

ĐỀ SỐ 3: ĐỀ LUYỆN THI HSG CẤP HUYỆN LỚP 8

NĂM HỌC: 2023-2024 (Thời gian làm bài 120 phút)

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Chọn một phương án đúng

Câu 1. Sau khi rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3}$ với x khác -1 và 1 là:

- A. $P=(1+x^2)(1+x)$ B. $P=(1-x^2)(1-x)$ C. $P=(1+x^2)(1-x^2)$ D. $P=(1+x^2)(1-x)$

Câu 2. Cho $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=14$. Giá trị của biểu thức $B=a^4+b^4+c^4$ là:

- A. 98 B. 99 C. 100 D. 101

Câu 3. Giá trị của biểu thức $A = \frac{2a-b}{3a-b} + \frac{5b-a}{3a+b}$. Biết $10a^2-3b^2+5ab=0$ và $9a^2-b^2 \neq 0$ là:

- A. 0 B. 3 C. -3 D. 1

Câu 4: Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đường thẳng $y=2x-2$ với hai trục Ox; Oy. Khi đó diện tích của tam giác OAB là: (đơn vị trên các trục tọa độ là centimet).

- A. 1cm^2 B. -1cm^2 C. 2cm^2 D. -2cm^2

Câu 5: Đồ thị của hàm $y=ax+2024$ và hàm số $y=bx-2023$ là hai đường thẳng song song, khi đó các hệ số a và hệ số b phải thỏa mãn điều kiện gì?

- A. $a=b$ B. $a \neq b$ C. $a=0$ D. $b=0$

Câu 6. Tỷ lệ học sinh nam của lớp 8A là 60%, tổng số bạn lớp 8A là 40. Ngẫu nhiên gặp 1 thành viên nam, xác suất thực nghiệm của biến cố “Gặp một học sinh nam của lớp” là:

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{5}$

Câu 7. Các giá trị của a và b để $f(x)=x^3+ax^2+bx-60$ chia hết cho $g(x)=x^2+9x+20$ là:

- A. $a=-6$; $b=-7$ B. $a=-6$; $b=7$ C. $a=6$; $b=7$ D. $a=6$; $b=-7$

Câu 8. Đa thức dư của phép chia: $x^7+x^5+x^3+1$ cho x^2-1 là:

- A. $3x+1$ B. $3x-1$ C. $-3x+1$ D. 4

Câu 9. Hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có BD là phân giác góc $\angle D$. $BD \perp BC$, biết $AB=4\text{cm}$. Chu vi hình thang là:

- A. 20cm B. 15cm C. 25cm D. Một kết quả khác

Câu 10. Tứ giác ABCD có $\angle C=80^\circ$; $\angle D=70^\circ$; Các tia phân giác của A và B cắt nhau tại I. Số đo của $\angle AIB$ là:

- A. 45° B. 65° C. 75° D. 85°

Câu 11. Tính diện tích hình thang ABCD có đường cao bằng 12cm, hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau và $BD=15\text{cm}$ là:

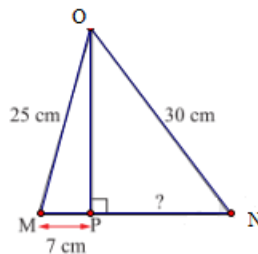
- A. 150cm^2 B. 200cm^2
C. 170cm^2 D. 225cm^2

Câu 12. Lớp 8A có 40 học sinh, trong đó có 22 nam và 18 nữ. Gặp ngẫu nhiên một học sinh của lớp, xác suất thực nghiệm của biến cố “Học sinh đó nữ” là:

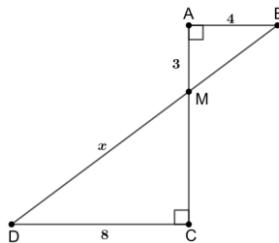
- A. 0,45 B. 0,46 C. 0,47 D. 0,48

Câu 13: Cho hình vẽ bên. Độ dài PN bằng:

- A. 18cm
B. 15cm
C. 20cm
D. 25cm



Câu 14: Cho hình vẽ:



Độ dài x là:

- A. 10 B. 6 C. 2,5 D. 6,4

Câu 15: Tứ giác $ABCD$ có $A = 100^\circ$, góc ngoài tại đỉnh B bằng 110° , $C = 75^\circ$. Số đo góc D bằng:

