



Chương

Bài 3.

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A

Lý thuyết

1. Công thức cộng



$$(1) \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$(2) \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$(3) \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$(4) \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$(5) \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$(6) \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

2. Công thức nhân đôi

Cho $a = b$ trong các công thức cộng, ta được:



Công thức nhân đôi:

$$(1) \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$(2) \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$(3) \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Công thức hạ bậc:

$$(4) \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$(5) \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$(6) \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

3. Công thức biến đổi tích thành tổng



$$(1) \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$(2) \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$(3) \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$$



4. Công thức biến đổi tổng thành tích

Từ công thức biến đổi tích thành tổng, đặt $u = a - b$, $v = a + b$ ta có



$$(1) \quad \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$(2) \quad \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$(3) \quad \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$(4) \quad \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$



Các dạng bài tập

Dạng 1. Công thức cộng



Phương

$$(1) \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$(2) \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$(3) \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$(4) \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$(5) \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$(6) \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$



Ví dụ 1.1.

Rút gọn các biểu thức:

$$(1) A = \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \cos\left(\frac{p}{4} + a\right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \sin\left(\frac{p}{4} + a\right)}$$

$$(2) B = (\tan a - \tan b) \cot(a-b) - \tan a \tan b$$

Lời giải

$$(1) A = \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \cos\left(\frac{p}{4} + a\right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \sin\left(\frac{p}{4} + a\right)}$$

$$A = \frac{\sqrt{2} \cos a - 2 \left(\cos \frac{p}{4} \cos a - \sin \frac{p}{4} \sin a \right)}{-\sqrt{2} \sin a + 2 \left(\sin \frac{p}{4} \cos a + \cos \frac{p}{4} \sin a \right)} = \frac{\sqrt{2} \sin a}{\sqrt{2} \cos a} = \tan a$$

Ta có

$$(2) B = (\tan a - \tan b) \cot(a-b) - \tan a \tan b$$

$$\text{Ta có } B = \tan(a-b)(1 + \tan a \tan b) \cot(a-b) - \tan a \tan b = 1$$



Ví dụ 1.2.

Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$(1) A = \cos\left(x + \frac{p}{3}\right) \text{ biết } \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ và } 0 < x < \frac{p}{2}$$

$$(2) B = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b) \text{ biết } \cos a = \frac{1}{3} \text{ và } \cos b = \frac{1}{4}$$

Lời giải

$$(1) A = \cos\left(x + \frac{p}{3}\right) \text{ biết } A = \cos\left(x + \frac{p}{3}\right) \text{ và } \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Ta có

Mà $0 < x < \frac{\rho}{2}$ nên $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$

Do đó: $A = \cos\left(x + \frac{\rho}{3}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{\rho}{3} - \sin x \cdot \sin \frac{\rho}{3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} - 3}{6}.$

(2) $B = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$ biết $\cos a = \frac{1}{3}$ và $\cos b = \frac{1}{4}$

Ta có:

$$B = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) \cdot (\cos a \cos b + \sin a \sin b)$$

$$= \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b$$

$$= \cos^2 a \cos^2 b - (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{16} - \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) = -\frac{119}{144}.$$



Ví dụ 1.3.

Với

(1) $a - b = \frac{\rho}{4}$, chứng minh rằng $\frac{1 + \tan b}{1 + \tan a} = \tan a$

(2) $a + b = \frac{\rho}{4}$, chứng minh rằng $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = 2$

Lời giải

(1) $a - b = \frac{\rho}{4}$, chứng minh rằng $\frac{1 + \tan b}{1 + \tan a} = \tan a$

Ta có: $a - b = \frac{\rho}{4} \Leftrightarrow a = \frac{\rho}{4} + b$

$$\tan a = \tan\left(\frac{\rho}{4} + b\right) = \frac{\tan \frac{\rho}{4} + \tan b}{1 - \tan \frac{\rho}{4} \tan b} = \frac{1 + \tan b}{1 - \tan b}$$

Do đó:

(2) $a + b = \frac{\rho}{4}$, chứng minh rằng $(1 + \tan a)(1 + \tan b) = 2$

Ta có: $(1 + \tan a)(1 + \tan b)$

$$= (1 + \tan a) \left(1 + \tan\left(\frac{\rho}{4} - a\right)\right) = (1 + \tan a) \left(1 + \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a}\right) = (1 + \tan a) \cdot \frac{2}{1 + \tan a} = 2$$



▮ Dạng 2. Công thức nhân đôi



Phương

Công thức nhân đôi:

$$(1) \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$(2) \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$(3) \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

Công thức hạ bậc:

$$(4) \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$(5) \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$(6) \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$



Ví dụ 2.1.

