

Chủ đề 3

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG

1. Kiến thức cần nhớ

a. Nội dung phương pháp

Giả sử ta cần chứng minh bất đẳng thức $A \geq B$. Tư tưởng của phương pháp là ta hãy giả sử bất đẳng thức đó sai, sau đó vận dụng các kiến thức đã biết và giả thiết của đề bài để suy ra điều vô lý. Điều vô lý có thể là trái với giả thiết, hoặc là những mệnh đề mâu thuẫn nhau, từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh là đúng.

Các bước suy luận phản chứng

Bước 1: Giả sử điều cần chứng minh là sai (phủ định lại mệnh đề cần chứng minh).

Bước 2: Từ điều giả sử ta suy ra một số tính chất hoặc quan hệ mới, mà những tính chất này mâu thuẫn với điều đã cho hoặc trái với tính chất ta đã biết.

Bước 3: Ta kết luận điều giả sử ban đầu là sai. Vậy bài toán được chứng minh.

Chú ý: Trong các bước suy luận phản chứng nêu trên, bước 1 rất quan trọng vì cần tạo ra mệnh đề phủ định điều cần chứng minh thực sự chính xác.

b. Một số hình thức chứng minh bất đẳng thức

- + Dùng mệnh đề đảo.
- + Phủ định rồi suy ra điều trái với giả thiết.
- + Phủ định rồi suy ra trái với điều đúng.
- + Phủ định rồi suy ra hai mệnh đề trái ngược nhau.
- + Phủ định rồi suy ra kết luận.

c. Một số đẳng thức và bất đẳng thức cần nhớ.

$$+ a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2} \geq 0$$

$$+ (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0$$

$$+ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

2. Một số ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Cho a, b, c là các số thực bất kì. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau đây là đúng: $a^2 + b^2 \geq 2bc$ $b^2 + c^2 \geq 2ca$ $c^2 + a^2 \geq 2ab$

Phân tích: Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh có ít nhất một bất đẳng thức đúng, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp cả ba bất đẳng thức trên cùng sai. Như vậy ta chỉ cần chứng minh cả ba bất đẳng thức trên cùng sai không thể xảy ra là được.

Lời giải

Giả sử cả ba bất đẳng thức trên cùng sai, tức là ta có ba bất đẳng thức sau

$$a^2 + b^2 < 2bc \quad b^2 + c^2 < 2ca \quad c^2 + a^2 < 2ab$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$(a^2 + b^2 - 2ab) + (b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + a^2 - 2ca) < 0$$

Hay
$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 < 0.$$

Điều này mâu thuẫn với bất đẳng thức $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 2. Cho các số thực $a, b, c \in (0, 2)$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau đây là sai: $a(2 - b) > 1 \quad b(2 - c) > 1 \quad c(2 - a) > 1$

Phân tích: Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh có ít nhất một bất đẳng thức sai, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp cả ba bất đẳng thức trên cùng đúng. Như vậy ta chỉ cần chứng minh cả ba bất đẳng thức trên cùng đúng không thể xảy ra là được. Chú ý ở đây ta có giả thiết $a, b, c \in (0, 2)$ nên có thể sử dụng đến các hiệu $2 - a, 2 - b, 2 - c$ là các số dương.

Lời giải

Giả sử cả ba bất đẳng thức đã cho đều đúng, nhân chúng với nhau theo vế với vế ta có

$$a(2 - b).b(2 - c).c(2 - a) > 1 \Leftrightarrow a(2 - a).b(2 - b).c(2 - c) > 1$$

Mặt khác do $a \in (0, 2)$ nên ta có $2 - a > 0$. Do đó ta được

$$0 < a(2 - a) = 2a - a^2 = 1 - (1 - 2a + a^2) = 1 - (a - 1)^2 \leq 1$$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có $0 < b(2 - b) \leq 1; 0 < c(2 - c) \leq 1$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$a(2 - a).b(2 - c).c(2 - c) \leq 1$$

Bất đẳng thức này mâu thuẫn với bất đẳng thức $a(2 - a).b(2 - b).c(2 - c) > 1$.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 3. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn thỏa mãn các điều kiện sau
 $a + b + c > 0; ab + bc + ac > 0; abc > 0$

Chứng minh rằng cả ba số a, b, c đều là số dương.

Phân tích: Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh cả ba số a, b, c đều là số dương, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp một số nào đó không dương. Như vậy ta chỉ cần chứng minh một số bất kì không dương không thể xảy ra là được.

Lời giải

Giả sử rằng trong ba số a, b, c có một số không dương, không mất đi tính tổng quát ta chọn số đó là a , tức là ta có $a \leq 0$.

Vì $abc > 0$ nên $a \neq 0$, do đó suy ra $a < 0$.