- A. 115° ; B. 110° ; C. 120° ; D. 75°

Câu 16. Ba bạn Toán, Tuổi và Thơ có một số vở. Nếu lấy 40% số vở của Toán chia đều cho Tuổi và Thơ thì số vở của ba bạn bằng nhau. Nhưng nếu Toán bớt đi 5 quyển thì số vở của Toán bằng tổng số vở của Tuổi và Thơ. Số vở của Toán là:

- A. 15 B. 20 C. 25 D. 30

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1 (3,5 điểm): a. Tìm số nguyên dương x để $3^x - 32$ là các số chính phương.

b. Chứng minh: $5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8 \cdot 2^{n+1} \vdots 59$

Câu 2 (3,0 điểm): a) Tìm đa thức $f(x)$, biết rằng $f(x)$ chia cho $x-3$ dư 27, chia cho $x-5$ dư 39 và chia cho $x^2 - 8x + 15$ được thương là $5x$ và còn dư.

b. Giải các phương trình sau: $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680$

Câu 3 (4,5 điểm): Cho đoạn thẳng AB và điểm M thuộc đoạn thẳng đó. Vẽ về một phía của AB các hình vuông $AMCD$ và $BMEF$

a. Chứng minh $AE \perp BC$

b. Gọi H là giao điểm của AE và BC . Chứng minh ba điểm D, H, F thẳng hàng

c. Chứng minh đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên đoạn thẳng cố định AB .

Câu 4 (1,0 điểm): Cho $x + y = 1$. Tìm GTNN của biểu thức $M = x^3 + y^3$.

Hết

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Mỗi câu đúng 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	D	A	C	A	A	A	D	A	A	C
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	A	A	A	A	A	C				

HƯỚNG DẪN

Câu 1: Cho biểu thức $P = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3}$ với x khác -1 và 1 .

Rút gọn biểu thức A. Với x khác -1 và 1 thì :

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1-x^3-x+x^2}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-x+x^2)-x(1+x)} \\
 &= \frac{(1-x)(1+x+x^2-x)}{1-x} : \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)(1-2x+x^2)} \\
 &= (1+x^2) : \frac{1}{(1-x)} \\
 &= (1+x^2)(1-x)
 \end{aligned}$$

Câu 2: Cho $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=14$. Tính giá trị của biểu thức

$$B = a^4 + b^4 + c^4.$$

Giải: Từ $a^2+b^2+c^2=14 \Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2=196$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 = 196$$

$$\Rightarrow B = a^4 + b^4 + c^4 = 196 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$$

$$\text{Từ } a+b+c=0 \Rightarrow (a+b+c)^2=0$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=0$$

$$\Rightarrow ab+bc+ac = \frac{-(a^2+b^2+c^2)}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

$$\Rightarrow (ab+bc+ac)^2 = 49$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2ab^2c + 2a^2bc + 2abc^2 = 49$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = 49 - 2abc(a+b+c) = 49$$

$$\text{Vậy } B = 196 - 2 \cdot 49 = 196 - 98 = 98$$

Câu 3. Giá trị của biểu thức $A = \frac{2a-b}{3a-b} + \frac{5b-a}{3a+b}$. Biết $10a^2-3b^2+5ab=0$ và $9a^2-b^2 \neq 0$

$$A = \frac{(2a-b)(3a+b) + (5b-a)(3a-b)}{9a^2-b^2} = \frac{3a^2+15ab-6b^2}{9a^2-b^2}$$

$$= \frac{3a^2 + 3(3b^2 - 10a^2) - 6b^2}{9a^2 - b^2} = \frac{-3(9a^2 - b^2)}{9a^2 - b^2} = -3$$

Câu 4. Tập nghiệm của bất phương trình sau :

$$\frac{x-1}{4} - 1 \geq \frac{x+1}{3} + 8$$

Giải

$$\frac{x-1}{4} - 1 \geq \frac{x+1}{3} + 8 \Leftrightarrow \frac{3x-3-12}{12} \geq \frac{4x+4+96}{12}$$

$$\Leftrightarrow 3x - 4x \geq 100 + 15 \Leftrightarrow -x \geq 115 \Leftrightarrow x \leq -115$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là ; $S = \{x / x \leq -115\}$

Câu 5. Bài 1: Giải phương trình $|2x - 2005| = |2005x - 2|$ (1)

Giải:

Theo cách biến đổi trên ta có

$$|2x - 2005| = |2005x - 2| \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2005 = 2005x - 2 \\ 2x - 2005 = 2 - 2005x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2003x = -2003 \\ 2007x = 2007 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -1$.

