

▮ BÀI 2 : TÍCH MỘT SỐ VỚI MỘT VÉCTƠ

▮ BÀI GIẢNG 1 : CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VÉCTƠ – ĐỘ DÀI VÉCTƠ



LÝ THUYẾT



Memorize :



Lý thuyết bài giảng :



LÀM

Câu 76: Cho tam giác ABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CP . Chứng minh :

$$\begin{aligned} \text{a) } \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} &= \mathbf{0} . \\ \text{b) } \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} . \end{aligned}$$

 **Lời giải :**

Câu 77: Cho hai điểm phân biệt A và B .

$$\begin{aligned} \text{a) Hãy xác định điểm } K \text{ sao cho } \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} &= \mathbf{0} . \\ \text{b) Chứng minh rằng với mọi điểm } O, \text{ ta có } \overrightarrow{OK} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} . \end{aligned}$$

 **Lời giải :**

Câu 78: Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng

minh:
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} .$$

 **Lời giải :**

Câu 79: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD , O là trung điểm của IJ . Chứng minh rằng:

- a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$. b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
- c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ với M là điểm bất kì.

 **Lời giải :**

Câu 80: Cho tam giác ABC . Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NA = 2NC$. Gọi K là trung điểm của MN .

Chúng minh rằng: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

 **Lời giải :**



MÓN QUÀ

Câu 81: Cho tứ giác $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD . Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN . Chứng minh $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Lời giải

Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$.

Vì N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}$.

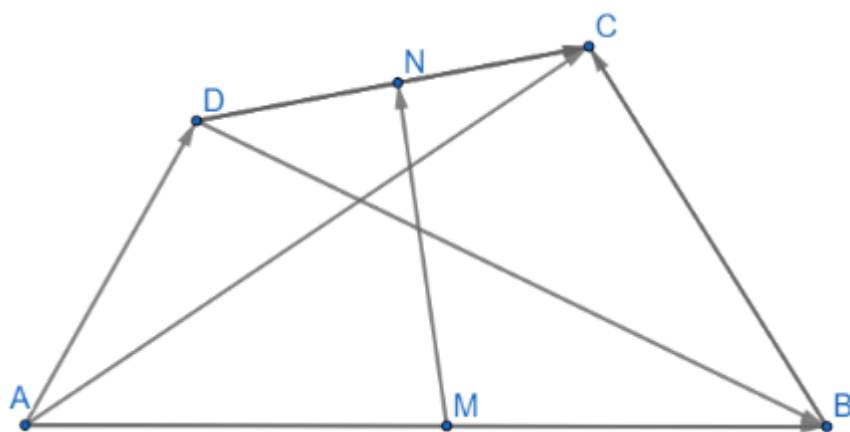
Suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = 2\vec{0} = \vec{0}$.

Câu 82: Cho tứ giác $ABCD$ gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$

Lời giải



a)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND} \\ &= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN}) + (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}) \\ &= \mathbf{0} + 2\overrightarrow{MN} + \mathbf{0} = 2\overrightarrow{MN} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$

Cách 1.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND} \\ (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN}) + (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}) &= 2\overrightarrow{MN} \end{aligned}$$

Mặt khác ta có: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$

Suy ra $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$

Cách 2:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} \quad (\text{đpcm})$$

Câu 83: Cho $\triangle ABC$. Các điểm M, N, P được xác định bởi:
 $\overrightarrow{MA} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BM}$; $\overrightarrow{AN} = -3\overrightarrow{CN}$; $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{PB}$

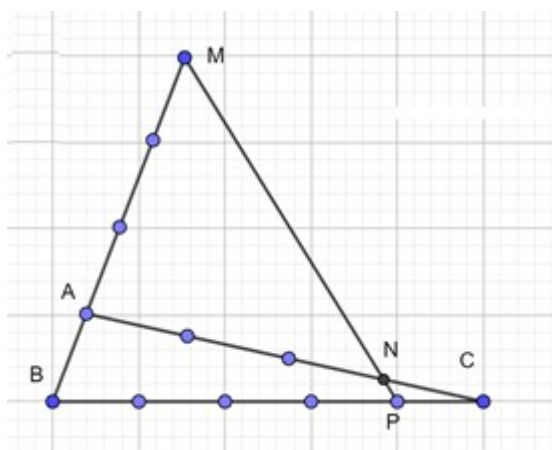
a) Chứng minh: $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{AN}$.

b) Chứng minh:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{15}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}.$$

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$



b)

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{15}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}.$$

Ta có

Câu 84: Cho tam giác ABC . Gọi H là điểm đối xứng với B qua G với G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$, với M là trung điểm của BC .

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

b) Ta có $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CH}) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

Câu 85: Cho tam giác ABC có trực tâm H , trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O .

