

Người làm: Nguyễn Minh Hiếu

Zalo: Nguyễn Minh Hiếu - số đt zalo: 0962882326

Email: mhieuvq@gmail.com

**CD5: SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ**

**Dạng 1: Sử dụng các tính chất của phép chia số nguyên**

**A. Trắc nghiệm (nếu có)**

**B. Tự luận**

**Câu 1. (HSG 7 huyện Kinh Môn 2020 - 2021)**

Cho các số nguyên dương  $a, b, c, d$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  chia hết cho 2. Chứng minh rằng:  $a + b + c + d$  là hợp số.

**Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - a - b - c - d &= (a^2 - a) + (b^2 - b) + (c^2 - c) + (d^2 - d) \\ &= a(a - 1) + b(b - 1) + c(c - 1) + d(d - 1) \end{aligned}$$

Do  $a, b, c, d$  là các số nguyên dương, nên  $a$  và  $a - 1$ ;  $b$  và  $b - 1$ ;  $c$  và  $c - 1$ ;  $d$  và  $d - 1$  là hai số nguyên liên tiếp. Suy ra:

$$\begin{cases} a(a - 1):2 \\ b(b - 1):2 \\ c(c - 1):2 \\ d(d - 1):2 \Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d):2 \end{cases}$$

Mà  $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2):2 \Rightarrow (a + b + c + d):2$  (1)

Vì  $a, b, c, d$  là các số nguyên dương  $\Rightarrow a + b + c + d > 2$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow a + b + c + d$  là hợp số.

Vậy  $a + b + c + d$  là hợp số.

**Câu 2. (HSG 7 huyện Trực Ninh 2018 - 2019)**

Tìm các số tự nhiên  $a, b$  sao cho:  $(2008a + 3b + 1)(2008^a + 2008a + b) = 225$

**Lời giải**

Theo đề bài  $\Rightarrow 2008a + 3b + 1$  và  $2008^a + 2008a + b$  là hai số lẻ

Nếu  $a \neq 0 \Rightarrow 2008^a + 2008a$  là số chẵn

Để  $2008^a + 2008a + b$  lẻ  $\Rightarrow b$  lẻ, nếu  $b$  lẻ  $\Rightarrow 3b + 1$  chẵn, do đó  $2008a + 3b + 1$  chẵn (không thỏa mãn), vậy  $a = 0$

Với  $a = 0 \Rightarrow (3b + 1)(b + 1) = 225$

Vì  $b \in \mathbb{N} \Rightarrow (3b + 1)(b + 1) = 3.75 = 5.45 = 9.25$

$3b + 1$  không chia hết cho 3 và  $3b + 1 > b + 1 \Rightarrow \begin{cases} 3b + 1 = 25 \\ b + 1 = 9 \end{cases} \Rightarrow b = 8$

Vậy  $a = 0, b = 8$ .

**Dạng 2: Áp dụng định lý Fermat**

**A. Trắc nghiệm (nếu có)**

**B. Tự luận**

**Dạng 3: Phương pháp phân tích**

**A. Trắc nghiệm (nếu có)**

**B. Tự luận**

**Câu 1. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2020 - 2021)**

Cho đa thức:  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  với  $a \in \mathbb{N}^*$  và  $f(5) - f(4) = 2022$ . Chứng minh:  $f(7) - f(2)$  là hợp số.

**Lời giải**

Xét đa thức:  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  với  $a \in \mathbb{N}^*$

Ta có:  $f(5) - f(4) = (a.5^3 + b.5^2 + c.5 + d) - (a.4^3 + b.4^2 + c.4 + d)$   
 $\Rightarrow f(5) - f(4) = (125a + 25b + 5c + d) - (64a + 16b + 4c + d)$   
 $\Rightarrow f(5) - f(4) = 61a + 9b + c$

Mà  $f(5) - f(4) = 2022 \Rightarrow 61a + 9b + c = 2022$  (1)

Lại có:  $f(7) - f(2) = (a.7^3 + b.7^2 + c.7 + d) - (a.2^3 + b.2^2 + c.2 + d)$   
 $\Rightarrow f(7) - f(2) = (343a + 49b + 7c + d) - (8a + 4b + 2c + d)$   
 $\Rightarrow f(7) - f(2) = 335a + 45b + 5c$   
 $\Rightarrow f(7) - f(2) = 5(67a + 9b + c) = 5(6a + 61a + 9b + c)$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra:  $f(7) - f(2) = 5.(6a + 2022)$  là hợp số.