Câu 6: Cho đa thức $g(x) = 8x^3 - 18x^2 + x + 6$.

a) Tìm các nghiệm của đa thức $g(x)$.

Giải

đa thức $g(x) = 8x^3 - 18x^2 + x + 6$. Có nghiệm $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = 2$; $x_3 = \frac{3}{4}$

Câu 7. Các giá trị của a và b để $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 60$ chia hết cho $g(x) = x^2 + 9x + 20$ là:

Giải

$$g(x) = (x + 4)(x + 5)$$

$$f(x) \cdot g(x) \Leftrightarrow f(x) \cdot (x + 4)(x + 5)$$

$$\Leftrightarrow f(-4) = 0 \Leftrightarrow 4a - b = 31 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow f(-5) = 0 \Leftrightarrow 5a - b = 37 \quad (2)$$

Giải hệ pt tìm a và b : $a=6$; $b=-7$

Câu 8. Đa thức dư của phép chia: $x^7 + x^5 + x^3 + 1$ cho $x^2 - 1$ là:

Giải:

Tách đa thức bị chia thành những đa thức chia hết cho đa thức chia.

Ta thấy $x^n - 1$ chia hết cho $x - 1$ với mọi số tự nhiên n nên $x^{2n} - 1$ chia hết cho $x^2 - 1$; $x^6 - 1$, ... chia hết cho $x^2 - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x^7 + x^5 + x^3 + 1 &= x^7 - x + x^5 - x + x^3 - x + 3x + 1 \\ &= x(x^6 - 1) + x(x^4 - 1) + x(x^2 - 1) + 3x + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Dư của phép chia: } x^7 + x^5 + x^3 + 1 \text{ chia cho } x^2 - 1 \text{ là } 3x + 1$$

Câu 9. Hình thang cân ABCD (AB//CD) có BD là phân giác góc $\angle D$. $BD \perp BC$, biết AB=4cm. Chu vi hình thang là : 20cm (Bồi dưỡng HSG toán Hình học 8 Trang 118)

Câu 10. Tứ giác ABCD có $\angle C=80^\circ$; $\angle D=70^\circ$; Các tia phân giác của A và B cắt nhau tại I. Số đo của $\angle AIB$ là : 75° (Bồi dưỡng HSG toán Hình học 8 Trang 124)

Câu 11 Tính diện tích hình thang ABCD có đường cao bằng 12cm, hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau và BD=15cm là: 150cm^2 (Bồi dưỡng HSG toán Hình học 8 Trang 132)

Câu 12. Cho ABC vuông tại A, Vẽ ra phía ngoài tam giác đó các tam giác ABD vuông cân ở B, ACF vuông cân ở C. Gọi H là giao điểm của AB và CD, K là giao điểm của AC và BF. Chứng minh rằng:

- a) $AH = AK$
b) $AH^2 = BH \cdot CK$

Giải

Đặt $AB = c$, $AC = b$.

$BD \parallel AC$ (cùng vuông góc với AB)

$$\text{nên } \frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BD} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{AH}{HB + AH} = \frac{b}{b + c}$$

$$\text{Hay } \frac{AH}{AB} = \frac{b}{b + c} \Rightarrow \frac{AH}{c} = \frac{b}{b + c} \Rightarrow AH = \frac{b \cdot c}{b + c} \quad (1)$$

$$AB \parallel CF \text{ (cùng vuông góc với AC) nên } \frac{AK}{KC} = \frac{AB}{CF} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{AK}{KC + AK} = \frac{c}{b + c}$$

$$\text{Hay } \frac{AK}{AC} = \frac{b}{b + c} \Rightarrow \frac{AK}{b} = \frac{c}{b + c} \Rightarrow AK = \frac{b \cdot c}{b + c} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $AH = AK$

$$\text{b) Từ } \frac{AH}{HB} = \frac{AC}{BD} = \frac{b}{c} \text{ và } \frac{AK}{KC} = \frac{AB}{CF} = \frac{c}{b} \text{ suy ra } \frac{AH}{HB} = \frac{KC}{AK} \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{KC}{AH} \text{ (Vì } AH = AK)$$

$$\Rightarrow AH^2 = BH \cdot KC$$

Câu 13. Cho hình thang ABCD có đáy nhỏ CD. Từ D vẽ đường thẳng song song với BC, cắt AC tại M và AB tại K, Từ C vẽ đường thẳng song song với AD, cắt AB tại F, qua F ta lại vẽ đường thẳng song song với AC, cắt BC tại P. Chứng minh rằng