Lại có $a + b + c > 0$ nên $b + c > 0$, từ đây suy ra $a(b + c) < 0$

Theo giả thiết thứ hai $ab + bc + ca > 0$ hay $a(b + c) + bc > 0$ dẫn đến $bc > 0$

Như vậy ta được $a < 0$; $bc > 0$ vì thế ta có $abc < 0$. Bất đẳng thức này mâu thuẫn với giả thiết thứ ba của bài toán.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng không có 3 số dương a, b, c nào thoả mãn cả 3 bất đẳng thức:

$$a + \frac{1}{b} < 2 \quad b + \frac{1}{c} < 2 \quad c + \frac{1}{a} < 2$$

Phân tích: Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh không tồn tại ba số dương a, b, c để cả ba bất đẳng thức trên đều đúng, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp cả ba bất đẳng thức trên cùng đúng. Như vậy ta chỉ cần chứng minh trường hợp cả ba bất đẳng thức trên cùng đúng không thể xảy ra là được. Chú ý các bất đẳng

thức trên làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức Cauchy dạng $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Lời giải

Giả sử tồn tại ba số dương a, b, c thoả mãn cả 3 bất đẳng thức:

$$a + \frac{1}{b} < 2; \quad b + \frac{1}{c} < 2; \quad c + \frac{1}{a} < 2$$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên, ta được:

$$a + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{c} + c + \frac{1}{a} < 6 \Leftrightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right) < 6 \quad (1)$$

Vì a, b, c là các số dương nên theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$a + \frac{1}{a} \geq 2; \quad b + \frac{1}{b} \geq 2; \quad c + \frac{1}{c} \geq 2$$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right) \geq 6 \quad (2)$$

Ta thấy hai bất đẳng thức (1) và (2) mâu thuẫn với nhau.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 5: Cho ba số thực a, b, c đôi một khác nhau. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một trong các số $9ab, 9bc, 9ac$ nhỏ hơn $(a + b + c)^2$.

Phân tích: Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh tồn tại ít nhất một trong ba số $9ab, 9bc, 9ca$ nhỏ hơn $(a + b + c)^2$, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp cả ba số $9ab, 9bc, 9ca$ cùng lớn hơn $(a + b + c)^2$. Như vậy ta chỉ cần chứng minh ba số $9ab, 9bc, 9ca$ cùng lớn hơn $(a + b + c)^2$ không xảy ra là được. Chú ý các đại lượng $9ab, 9bc, 9ca, (a + b + c)^2$ làm ta liên tưởng đến bất đẳng thức $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Lời giải

Giả sử điều cần chứng minh là sai, tức là ta có các bất đẳng thức sau

$$9ab \geq (a + b + c)^2; 9bc \geq (a + b + c)^2; 9ca \geq (a + b + c)^2$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức ta được

$$\begin{aligned} 3(a + b + c)^2 &\leq 9(ab + bc + ca) \Leftrightarrow (a + b + c)^2 \leq 3(ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 &\leq ab + bc + ca \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leq 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Theo bài ra a, b, c đôi một khác nhau nên ta lại có

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 > 0 \quad (2)$$

Ta thấy hai bất đẳng thức (1) và (2) mâu thuẫn với nhau.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 6: Cho a, b, c, d là bốn số thực dương bất kì. Chứng minh rằng ba bất đẳng thức sau không thể cùng xảy ra:

$$a + b < c + d \quad (1)$$

$$(a + b)(c + d) < ab + cd \quad (2)$$

$$(a + b)cd < (c + d)ab \quad (3)$$

Phân tích: Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh cả ba bất đẳng thức trên không cùng xảy ra tức là có ít nhất một bất đẳng thức sai, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp cả ba bất đẳng thức trên cùng đúng. Như vậy ta chỉ cần chứng minh cả ba bất đẳng thức trên cùng đúng không thể xảy ra là được.

Lời giải

Giả sử tồn tại bốn số dương a, b, c, d thỏa mãn cả ba bất đẳng thức.

Từ bất đẳng thức (1) và bất đẳng thức (2) ta có

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &< (a+b)(c+d) < ab+cd \\ \Leftrightarrow cd &> (a+b)^2 - ab = (a-b)^2 + 3ab \geq 3ab \\ \Rightarrow cd &> 3ab \quad (4)\end{aligned}$$

Mặt khác ta lại có

$$\begin{aligned}(a+b)cd &< (c+d)ab \\ \Rightarrow (a+b)^2 cd &< (c+d)(a+b)ab < (ab+cd)ab \\ \Rightarrow ab(ab+cd) &> (a+b)^2 cd \geq 4ab.cd \\ \Rightarrow ab(ab+cd) &> 4ab.cd \\ \Rightarrow ab &> 3cd \quad (5)\end{aligned}$$

Ta thấy hai bất đẳng thức (4) và (5) mâu thuẫn với nhau.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 7: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + ab + bc + ca < 0$.

Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 < c^2$

Phân tích: Đại lượng $a^2 + b^2 + ab + bc + ca$ làm ta liên tưởng đến hằng đẳng thức $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca)$. Như vậy từ giả thiết của bài toán đã cho ta suy ra được giả thiết mới $2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) < 0$. Vậy nếu $a^2 + b^2 \geq c^2$, thì ta được bất đẳng thức mới $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) < 0 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 < 0$. Rõ ràng bất đẳng thức thu được là sai, do đó ta nghĩ đến sử dụng phương pháp phản chứng để chứng minh bài toán.

Ngoài ra, để ý bất đẳng thức $2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) < 0$ và $(a+b+c)^2 \geq 0$ ta được bất đẳng thức $(a+b+c)^2 > 2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca)$. Khai triển và thu gọn ta cũng được $a^2 + b^2 < c^2$.