Vậy  $f(7) - f(2)$  là hợp số.

**Câu 2. (HSG 7 huyện Tiền Hải 2021 - 2022)**

Cho 2022 số  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2021}, a_{2022}$  là các số tự nhiên khác 0 thỏa mãn:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2021}} + \frac{1}{a_{2022}} = 1$$

. Chứng minh rằng: Tồn tại ít nhất một số trong 2022 số đã cho là số chẵn.

**Lời giải**

Từ  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2021}} + \frac{1}{a_{2022}} = 1$

$\Rightarrow a_2 a_3 \dots a_{2022} + a_1 a_2 \dots a_{2021} = a_1 a_2 \dots a_{2022}$  (\*)

Giả sử các số  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2021}, a_{2022}$  đều là số lẻ, khi đó vế trái của (\*) là tổng của 2022 số lẻ nên vế trái là số chẵn, mà vế phải là số lẻ (mâu thuẫn)  $\Rightarrow$  Điều giả sử sai.

Vậy do đó tồn tại ít nhất một số trong 2022 số đã cho là số chẵn (đpcm).

**Câu 3. (HSG 7 Trường THCS Nguyễn Trung Trực 2018-2019)** Chứng minh rằng nếu  $m$  và  $n$  là các số tự nhiên thì số:  $A = (5m + n + 1)(3m - n + 4)$  là số chẵn

**Lời giải**

Ta xét hiệu  $(5m + n + 1) - (3m - n + 4) = 5m + n + 1 - 3m + n - 4 = 2m + 2n - 3$

Với  $m, n \in \mathbb{N}$  thì  $2m + 2n - 3$  là một số lẻ.

Do đó trong hai số  $5m + n + 1$  và  $3m - n + 4$  phải có một số chẵn.

Suy ra tích của chúng là một số chẵn.

Vậy  $A$  là số chẵn.

**Dạng 4: Giải phương trình nghiệm nguyên dựa vào tính chất số nguyên tố**

**A. Trắc nghiệm (nếu có)**

**B. Tự luận**

**Câu 1: (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2020 - 2021)**

Tìm cặp số  $(x, y)$  nguyên thỏa mãn:  $x - 2xy + y - 3 = 0$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & x - 2xy + y - 3 = 0 \\ & \Rightarrow x(1 - 2y) + y = 3 \\ & \Rightarrow 2x(1 - 2y) + 2y = 6 \\ & \Rightarrow 2x(1 - 2y) + 2y - 1 = 6 - 1 \\ & \Rightarrow (2x - 1)(1 - 2y) = 5 \quad (1) \\ & \Rightarrow 2x - 1 \in U(5) \quad (\text{vì } x, y \in \mathbb{Z}) \\ & \Rightarrow 2x - 1 \in \{1; -1; 5; -5\} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có bảng:

$2x - 1$	1	5	-1	-5
$1 - 2y$	5	1	-5	-1
$x$	1	3	0	-2
$y$	-2	0	3	1
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy  $(x, y) \in \{(1; -2), (0; 3), (3; 0), (-2; 1)\}$

**Câu 2: (HSG 7 huyện Kinh Môn 2021 - 2022)**

Tìm các số nguyên  $x, y$  biết:  $x + xy + y = 2$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & x + xy + y = 2 \\ & x(y + 1) + y + 1 = 3 \\ & (x + 1)(y + 1) = 3 \end{aligned}$$

Do  $x, y$  nguyên nên  $x + 1; y + 1$  cũng nguyên

Do đó:  $x + 1 \in U(3)$  (vì  $x, y \in \mathbb{Z}$ )

$$\Rightarrow x + 1 \in \{1; -1; 3; -3\} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có bảng:

$x+1$	1	-1	3	-3
$y+1$	3	-3	1	-1
$x$	0	-2	2	-4
$y$	2	-4	0	-2
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Vậy  $(x; y) \in \{(0; 2), (2; 0), (-2; -4), (-4; -2)\}$ .