- a) $MP \parallel AB$
b) Ba đường thẳng MP, CF, DB đồng quy

Giải

$$\text{a) } EP \parallel AC \Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{AF}{FB} \quad (1)$$

$$AK \parallel CD \Rightarrow \frac{CM}{AM} = \frac{DC}{AK} \quad (2)$$

các tứ giác AFCD, DCBK là các hình bình hành nên
 $AF = DC$, $FB = AK$ (3)

$$\text{Kết hợp (1), (2) và (3) ta có } \frac{CP}{PB} = \frac{CM}{AM} \Rightarrow MP \parallel AB \text{ (Định lý}$$

lét đảo) (4)

$$\text{b) Gọi I là giao điểm của BD và CF, ta có: } \frac{CP}{PB} = \frac{CM}{AM} =$$

$$\frac{DC}{AK} = \frac{DC}{FB}$$

$$\text{Mà } \frac{DC}{FB} = \frac{DI}{IB} \text{ (Do } FB \parallel DC) \Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{DI}{IB} \Rightarrow IP \parallel DC \parallel AB \quad (5)$$

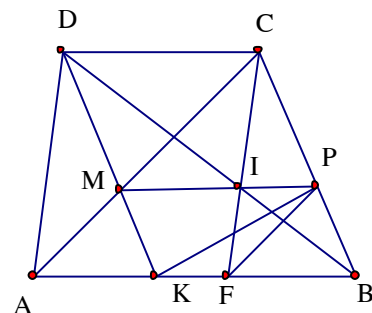
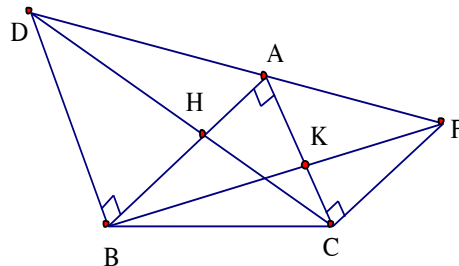
Từ (4) và (5) suy ra : qua P có hai đường thẳng IP, PM cùng song song với $AB \parallel DC$ nên theo tiên đề Ôclít thì ba điểm P, I, M thẳng hàng hay MP đi qua giao điểm của CF và DB hay ba đường thẳng MP, CF, DB đồng quy

Câu 14. Cho hình bình hành ABCD có E, F thứ tự là trung điểm của AB, CD.

Gọi giao điểm của AC với DE và BF theo thứ tự là M và N. Chứng minh rằng EMFN là hình bình hành.

a/ Hình vẽ:

- Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành ABCD, ta có O là trung điểm của BD.
- Chứng minh BEDF là hình bình hành
- Có O là trung điểm của BD nên O cũng là trung điểm của EF



- Vậy EF, BD, AC đồng quy tại O.

b/ Xét $\triangle ABD$ có M là trọng tâm, nên $OM = \frac{1}{3}OA$

- Xét $\triangle BCD$ có N là trọng tâm, nên $ON = \frac{1}{3}OC$

- Mà $OA = OC$ nên $OM = ON$

- Tứ giác EMFN có $OM = ON$ và $OE = OF$ nên là hình bình hành.

Câu 15. Cho hình thang vuông ABCD có $A = D = 90^\circ$; $AB = AD = \frac{CD}{2}$. Qua điểm E thuộc cạnh AB, kẻ đường vuông góc với DE, cắt BC tại F.

a/ Chứng minh: Tam giác BCD vuông cân

b/ Chứng minh: $ED = EF$

-Hình vẽ:

a/ Chứng minh: $\triangle BCD$ vuông cân

Kẻ $BH \perp DC \Rightarrow ABHD$ là hình vuông

$$\Rightarrow AB = DH = BH = AD = \frac{DC}{2}$$

$$\Rightarrow DH = HC = BH = \frac{DC}{2}$$

$\Rightarrow \triangle BCD$ vuông cân tại B

b/ Từ a/ $\Rightarrow C = 45^\circ \Rightarrow \angle ABC = 135^\circ$

Gọi M là trung điểm của DF

Xét $\triangle EDF$ ($E = 90^\circ$) có EM là trung tuyến $\Rightarrow EM = MF = \frac{DF}{2}$

$\Rightarrow \triangle MBE$ cân tại M $\Rightarrow \angle MEB = \angle MBE$

Xét $\triangle BDF$ ($B = 90^\circ$) có BM là trung tuyến $\Rightarrow BM = MF = \frac{DF}{2}$