Lời giải

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là ta có bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq c^2$, khi đó ta được

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 + a^2 + b^2 + 2(ab+bc+ca) &\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \\ \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) &\geq (a+b+c)^2\end{aligned}$$

Kết hợp với giả thiết ta có

$$0 > 2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) \geq (a+b+c)^2 \Rightarrow (a+b+c)^2 < 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng là sai. Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Bất đẳng thức trên cũng có thể chứng minh theo cách sau đây:

Giả thiết của bài toán tương đương với $2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) < 0$

Mà ta luôn có $(a + b + c)^2 \geq 0$, do đó ta được bất đẳng thức

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &> 2(a^2 + b^2 + ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) &< 2(a^2 + b^2) + 2(ab + bc + ca) \\ \Leftrightarrow c^2 &> a^2 + b^2\end{aligned}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 8. Cho hai số dương a, b thỏa mãn điều kiện $a^3 + b^3 = a - b$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 < 1$$

Phân tích: Quan sát giả thiết ta nhận thấy $a > b > 0$ và hai đại lượng $a^3 + b^3$; $a - b$ không đồng bậc. Do đó ta có thể đồng bậc hai vế bằng cách nhân thêm $a^2 + b^2$. Vì yêu cầu chứng minh $a^2 + b^2 < 1$ nên kết hợp với giả thiết ta quy bài toán về chứng minh bất đẳng thức $a^3 + b^3 > (a - b)(a^2 + b^2)$. Đến đây ta có thể sử dụng phương pháp phản chứng hoặc biến đổi tương đương để chứng minh bài toán.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $a > b > 0$. Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là ta có bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 1$. Khi đó kết hợp với giả thiết ta được

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 &\leq (a - b)(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a^3 + b^3 \leq a^3 + ab^2 - a^2b - b^3 \\ \Leftrightarrow ab^2 - a^2b - 2b^3 &\geq 0 \Leftrightarrow b(ab - a^2 - 2b^2) \geq 0\end{aligned}$$

Vì $a > b > 0$ nên ta có $a(b - a) < 0 \Rightarrow a(b - a) - 2b^3 < 0$. Do đó bất đẳng thức trên không thể xảy ra.

Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Bất đẳng thức trên cũng có thể chứng minh theo cách sau đây:

Từ giả thiết ta có $a > b > 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}a^3 + b^3 &> (a - b)(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a^3 + b^3 > a^3 + ab^2 - a^2b - b^3 \\ \Leftrightarrow a^2b - ab^2 + 2b^3 &> 0 \Leftrightarrow a^2 - ab + 2b^2 > 0\end{aligned}$$

Mà ta có $a > b > 0$ nên $a^2 - ab > 0$ nên ta được $a^2 - ab + 2b^2 > 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Ví dụ 9. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 90$

Chứng minh rằng:	$a + b + c \geq 16$
------------------	---------------------

Phân tích: Từ điều kiện của biến $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$, để quy về một điều kiện ta có thể sử dụng cách đặt biến phụ $a = x + 4; b = y + 5; z = c + 6$, khi đó điều kiện của biến mới là $x, y, z \geq 0$.

Giả thiết lúc này được viết lại là $x^2 + y^2 + z^2 + 12(x + y + z) - 4x - 2z = 13$ và bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $x + y + z \geq 1$. Từ những kết quả thu được ở trên ta nếu ta giả sử $x + y + z < 1$ thì ta thu được điều kiện $0 \leq x, y, z < 1$. Khi đó ta có

$x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$ suy ra $x^2 + y^2 + z^2 + 12(x + y + z) - 4x - 2z < 13$. Đến đây xem như bài toán được giải quyết xong.

Lời giải

Đặt $a = x + 4; b = y + 5; z = c + 6$, khi đó ta có $x, y, z \geq 0$.

Giả thiết lúc này được viết lại là

$$(x + 4)^2 + (y + 5)^2 + (z + 6)^2 = 90 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 12(x + y + z) - 4x - 2z = 13$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $x + y + z \geq 1$

Giả sử tồn tại $x, y, z \geq 0$, thỏa mãn điều kiện

$$x^2 + y^2 + z^2 + 12(x + y + z) - 4x - 2z = 13$$

Nhưng bất đẳng thức $x + y + z \geq 1$ không đúng. Tức là ta có $x + y + z < 1$.

Khi đó hiển nhiên có $0 \leq x, y, z < 1$ nên $x^2 \leq x; y^2 \leq y; z^2 \leq z$.

Suy ra $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$. Từ đó ta có

$$\begin{aligned} 13 = x^2 + y^2 + z^2 + 12(x + y + z) - 4x - 2z &\leq 13(x + y + z) - 4x - 2z \\ &\leq 13(x + y + z) < 13 \end{aligned}$$

Hay $13 < 13$, đây là một mâu thuẫn. Vậy điều giả sử trên không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 10. Cho a, b, c là ba số thực bất kì thỏa mãn các điều kiện sau:

$$abc = 2015^3 \text{ và } ab + bc + ca < 2015(a + b + c)$$

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c đó có đúng một số lớn hơn 2015.

Phân tích: Từ bài toán ta nhận thấy không thể có trường hợp cả ba số a, b, c cùng lớn hơn 2015. Bài toán yêu cầu chứng minh rằng trong ba số a, b, c đó có đúng một số lớn hơn 2015. Điều này có nghĩa là không thể có hai số lớn hơn 2015 cũng không thể có cả ba số cùng không lớn hơn 2015. Như vậy để chứng minh bài toán ta chỉ

cần chứng minh hai trường hợp này không xảy ra là được. Để ý là khi so sánh các số a, b, c với 2015 ta thường so sánh $a - 2015; b - 2015; c - 2015$ với 0.