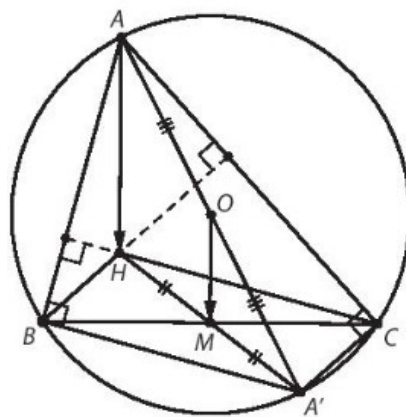
a) Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$.

c) Chứng minh rằng ba điểm G, H, O cùng thuộc một đường thẳng.

Lời giải

a) Do H là trực tâm của tam giác ABC , nên $BH \perp AC, CH \perp AB$ (1). Kẻ đường kính AA' của đường tròn ngoại tiếp (O) . Khi đó O là trung điểm của AA' .



Hơn nữa $\angle CAH = 90^\circ - \angle B$, do đó $AC \perp BH, AB \perp CH$. Từ đó và (1) suy ra $AC \parallel BH, AB \parallel CH$ và do đó tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành. Mà M là trung điểm của BC , suy ra M cũng là trung điểm của HA' .

Trong tam giác AHA' có O là trung điểm của AA' , M là trung điểm của $A'H$, suy ra OM là đường trung bình. Từ đó $AH \parallel OM$ và $AH = 2OM$. Suy ra $AH = 2OM$.

b) Do M là trung điểm của BC nên $OB + OC = 2OM = AH$.

Suy ra $OA + OB + OC = OA + AH = OH$. (1)

c) Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên ta có $OA + OB + OC = 3OG$. Từ đó và (1) suy ra $OH = 3OG$. Bởi vậy hai vector OH và OG cùng phương hay O, G, H cùng thuộc một đường thẳng.

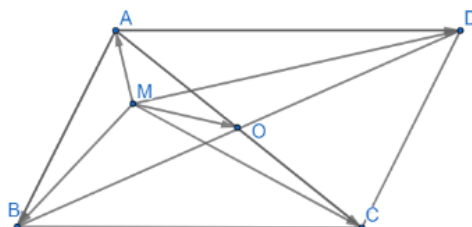


Câu 86: Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo. Với M là điểm tùy ý, chứng minh rằng:

a) $MA + MB + MC + MD = 4MO$

b) $AB + AC + AD = 2AC$

Lời giải



a) $MA + MB + MC + MD = 4MO$

$$\Leftrightarrow MO + OA + MO + OB + MO + OC + MO + OD = 4MO$$

$$\Leftrightarrow 4MO + (OA + OB) + (OC + OD) = 4MO$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{4MO} + \overrightarrow{0} + \overrightarrow{M} = \overrightarrow{4MO}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{4MO} = \overrightarrow{4MO}$$

(luôn đúng)

(vì O là giao điểm 2 đường chéo nên là trung điểm của AB, CD)

b) $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Suy ra

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC} \quad (\text{đpcm})$$

Câu 87: Lấy một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng:

a) I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

b) G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Lời giải

a) Với điểm M bất kì, ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$. Vì I là trung điểm của AB nên: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.

Do đó: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{0} = 2\overrightarrow{MI}$.

b) Với điểm M bất kì, ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}.$$

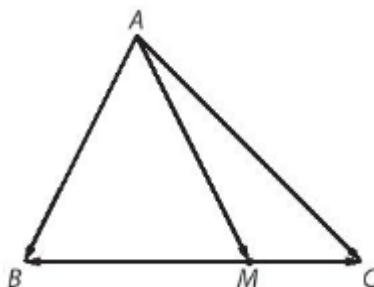
Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Do đó: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Câu 88: Cho tam giác ABC . Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 2MC$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$. b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}$.

Lời giải



a) Do M thuộc cạnh BC và $BM = 2MC$ nên hai vector $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ ngược hướng và $|\overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MC}|$. Suy ra $\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC}$ và do đó $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.

b) Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}; \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$.

Từ đó $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) + 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) = 3\overrightarrow{AM} + (\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 3\overrightarrow{AM}$.

Nhận xét

- Điểm M trong ví dụ này được gọi là điểm chia đoạn thẳng BC theo tỉ số -2 .
- Bằng lập luận tương tự ta chứng minh được điểm M chia đoạn AB theo tỉ số k (tức là $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$) khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB} = (1-k)\overrightarrow{OM}, \forall O$.

Câu 89: Cho tam giác ABC

a) Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O , ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OM}$

Lời giải

a) Ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

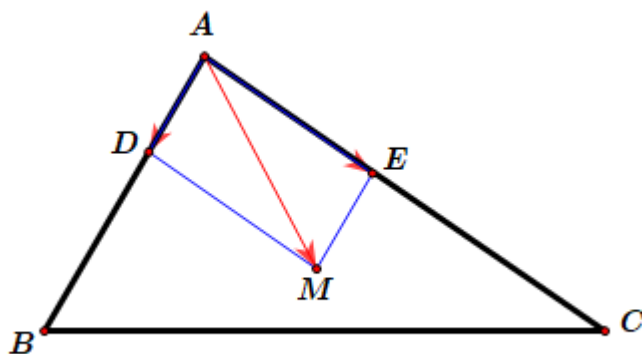
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Trên cạnh AB, AC lấy điểm D, E sao cho $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



Khi đó $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$ hay M là đỉnh thứ tư của hình bình hành AEMD.