**Câu 3: (HSG 7 huyện Hương Khê 2021 - 2022)**

Tìm số nguyên  $x$  và  $y$  biết:  $\frac{5}{x} + \frac{y}{2} = \frac{1}{4}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\frac{5}{x} + \frac{y}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1}{4} - \frac{y}{2} \Rightarrow x(1 - 2y) = 20$

Vì  $x$  và  $y$  nguyên mà  $1 - 2y$  là số lẻ nên ta có bảng sau:

$x$	-20	20	-4	4
$1 - 2y$	-1	1	-5	5
$y$	1	0	3	-2

Vậy  $(x; y) \in \{(-20; 1), (20; 0), (-4; 3), (4; -2)\}$ .

**Câu 4: (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2018 - 2019)**

Tìm các cặp số nguyên dương  $(a, b)$  biết:  $3a - b + ab = 8$ .

**Lời giải**

Ta có:  $3a - b + ab = 8 \Rightarrow (ab - b) + (3a - 3) = 5$   
 $\Rightarrow b(a - 1) + 3(a - 1) = 5 \Rightarrow (a - 1)(b + 3) = 5$

Lập bảng ta có:

$a - 1$	1	5	-1	-5
$a$	2	6	0	-4
$b + 3$	5	1	-5	-1
$b$	2	-2	-8	-4
Xét	Thỏa mãn	Không thỏa mãn	Không thỏa mãn	Không thỏa mãn

Vậy các cặp số nguyên dương  $(a, b)$  cần tìm là  $(2; 2)$ .

**Câu 5: (HSG 7 Trường THCS Cù Chính Lan 2018 - 2019)**

Tìm số nguyên  $x, y$  biết:  $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8}$

**Lời giải**

Từ  $\frac{5}{x} + \frac{y}{4} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1}{8} - \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{1 - 2y}{8} \Rightarrow x(1 - 2y) = 40$   
 $\Rightarrow 1 - 2y \in \text{Ước lẻ của } 40 \text{ là } \pm 1; \pm 5$

$1 - 2y$	-5	-1	1	5
$x$	-8	-40	40	8

y	3	1	0	-2
---	---	---	---	----

Vậy ta có các cặp số  $(x; y) = \{(-8; 3); (-40; 1); (40; 0); (8; -2)\}$ .

**Câu 6: (HSG 7 huyện Lục Nam 2018 - 2019)** Tìm số nguyên  $x, y$  sao cho  $x - 2xy + y = 0$

**Lời giải**

Từ  $x - 2xy + y = 0 \Rightarrow (1 - 2y)(2x - 1) = -1$

Vì  $x, y$  là các số nguyên nên  $(1 - 2y)$  và  $(2x - 1)$  là các số nguyên, do đó ta có các trường hợp sau:

$$\begin{cases} 1 - 2y = 1 \\ 2x - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 1 - 2y = -1 \\ 2x - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy có 2 cặp số  $x, y$  như trên thỏa mãn điều kiện đầu bài

**Câu 7: (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2018 - 2019)** Tìm  $x, y$  nguyên biết:  $xy + 3x - y = 6$

**Lời giải**

$$x(y + 3) - (y + 3) = 6 \Rightarrow (x - 1)(y + 3) = 6$$

Ta có bảng sau:

$x - 1$	-1	1	-3	3
$y + 3$	-3	3	-1	1
$x$	0	2	-2	4
$y$	-6	0	-4	-2

Các cặp  $(x; y)$  thỏa mãn là  $(2; 0); (0; -6); (4; -2); (-2; -4)$ .

**Dạng 5: Các bài toán về hai số nguyên tố cùng nhau**

**A. Trắc nghiệm (nếu có)**

**B. Tự luận Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com**

<https://www.vnteach.com>