Lại thấy từ giả thiết ta được $2015(a + b + c) - (ab + bc + ca) > 0$ nên ta được

$$P = (a - 2015)(b - 2015)(c - 2015) = 2015 \left[2015(a + b + c) - (ab + bc + ca) \right] > 0.$$

Lời giải

Xét biểu thức

$$\begin{aligned} P &= (a - 2015)(b - 2015)(c - 2015) \\ &= abc - 2015(ab + bc + ca) + 2015^2(a + b + c) - 2015^3 \\ &= 2015 \left[2015(a + b + c) - (ab + bc + ca) \right] > 0 \end{aligned}$$

Giả sử khẳng định của bài toán là sai, khi đó sẽ có hai trường hợp

+ Trường hợp thứ nhất cả ba số a, b, c đều không lớn hơn 2015, khi đó ta có

$$a - 2015 \leq 0; b - 2015 \leq 0; c - 2015 \leq 0$$

Suy ra $P \leq 0$, điều này mâu thuẫn với bất đẳng thức trên.

+ Trường hợp thứ hai là có ít nhất hai số lớn hơn 2015, chẳng hạn là a, b . Khi đó ta được

$$a > 2015; b > 2015 \text{ suy ra } a - 2015 > 0; b - 2015 > 0.$$

$$\text{Do đó ta có } (a - 2015)(b - 2015) > 0 \Rightarrow c - 2015 = \frac{P}{(a - 2015)(b - 2015)} > 0$$

Suy ra $c > 2015$, dẫn đến $abc > 2015^3$, điều này mâu thuẫn với giả thiết $abc = 2015^3$.

Vậy điều giả sử không thể xảy ra. Do đó bài toán được chứng minh.

Ví dụ 11. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a^2 + 2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2 + 3a^2b^2c^2 = 9$

Chứng minh rằng: $|abc| \leq 1$

Phân tích: Trước hết ta nhận thấy, nếu một trong ba số a, b, c bằng 0 thì bài toán được chứng minh. Như vậy ta cần phải chứng minh cho trường hợp cả ba số a, b, c khác 0. Để ý từ giả thiết ta thu được

$$a^2 + 2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2 + 3a^2b^2c^2 = a^2 + \frac{a^2b^2c^2}{a^2} + 2 \left(b^2 + \frac{a^2b^2c^2}{b^2} \right) + 3a^2b^2c^2$$

$$\text{Mà ta lại có } a^2 + \frac{a^2b^2c^2}{a^2} + 2 \left(b^2 + \frac{a^2b^2c^2}{b^2} \right) + 3a^2b^2c^2 \geq 2|abc| + 4|abc| + 3a^2b^2c^2$$

Đến đây ta có thể sử dụng phép phản chứng hoặc phân tích thành nhân tử để chứng minh bài toán.

Lời giải

Nếu một trong ba số a, b, c bằng 0 thì bài toán được chứng minh.

Như vậy ta cần phải chứng minh cho trường hợp cả ba số a, b, c khác 0. Từ giả thiết ta thu được

$$a^2 + 2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2 + 3a^2b^2c^2 = a^2 + \frac{a^2b^2c^2}{a^2} + 2\left(b^2 + \frac{a^2b^2c^2}{b^2}\right) + 3a^2b^2c^2$$

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là ta có bất đẳng thức $|abc| > 1$

Đặt $x = |abc| > 1 \Rightarrow x^2 > 1$. Khi theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$\begin{aligned} 9 = a^2 + 2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2 + 3a^2b^2c^2 &= a^2 + \frac{x^2}{a^2} + 2\left(b^2 + \frac{x^2}{b^2}\right) + 3x^2 \\ &> a^2 + \frac{1}{a^2} + 2\left(b^2 + \frac{1}{b^2}\right) + 3 \geq 9 \end{aligned}$$

Hay $9 > 9$, điều này là vô lý. Vậy điều ta giả sử là không xảy ra hay bài toán được chứng minh.

Ngoài ra ta cũng có thể trình bày như sau: Biến đổi tương tự như trên ta được

$$9 = a^2 + \frac{a^2b^2c^2}{a^2} + 2\left(b^2 + \frac{a^2b^2c^2}{b^2}\right) + 3a^2b^2c^2 \geq 2|abc| + 4|abc| + 3a^2b^2c^2$$

Đặt $x = |abc| \geq 0$ khi đó ta được

$$9 \geq 6x + 3x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 3) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1.$$

Ví dụ 12. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a + b = 2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \leq 2$$

Phân tích: Để bài toán đơn giản hơn ta có thể thực hiện làm mất căn bậc ba bằng cách đặt $x = \sqrt[3]{a}$; $y = \sqrt[3]{b}$, khi đó giả thiết của bài toán trở thành $x^3 + y^3 = 2$ và ta cần chứng minh $x + y \leq 2$. Để ý ta thấy $x + y \leq 2$ tương đương với $(x + y)^3 \leq 8$, khai triển ta và sử dụng giả thiết ta được được $xy(x + y) \leq x^3 + y^3$. Như vậy bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng nên ta có được bất đẳng thức cần chứng minh. Tuy nhiên nếu $x + y > 2$, với cách biến đổi như trên ta thu được $xy(x + y) > x^3 + y^3$ là một bất đẳng thức sai. Do đó ta có thể sử dụng phép biến đổi tương đương hoặc phép phản chứng để giải quyết bài toán.