Cách 2:

Ta có:

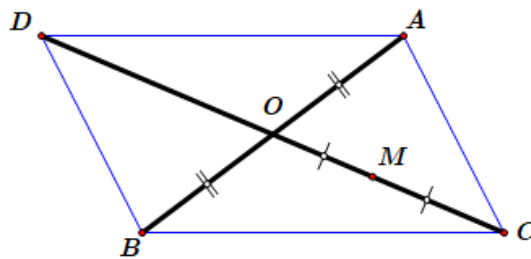
$$\begin{aligned}
\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} &= \vec{0} \\
\Rightarrow (\vec{MC} + \vec{CA}) + (\vec{MC} + \vec{CB}) + 2\vec{MC} &= \vec{0} \\
\Rightarrow 4\vec{MC} + \vec{CA} + \vec{CB} &= \vec{0} \\
\Rightarrow 4\vec{CM} &= \vec{CA} + \vec{CB}
\end{aligned}$$

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBD$.

Khi đó $\vec{CD} = \vec{CA} + \vec{CB} \Rightarrow 4\vec{CM} = \vec{CD}$

$$\Rightarrow \vec{CM} = \frac{1}{4}\vec{CD} \Rightarrow \vec{CM} = \frac{1}{2}\vec{CO}$$

Với O là tâm hình bình hành $ACBD$, cũng là trung điểm đoạn AB .



Vậy M là trung điểm của trung tuyến kẻ từ C của tam giác ABC .

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O , ta có $\vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OC} = 4\vec{OM}$

$$\begin{cases}
\vec{OA} = \vec{OM} + \vec{MA} \\
\vec{OB} = \vec{OM} + \vec{MB} \\
\vec{OC} = \vec{OM} + \vec{MC}
\end{cases}$$

Với mọi điểm O , ta có:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OC} &= (\vec{OM} + \vec{MA}) + (\vec{OM} + \vec{MB}) \\
&+ 2(\vec{OM} + \vec{MC}) \\
&= 4\vec{OM} + (\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}) = 4\vec{OM} + \vec{0} = 4\vec{OM}
\end{aligned}$$

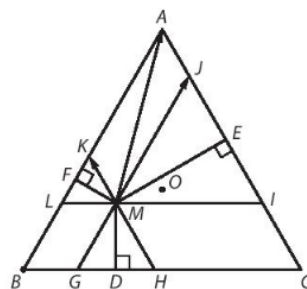
Vậy với mọi điểm O , ta có $\vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OC} = 4\vec{OM}$.

Câu 90: Cho tam giác ABC đều với trọng tâm O , M là một điểm tùy ý nằm trong tam giác. Gọi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CA, AB .

Chứng minh rằng $\vec{MD} + \vec{ME} + \vec{MF} = \frac{3}{2}\vec{MO}$.

Lời giải

Đường thẳng đi qua M và song song với BC cắt AB, AC tại L, I ; đường thẳng đi qua M song song với CA cắt BC, AB tại H, K ; đường thẳng đi qua M song song với AB cắt CA, BC tại J, G .



Do tam giác ABC đều và $MG \parallel AB, MH \parallel AC$ nên tam giác MGH cũng là một tam giác đều. Từ đó, do $MD \perp GH$ nên D là trung điểm của GH .

Suy ra $\overline{2MD} = \overline{MG} + \overline{MH}$. (1)

Tương tự cũng có $\overline{2ME} = \overline{MI} + \overline{MJ}; \overline{2MF} = \overline{MK} + \overline{ML}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $\overline{2(MD + ME + MF)} = \overline{MG} + \overline{MH} + \overline{MI} + \overline{MJ} + \overline{MK} + \overline{ML}$. (3)

Do $\overline{MK} \parallel \overline{AC}, \overline{MJ} \parallel \overline{AB}$ nên tứ giác $AKMJ$ là hình bình hành. Suy ra

$\overline{MK} + \overline{MJ} = \overline{MA}$. (4)

Tương tự, cũng có $\overline{MG} + \overline{ML} = \overline{MB}, \overline{MH} + \overline{MI} = \overline{MC}$. (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra $\overline{2(MD + ME + MF)} = \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{3MO}$ (do O là trọng tâm của tam giác đều ABC). Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Em tính để ngày mai mới làm bài tập của thầy ư

Em thử xem thứ 2, 3, 4, 5, 6, 7, chủ nhật. Làm gì có “thứ mai”

Hãy làm ngay!

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>