) + f(q).

Chứng minh rằng f(2) = 2, f(3) = 3 và f(1999) = 1999.

(CH Ailen 1999)

22. Chứng minh rằng không tồn tại hàm số f: Z → Z sao cho với mọi x, y nguyên ta có f(x + f(y)) = f(x) – y.

(Cuộc thi Toán Áo-Ba Lan 1997)

23. Tìm tất cả các hàm số f: Q+ → Q+ thoả mãn điều kiện f(x+1) = f(x) + 1 và $f(x^2) = f^2(x)$ với mọi x hữu tỉ dương.

(Ukraina 1997)

24. Chứng minh rằng tồn tại một và chỉ một hàm số f: N* → N* sao cho với mọi m, n nguyên dương

$$f(m + f(n)) = n + f(m+95)$$

Giá trị của tổng $\sum_{k=1}^{19} f(k)$ bằng bao nhiêu?

(IMO 1995 SL)

25. (Canada 1993) Cho y_1, y_2, y_3 ... là dãy số xác định bởi $y_1 = 1$ và với mọi số nguyên dương k

$$y_{4k} = 2y_{2k},\ y_{4k+1} = 2y_{2k}+1,\ y_{4k+2} = 2y_{2k+1} + 1,\ y_{4k+3} = 2y_{2k+1}$$

Chứng minh rằng dãy số y_1, y_2, y_3 ... nhận tất cả các giá trị nguyên dương, mỗi giá trị đúng một lần.

26. Giả sử rằng s_n là dãy số nguyên dương thoả mãn điều kiện $0 \leq s_{n+m} - s_n - s_m \leq K$ với K là một số nguyên dương cho trước. Với số nguyên dương N có tồn tại các số thực $a_1, a_2, \ldots a_K$ sao cho

$$s_n = [a_1 n] + ... + [a_K n] \text{ với mọi } n=1,2, ...N?$$

27. Cho $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $c_1 = 3$. Gọi $S(n)$ là tập hợp các số nguyên dương a_i, b_i, c_i với $i \le n$. Xây dựng a_n, b_n, c_n như sau:

a_{n+1} = số nguyên dương nhỏ nhất không thuộc $S(n)$;
b_{n+1} = số nguyên dương nhỏ nhất không thuộc $S(n)$ và khác a_{n+1};
$c_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}$;

Gọi d_k là dãy tăng các chỉ số n sao cho $b_n=a_n+2$. Chứng minh rằng

a) $d_k/k \rightarrow 6$ khi k dần đến vô cùng
b) Nếu B là số nguyên thì $(d_k-6k)/2 = B$ với vô số các chỉ số k.

28. (AMM) Các dãy số $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ được xác định như sau: $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $c_1 = 4$ và

a_n = số nguyên dương nhỏ nhất không thuộc $\{a_1, ..., a_{n-1}, b_1, ..., b_{n-1}, c_1, ..., c_{n-1}\}$
b_n = số nguyên dương nhỏ nhất không thuộc $\{a_1, ..., a_{n-1}, a_n, b_1, ..., b_{n-1}, c_1, ..., c_{n-1}\}$
$c_n = 2b_n + n - a_n$.

Hãy chứng minh hoặc phủ định rằng $0 < n(1+\sqrt{3}) - b_n < 2$ với mọi n.

Tài liệu tham khảo

[1] B.J.Venkatachala, *Functional Equations – A Problem Solving Approach*, PRISM 2002.

[2] Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[3] Titu Andreescu, Razvan Gelca, *Mathematical Olympiad Challenges,* Birkhauser 2000.

[4] A. Gardiner, *The Mathematical Olympiad Hanbook*, Oxford, 1997.

[5] Titu Andreescu, Zuming Feng, *Mathematical Olympiads 1998-1999, 1999-2000, 2000-2001, 2001-2002, 2002-2003, 2003-2004*, MAA

[6] Websites: www.diendantoanhoc.net, www.mathlinks.ro

[7] Các tạp chí AMM, Toán học tuổi trẻ, Kvan, Komal.