Lời giải

Đặt $x = \sqrt[3]{a}$; $y = \sqrt[3]{b}$, khi đó giả thiết của bài toán trở thành $x^3 + y^3 = 2$ và ta cần chứng minh $x + y \leq 2$.

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là ta có bất đẳng thức $x + y > 2$.

Biến đổi tương đương bất đẳng thức ta được

$$\begin{aligned}(x + y)^3 > 8 &\Leftrightarrow x^3 + y^3 + 3(x + y) > 8 \Leftrightarrow 2 + 3xy(x + y) > 8 \\ &\Leftrightarrow xy(x + y) > 2 \Leftrightarrow xy(x + y) > x^3 + y^3\end{aligned}$$

Chia 2 vế cho số dương $x + y$ khi đó ta được bất đẳng thức

$$xy > x^2 - xy + y^2 \Leftrightarrow 0 > (x - y)^2$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức sai. Vậy điều ta giả sử là không xảy ra hay bài toán được chứng minh.

Ví dụ 13. Cho 25 số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_{25}$ khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} = 9$$

Chứng minh rằng trong 25 số tự nhiên đó luôn tồn tại hai số bằng nhau.

Phân tích: Để chứng minh trong hai 25 số tự nhiên trên luôn tồn tại hai số bằng nhau ta có thể giả sử 25 số đó khác nhau từng đôi một, để dễ biến đổi ta nên sắp thứ tự cho 25 số đó, chẳng hạn $a_1 < a_2 < \dots < a_{25}$. Với cách sắp thứ tự như vậy ta sẽ nhận được kết quả là $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \dots, a_{25} \geq 25$. Khi đó ta có

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{25}}$$

Đến đây ta chỉ cần chỉ ra $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{25}} \leq 9$ là bài toán được giải quyết

Lời giải

Giả sử trong 25 số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_{25}$ không có hai số nào bằng nhau.

Không mất tính tổng quát ta có thể chọn $a_1 < a_2 < \dots < a_{25}$. Khi đó ta có

$$a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \dots, a_{25} \geq 25$$

Suy ra ta được $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{25}}$

Mặt khác ta chứng minh được

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{25}} &= 1 + \frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{3}} + \dots + \frac{2}{2\sqrt{25}} \\ &< 1 + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{25} + \sqrt{24}} \right) \\ &= 1 + 2(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{25} - \sqrt{24}) \\ &= 1 + 2(\sqrt{25} - 1) = 9\end{aligned}$$

Điều này dẫn tới $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{25}}} < 9$

Bất đẳng thức thu được mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Vậy điều ta giả sử là không xảy ra hay bài toán được chứng minh.

Ví dụ 14. Cho 25 số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ khác 0 thỏa mãn điều kiện:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2015}}} \geq 89$$

Chứng minh rằng trong 2015 số tự nhiên đó luôn tồn tại hai số bằng nhau.

Lời giải

Giả sử trong 2015 số tự nhiên $a_1, a_2, \dots, a_{2015}$ không có hai số nào bằng nhau. Không mất tính tổng quát ta có thể chọn $a_1 < a_2 < \dots < a_{2015}$. Khi đó ta có

$$a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, a_3 \geq 3, \dots, a_{2015} \geq 2015$$

Suy ra ta được $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2015}}} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015}}$

Mặt khác ta chứng minh được

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015}} &= 1 + \frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{3}} + \dots + \frac{2}{2\sqrt{2015}} \\ &< 1 + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015} + \sqrt{2014}} \right) \\ &= 1 + 2(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{2015} - \sqrt{2014}) \\ &= 1 + 2(\sqrt{2015} - 1) < 89\end{aligned}$$

Điều này dẫn tới $\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2015}}} < 89$

Bất đẳng thức thu được mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Vậy điều ta giả sử là không xảy ra hay bài toán được chứng minh.

Ví dụ 15. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^4 + b^4 < a^3 + b^3$. Chứng minh rằng:

$$a + b < 2$$

Lời giải

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh sai, khi đó ta có bất đẳng thức $a + b \geq 2$.

Đặt $a = x + 1$; $b = y + 1$ khi đó ta được $x + y \geq 0$

Xét hiệu hai vế của giả thiết ta được

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 - a^3 - b^3 &= (1+x)^4 + (1+y)^4 - (1+x)^3 - (1+y)^3 \\ &= (x+y) + 3(x^2 + y^2) + 3(x^3 + y^3) \\ &= (x+y) + 3(x^2 + y^2) + 3(x+y)(x^2 - xy + y^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Hay $a^4 + b^4 - a^3 - b^3 \geq 0$

Mà ta lại có $a + b \geq 2$ do đó suy ra $a^4 + b^4 \geq a^3 + b^3$. Bất đẳng thức thu được trái với giả thiết của bài toán.

Vậy điều ta giả sử là không xảy ra hay bài toán được chứng minh.

Ví dụ 16. Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2(1 + ab)$.

Chứng minh rằng: $a \geq c$ và $b \geq c$

Phân tích: Quan sát bài toán ta nhận thấy vai trò của a, b là như nhau, do đó ta chỉ cần chứng minh $a \geq c$, trường hợp còn lại hoàn toàn tương tự. Để tìm mối liên hệ của a và c ta viết lại giả thiết là $a^2 - c^2 = b(ac^2 - b)$. Do đó nếu như $a < c$ thì ta được bất đẳng thức $a^2 - c^2 = b(ac^2 - b) < 0 \Leftrightarrow b > ac^2$. Mặt khác ta lại thấy $b(b - ac^2) \geq b > ac^2$. Như vậy ta được $c^2 - a^2 - ac^2 > 0$, nhưng do a, c là các số nguyên dương nên ta lại thu được $c^2 - a^2 - ac^2 = c^2(1 - a) - a^2 < 0$, hai bất đẳng thức này mâu thuẫn với nhau, bài toán được giải quyết xong.