$\Rightarrow \triangle MBF$ cân tại M $\Rightarrow \angle MFB = \angle MBF$

Xét tứ giác MEBF có :

$$\angle MEB + \angle MFB = \angle MBE + \angle MBF = \angle ABC = 135^\circ$$

$$\Rightarrow \angle EMF = 360^\circ - 2.135^\circ = 90^\circ$$

Vậy trong $\triangle EDF$ có EM là đường cao cũng là trung tuyến, nên $\triangle EDF$ cân tại E hay $ED = EF$

Câu 16: Ba bạn Toán, Tuổi và Thơ có một số vở. Nếu lấy 40% số vở của Toán chia đều cho Tuổi và Thơ thì số vở của ba bạn bằng nhau. Nhưng nếu Toán bớt đi 5 quyển thì số vở của Toán bằng tổng số vở của Tuổi và Thơ. Hỏi mỗi bạn có bao nhiêu quyển vở?

Bài giải:

Đổi $40\% = \frac{2}{5}$.

Nếu lấy $\frac{2}{5}$ số vở của Toán chia đều cho Tuổi và Thơ thì mỗi bạn Tuổi hay Thơ đều được thêm $\frac{2}{5}$: $2 = \frac{1}{5}$ (số vở của Toán)

Số vở còn lại của Toán sau khi cho là:

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \text{ (số vở của Toán)}$$

Do đó lúc đầu Tuổi hay Thơ có số vở là:

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \text{ (số vở của Toán)}$$

Tổng số vở của Tuổi và Thơ lúc đầu là:

$$\frac{2}{5} \times 2 = \frac{4}{5} \text{ (số vở của Toán)}$$

Mặt khác theo đề bài nếu Toán bớt đi 5 quyển thì số vở của Toán bằng tổng số vở của Tuổi và Thơ, do đó

5 quyển ứng với: $1 - 4/5 = 1/5$ (số vở của Toán)
 Số vở của Toán là: $5: 1/5 = 25$ (quyển)
 Số vở của Tuổi hay Thơ là: $25 \times 2/5 = 10$ (quyển)

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1 (3,0 điểm): Tìm số nguyên dương x để $3^x - 32$ là các số chính phương.

Giải:

Giả sử tồn tại số nguyên dương x và y sao cho $3^x - 32 = y^2$ (1).

Suy ra y là số chính phương lẻ nên $3^x - 32 = y^2$ chia 8 dư 1 (*).

Nếu x lẻ đặt $x = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ và $k > 1$

Ta có $3^x - 32 = 3^{2k+1} - 32 = 3 \cdot 9^k - 32$ chia cho 8 dư 3 mâu thuẫn với (*)

Nếu x chẵn đặt $x = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ và $k > 1$

(1) $\Leftrightarrow 3^{2k} - y^2 = 32 \Leftrightarrow (3^k - y)(3^k + y) = 32$ mà $(3^k + y) - (3^k - y) = 2y > 0$ chẵn

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 3^x + y = 16 \\ 3^x - y = 2 \\ 3^x + y = 8 \\ 3^x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases}$$

Vậy $x = 4$.

b.CMR: $a. 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8 \cdot 2^{n+1} : 59$

Giải

$$\begin{aligned} 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8 \cdot 2^{n+1} &= 5^n(25 + 26) + 8 \cdot 2^{n+1} \\ &= 5^n(59 - 8) + 8 \cdot 64^n \\ &= 5^n \cdot 59 + 8 \cdot 59m : 59 \end{aligned}$$

Câu 2 (3,0 điểm): a) Tìm đa thức $f(x)$, biết rằng $f(x)$ chia cho $x - 3$ dư 27, chia cho $x - 5$ dư 39 và chia cho $x^2 - 8x + 15$ được thương là $5x$ và còn dư

b. Giải các phương trình sau

$$(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7) = 1680$$

a) Tìm đa thức $f(x)$, biết rằng $f(x)$ chia cho $x - 3$ dư 27, chia cho $x - 5$ dư 39 và chia cho $x^2 - 8x + 15$ được thương là $5x$ và còn dư

Vì $f(x)$ chia $x^2 - 8x + 15$ được thương $5x$ và còn dư nên $f(x) = (x^2 - 8x + 15) \cdot 5x + ax + b$.

$$f(x) = (x - 3) \cdot (x - 5) \cdot 5x + ax + b.$$

+) Vì $f(x)$ chia $x - 3$ dư 27 $\Rightarrow 3a + b = 27$. (1)