Lời giải

+ Trước hết ta chứng minh $a \geq c$. Ta viết lại giả thiết là $a^2 - c^2 = b(ac^2 - b)$.

Giả sử $a < c$ khi đó ta được $a^2 - c^2 = b(ac^2 - b) < 0 \Leftrightarrow b > ac^2$.

Mà ta lại thấy $b(b - ac^2) \geq b > ac^2$.

Như vậy ta được $c^2 - a^2 - ac^2 > 0$.

Mà do a, c là các số nguyên dương nên ta được $c^2 - a^2 - ac^2 = c^2(1 - a) - a^2 < 0$.

Hai bất đẳng thức này mâu thuẫn với nhau. Do đó không thể xảy ra $a < c$, tức là ta có bất đẳng thức $a \geq c$.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $b \geq c$.

Vậy bài toán được chứng minh xong.

Ví dụ 17. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c \geq abc$. Chứng minh rằng 2 trong 3 bất đẳng thức sau là bất đẳng thức đúng

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{6}{c} \geq 6; \quad \frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{6}{a} \geq 6; \quad \frac{2}{c} + \frac{3}{a} + \frac{6}{b} \geq 6$$

Phân tích: Từ cách phát biểu bài toán ta ưu tiên lựa chọn phương pháp phản chứng để chứng minh. Vì bài toán yêu cầu ta phải chứng minh có ít nhất hai trong ba bất đẳng thức là đúng, điều này có nghĩa là không thể có trường hợp có ít nhất hai bất đẳng thức trên cùng sai. Như vậy ta chỉ cần chứng minh trường hợp có ít nhất hai bất đẳng thức trên cùng sai không thể xảy ra là được. Chú ý giả thiết và các bất

đẳng thức ta có thể đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$. Khi đó giả thiết trở thành

$xy + yz + zx \geq 1$ và các bất đẳng thức là $2x + 3y + 6z \geq 6$; $2y + 3z + 6x \geq 6$; $2z + 3x + 6y \geq 6$.

Lời giải

Đặt $x = \frac{1}{a}$; $y = \frac{1}{b}$; $z = \frac{1}{c}$. Khi đó giả thiết trở thành $xy + yz + zx \geq 1$ và các bất đẳng thức là $2x + 3y + 6z \geq 6$; $2y + 3z + 6x \geq 6$; $2z + 3x + 6y \geq 6$.

Ta cần chứng minh có ít nhất hai trong ba bất đẳng thức trên là đúng.

Giả sử điều cần phải chứng minh là sai. tức là có ít nhất hai bất đẳng thức trên không đúng. Không mất tính tổng quát ta chọn $2x + 3y + 6z \geq 6$; $2y + 3z + 6x \geq 6$ là hai bất đẳng thức bị sai, khi đó ta được $2x + 3y + 6z < 6$; $2y + 3z + 6x < 6$
Cộng theo vế hai bất đẳng thức trên ta được $8x + 5y + 9z < 12$

Từ $xy + yz + zx \geq 1$ ta được $x \geq \frac{1 - yz}{y + z}$, khi đó ta có bất đẳng thức

$$\begin{aligned} \frac{8(1 - yz)}{y + z} + 5y + 9z < 12 &\Leftrightarrow 8(1 - yz) + (y + z)(5y + 9z) < 12(y + z) \\ &\Leftrightarrow 5y^2 + 9z^2 + 6yz - 12y - 12z + 8 < 0 \\ &\Leftrightarrow (y + 3z - 2)^2 + 4(y - 1)^2 < 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức sai.

Vậy điều giả sử không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 18. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{1+8a}} + \frac{1}{\sqrt{1+8b}} + \frac{1}{\sqrt{1+8c}} \geq 1$$

Phân tích: Để ý ta thấy $x = \frac{1}{\sqrt{1+8a}} \Leftrightarrow a = \frac{1-x^2}{8x^2}$ và vì a là số thực dương nên ta có điều kiện $0 < x < 1$. Như vậy để đơn giản hóa bất đẳng thức cần chứng minh ta có thể đổi biến $x = \frac{1}{\sqrt{1+8a}}; y = \frac{1}{\sqrt{1+8b}}; z = \frac{1}{\sqrt{1+8c}}$, khi đó ta được $0 < x; y; z < 1$.

Giả thiết được viết lại là $8^3 x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$ và bất đẳng thức cần chứng minh là $x+y+z \geq 1$. Nhìn giả thiết ta liên tưởng đến một bất đẳng thức quen thuộc $8xyz \leq (x+y)(y+z)(z+x)$, như vậy ta cần cách tìm biến đổi làm xuất hiện các đại lượng $x+y, y+z, z+x$. Nhận thấy theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$(x+y+z)^2 - x^2 = (y+z)[(x+y)+(x+z)] \geq 2(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)}$$

Như vậy nếu $x+y+z \geq 1$ thì $1-x^2 \leq (x+y+z)^2 - x^2$, lúc này ta được các bất đẳng thức ngược chiều nhau. Đến đây một cách tự nhiên ta nghĩ đến phép phản chứng.

Lời giải

$$\text{Đặt } x = \frac{1}{\sqrt{1+8a}}; y = \frac{1}{\sqrt{1+8b}}; z = \frac{1}{\sqrt{1+8c}}.$$

$$\text{Suy ra } a = \frac{1-x^2}{8x^2}; b = \frac{1-y^2}{8y^2}; c = \frac{1-z^2}{8z^2}, \text{ khi đó ta được } 0 < x; y; z < 1.$$

Vì $abc=1$ nên giả thiết được viết lại là $8^3 x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)$ và bất đẳng thức cần chứng minh là $x+y+z \geq 1$.

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là ta có bất đẳng thức $x+y+z < 1$. Khi đó áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} 1-x^2 &> (x+y+z)^2 - x^2 = (y+z)[(x+y)+(x+z)] \\ &\geq 2(y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)} > 0 \end{aligned}$$

Áp dụng tương tự ta có

$$1-y^2 > 2(x+z)\sqrt{(x+y)(y+z)} > 0; \quad 1-z^2 > 2(x+y)\sqrt{(x+z)(y+z)} > 0$$

Nhân theo vế các bất đẳng thức trên ta được

$$8^3 x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) > (x+y)^2 (y+z)^2 (z+x)^2$$

Hay $8xyz > (x+y)(y+z)(z+x)$, rõ ràng bất đẳng thức cuối cùng là một bất đẳng thức sai. Vậy điều giả sử không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Một số ví dụ khác

Ví dụ 19. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \geq 3\sqrt{2}$$

Lời giải

Đặt $x = \sqrt{a+b}$; $y = \sqrt{b+c}$; $z = \sqrt{c+a}$, khi đó ta được

$$2a = x^2 + z^2 - y^2; 2b = x^2 + y^2 - z^2; 2c = z^2 + y^2 - x^2$$

Giả thiết được viết lại thành $\frac{1}{x^2 + z^2 - y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} + \frac{1}{z^2 + y^2 - x^2} = \frac{3}{2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh là $x + y + z \geq 3\sqrt{2}$

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là ta có $x + y + z < 3\sqrt{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} &= \frac{1}{x^2 + z^2 - y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2 - z^2} + \frac{1}{z^2 + y^2 - x^2} \\ &\geq \frac{3}{\sqrt[3]{(x^2 + z^2 - y^2)(x^2 + y^2 - z^2)(z^2 + y^2 - x^2)}} \end{aligned}$$

Mặt khác theo một bất đẳng thức quen thuộc ta lại có

$$(x^2 + z^2 - y^2)(x^2 + y^2 - z^2)(z^2 + y^2 - x^2) \leq x^2 y^2 z^2 \leq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^6 < 8$$

Do đó ta được $\frac{3}{\sqrt[3]{(x^2 + z^2 - y^2)(x^2 + y^2 - z^2)(z^2 + y^2 - x^2)}} > \frac{3}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2}$

Hay ta được $\frac{3}{2} > \frac{3}{2}$, bất đẳng thức thu được là một bất đẳng thức sai.

Vậy điều giả sử không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 20. Cho a, b là các số thực thỏa mãn các điều kiện sau:

$$-1 \leq a + b \leq 1; -1 \leq a + b + ab \leq 1$$

Chứng minh rằng: $-2 \leq a, b \leq 2$

Lời giải

Vì vai trò của a, b như nhau nên ta chỉ cần chứng minh $-2 \leq a \leq 2$. Việc chứng minh $-2 \leq b \leq 2$ hoàn toàn tương tự.

Giả sử bất đẳng thức $-2 \leq a \leq 2$ là sai, khi đó ta có $a > 2$ hoặc $a < -2$.

+ Xét trường hợp $a > 2$, khi đó từ $-1 \leq a + b \leq 1$ suy ra $b \leq 1 - a < 1 - 2 = -1$, do đó ta được $ab < -2$ mà $a + b \leq 1$ nên $a + b + ab < -1$ điều này mâu thuẫn với giả thiết thứ hai của bài toán. Như vậy trường hợp này không xảy ra.

+ Xét trường hợp $a < -2$, khi đó từ $-1 \leq a + b \leq 1$ suy ra $b \geq -1 - a > -1 + 2 = 1$, do đó ta được $ab < -2$ mà $a + b \leq 1$ nên $a + b + ab < -1$ điều này mâu thuẫn với giả thiết thứ hai của bài toán. Như vậy trường hợp này cũng không xảy ra.

Các kết quả trên chứng tỏ điều giả sử không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 21. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c \geq abc$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq abc$$

Lời giải

Nếu $abc = 0$, thì bất đẳng thức được chứng minh.

Xét $abc \neq 0$, khi đó ta được $a, b, c > 0$. Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh là sai, tức là $a^2 + b^2 + c^2 < abc$. Khi đó ta có $abc > a^2 + b^2 + c^2 > a^2$ nên $bc > a$.

Chứng minh tương tự ta được $b < ac, c < ab$

Từ đó suy ra $a + b + c < ab + bc + ca$.

Mặt khác ta lại có $abc > a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Rightarrow abc > ab + bc + ca$

Kết hợp hai bất đẳng thức ta được $abc > a + b + c$, bất đẳng thức này mâu thuẫn với giả thiết của bài toán.

Vậy điều giả sử không thể xảy ra, tức là bài toán được chứng minh.