+) Vì $g(x)$ chia $x - 5$ dư 39 $\Rightarrow 5a + b = 39$. (2)

$$\text{Vì } \begin{cases} 3a + b = 27 \\ 5a + b = 39 \end{cases} \Rightarrow \text{Thay } a = 6 \text{ vào (1) ta được } : 3 \cdot 6 + b = 27 \Rightarrow b = 9.$$

Vậy $f(x) = (x^2 - 8x + 15).5x + 6x + 9$

$f(x) = 5x^3 - 40x^2 + 81x + 9$. (1,5 điểm)

b. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680 \Leftrightarrow (x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30) = 1680$

Đặt $x^2 - 11x + 29 = y$, ta có:

$(x^2 - 11x + 28)(x^2 - 11x + 30) = 1680 \Leftrightarrow (y+1)(y-1) = 1680 \Leftrightarrow y^2 = 1681 \Leftrightarrow y = \pm 41$

* $y = 41 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 29 = 41 \Leftrightarrow x^2 - 11x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x) + (12x - 12) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+12) = 0 \dots$

* $y = -41 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 29 = -41 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 70 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x \cdot \frac{11}{2} + \frac{121}{4}) + \frac{159}{4} = 0$ (Vô nghiệm)

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{1; -12\}$ (1,5 điểm)

Câu 3 (4,0 điểm):

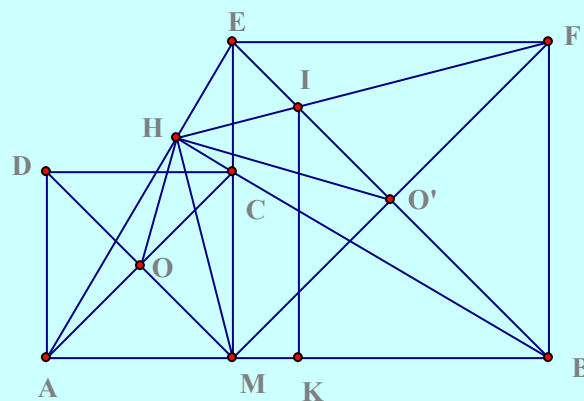
Cho đoạn thẳng AB và điểm M thuộc đoạn thẳng đó. Vẽ về một phía của AB các hình vuông $AMCD$ và $BMEF$

a. Chứng minh $AE \perp BC$

b. Gọi H là giao điểm của AE và BC .

Chứng minh ba điểm D, H, F thẳng hàng

c. Chứng minh đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên đoạn thẳng cố định AB .



Lời giải

a. Có $MD \parallel BE$ (hai góc đồng vị bằng nhau)

mà $MD \perp AC \Rightarrow AC \perp BE$.

Lại có $EC \perp AB \Rightarrow C$ là trực tâm tam giác $ABE \Rightarrow AE \perp BC$

b. Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai hình vuông $AMCD$ và $BMEF$

Tam giác vuông AHC có OH là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AC

$$\Rightarrow OH = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} DM$$

$$\Rightarrow \triangle DMH (H = 90^\circ) \Rightarrow DH \perp MH (1)$$

Chứng minh tương tự, ta được $HF \perp MH (2) \Rightarrow D, H, F$ thẳng hàng.

c. Gọi I là giao điểm của AC và DF

Chứng minh được OI là đường trung bình của tam giác DMF , hay I là trung điểm DF

Kẻ IK vuông góc AB (K thuộc AB) $\Rightarrow K$ là trung điểm của AB , vậy K cố định

Mặt khác $IK = \frac{1}{2}(AD + BF) = \frac{1}{2}AB$ (không đổi) $\Rightarrow I$ cố định.

Vậy DE luôn đi qua I cố định.

Câu 4 (1,0 điểm): Cho $x + y = 1$. Tìm GTNN của biểu thức $M = x^3 + y^3$.

Giải:

$$\begin{aligned} M &= x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^2 - xy + y^2 \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &\Rightarrow M \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

$$\text{Ngoài ra: } x + y = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 1 \Rightarrow 2(x^2 + y^2) - (x - y)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 2(x^2 + y^2) \geq 1$$

$$\text{Do đó } x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2} \text{ và } x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có: } M \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \text{ và } (x^2 + y^2) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow M \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Do đó } M \geq \frac{1}{4} \text{ và dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy GTNN của } M = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$$

Hết