Ví dụ 22. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Chứng minh rằng: $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq 1$

Lời giải

Bất đẳng thức có tính đối xứng giữa các biến, do đó không mất tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$, Khi đó $a + b - c \geq 0$ và $a + c - b \geq 0$.

+ Nếu $b + c - a < 0$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

+ Nếu $b + c - a \geq 0$. Khi này ta đặt $x = b + c - a; y = c + a - b; z = a + b - c$.

Khi đó ta viết lại giả thiết là $x, y, z \geq 0$ và $x + y + z = \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x}$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $xyz \geq 1$.

Ta chứng minh bất đẳng thức trên bằng phương pháp phản chứng

Thật vậy, giả sử $xyz < 1$. Khi đó theo bất đẳng thức Cauchy ta được

$$x + y + z = \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}}$$

Hay $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq \sqrt{xyz}(x+y+z)$, vì $xyz < 1$ nên

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} > x + y + z$$

Tuy nhiên cũng theo bất đẳng thức Cauchy ta được $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$, thiết lập các đánh giá tương tự ta có

$$\frac{x+y+z+3}{2} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} > x+y+z \Rightarrow x+y+z < 3$$

Mặt khác $x + y + z = \frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z} \Rightarrow x+y+z \geq 3$

Mâu thuẫn này chứng tỏ điều giả sử trên là sai, do vậy $xyz \geq 1$. Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh, dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét: Ta có thể sử dụng phương pháp phản chứng theo hướng như sau

Giả sử $xyz < 1$, khi đó từ giả thiết của bài toán suy ra

$$(x+y+z)^2(xy+yz+zx) = 2(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) + xyz(x+y+z)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy và kết hợp với giả sử ta lại có

$$xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} > 3; x+y+z > 3$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{2(x+y+z)^2(xy+yz+zx)}{3} &> 2(x+y+z)^2 \\ \frac{2(x+y+z)^2(xy+yz+zx)}{9} &> 2(xy+yz+zx) \\ \frac{2(x+y+z)^2(xy+yz+zx)}{9} &> xyz(x+y+z) \end{aligned}$$

Cộng theo vế a bất đẳng thức trên ta được

$$(x+y+z)^2(xy+yz+zx) > 2(x+y+z) + 2(xy+yz+zx) + xyz(x+y+z)$$

Điều này mâu thuẫn với đẳng thức trên, do đó điều giả sử là sai. Như vậy bất đẳng thức trên được chứng minh.

Ví dụ 23. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$a < b < c; a+b+c=6; ab+bc+ca=9$$

Chứng minh rằng: $0 < a < 1; 1 < b < 3; 3 < c < 4$

Lời giải

Từ giả thiết của bài toán, ta suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) = 18$$

Mặt khác, vì a, b, c là các số dương cho nên

$$9 = ab + bc + ca < a(b+c) + \frac{(b+c)^2}{4} = a(6-a) + \frac{(6-a)^2}{2}$$

Hay $\frac{3a^3}{4} - 3a < 0$, từ đó suy ra $0 < a < 4$, do vậy $0 < a < b < c$

Khi đó $18 = a^2 + b^2 + c^2 < ac + bc + c^2 = c(a+b+c) = 6c$. Suy ra $c > 3$.

Bây giờ ta chứng minh $c < 4$. Thật vậy, giả sử $c \geq 4$ khi đó ta được $c^2 \geq 4c$, từ đây ta suy ra

$$18 = a^2 + b^2 + c^2 > \frac{(a+b)^2}{2} + c^2 > \frac{(6-c)^2}{2} + 4c$$

Hay $\frac{c^2}{2} - 2c < 0 \Leftrightarrow 0 < c < 4$. Mâu thuẫn với $c \geq 4$, do vậy $c < 4$

Từ đó ta có $3 < c < 4$

Cũng từ đây ta suy ra $a < b < c < 4$. Ta chứng minh $a < 1$. Thật vậy, giả sử $a \geq 1$

Khi đó ta được $1 \leq a < b < c < 4$, suy ra

$$(a-1)(a-4) \leq 0; (b-1)(b-4) < 0; (c-1)(c-4) < 0$$

Hay $a^2 \leq 5a - 4; b^2 < 5b - 4; c^2 < 5c - 4$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được $a^2 + b^2 + c^2 < 5(a+b+c) - 12 = 18$

Điều này mâu thuẫn với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 18$. Do đó $a < 1$. Vậy $0 < a < 1$.

Cuối cùng ta chứng minh $1 < b < 3$

Thật vậy, vì $a < 1$ và $c < 4$, do đó $b = 6 - a - c > 6 - 1 - 4 = 1$ hay $b > 1$

Ta cần chứng minh $b < 3$.

Giả sử $b \geq 3$, khi đó ta có $(b-3)(c-3) \geq 0$

$$\text{Hay } bc \geq 3(b+c) - 9 = 3(6-a) - 9 = 9 - 3a$$

Từ đó suy ra $9 = ab + bc + ca = a(b+c) + bc \geq a(b+c) + 9 - 3a$

$$\text{Hay } a(b+c-3) \leq 0$$

Đánh giá cuối cùng là một đánh giá sai do $3 < c < 4$. Vì vậy giả sử $b \geq 3$ là sai.

Do đó $b < 3$. Vậy ta được $1 < b < 3$.

Như vậy bài toán được chứng minh xong. <http://vnnteach.com> - Website tài liệu cho giáo viên và học sinh