Rút gọn các biểu thức sau

$$(1) A = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$

$$(2) B = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x$$

🔗 Lời giải

$$(1) A = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$

$$A = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$

$$\Rightarrow A \cos 10^\circ = \sin 10^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{4} \sin 40^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{8} \sin 80^\circ = \frac{1}{8} \cos 10^\circ$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{8}.$$

$$(2) B = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x$$

$$B = \cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \cos x \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$$



Ví dụ 2.2.

Tính các giá trị lượng giác của các góc $2a$ biết

$$(1) \cos a = \frac{5}{13}, 0 < a < \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \sin a = \frac{1}{4}, 0 < a < \frac{\pi}{2}$$

🔗 Lời giải

$$(1) \cos a = \frac{5}{13}, 0 < a < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ta có } \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{13^2}} = \frac{12}{13} \quad \text{do } 0 < a < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin a > 0$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{120}{169}.$$



$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 2\left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = -\frac{119}{72}.$$

$$\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{120}{169} : \left(-\frac{119}{169}\right) = -\frac{120}{119}.$$

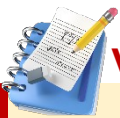
(2) $\sin a = \frac{1}{4}, 0 < a < \frac{\pi}{2}$

Ta có $\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ do $0 < a < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin a > 0$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8}.$$

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{9}{8}.$$

$$\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{8}}{\frac{9}{8}} = \frac{\sqrt{15}}{9}.$$



Ví dụ 2.3.

Cho $\sin a = \frac{3}{5}$, với $a \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị của $E = \sin 2a + \tan 2a$.

Lời giải

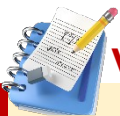
Ta có $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = 1 - \sin^2 a = \frac{16}{25}$.

Do $a \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ nên $\cos a < 0 \Rightarrow \cos a = -\frac{4}{5}$.

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{3}{-4} \Rightarrow \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{24}{7}.$$

Vậy $E = \sin 2a + \tan 2a = -\frac{24}{25} - \frac{24}{7} = -\frac{74}{25}$



Ví dụ 2.4.

Chứng minh biểu thức $P = \frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} \cdot \cot x$ không phụ thuộc giá trị của x .

Lời giải

$$P = \frac{2 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x + 2 \sin x \cos x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin x (\sin x + \cos x)}{2 \cos x (\sin x + \cos x)} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 1.$$

Vậy giá trị của biểu thức P không phụ thuộc vào giá trị của biến x .



▮ **Dạng 3. Công thức biến đổi tích thành tổng**



Phương

$$(1) \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$(2) \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$(3) \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$



Ví dụ 3.1.

Biến mỗi biểu thức sau thành dạng tổng

$$(1) A = \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$$

$$(2) B = \sin x \sin 2x \sin 3x$$

$$(3) C = 8 \cos x \sin 2x \sin 3x$$

$$(4) D = \cos x \cos(x - 60^\circ) \cos(x + 60^\circ)$$

Lời giải

$$(1) A = 2 \sin(a+b) \sin(a-b)$$

$$A = 2 \sin(a+b) \sin(a-b) = \cos 2b - \cos 2a$$

$$(2) B = \sin x \sin 2x \sin 3x$$

$$\begin{aligned} B &= \sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2} \sin 3x (\cos x - \cos 3x) = \frac{1}{2} \sin 3x \cos x - \frac{1}{2} \sin 3x \cos 3x \\ &= \frac{1}{4} (\sin 4x + \sin 2x) - \frac{1}{4} \sin 6x = \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 6x \end{aligned}$$

$$(3) C = 8 \cos x \sin 2x \sin 3x$$

$$\begin{aligned} C &= 8 \cos x \sin 2x \sin 3x = 4 \cos x (\cos x - \cos 5x) = 4 \cos^2 x - 4 \cos x \cos 5x \\ &= 4 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} - 2 \cos 6x - 2 \cos 4x = 2 + 2 \cos 2x - 2 \cos 6x - 2 \cos 4x \end{aligned}$$

$$(4) D = \cos x \cos(x - 60^\circ) \cos(x + 60^\circ)$$

$$\begin{aligned} D &= \cos x \cos(x - 60^\circ) \cos(x + 60^\circ) = \frac{1}{2} \cos x (\cos 2x + \cos 120^\circ) \\ &= \frac{1}{2} \cos x \cos 2x - \frac{1}{4} \cos x = \frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x - \frac{1}{4} \cos x = \frac{1}{4} \cos 3x \end{aligned}$$



Ví dụ 3.2.

Chứng minh rằng $4 \cos x \cos\left(\frac{p}{3} - x\right) \cos\left(\frac{p}{3} + x\right) = \cos 3x$, với $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có $4 \cos x \cos\left(\frac{p}{3} - x\right) \cos\left(\frac{p}{3} + x\right)$



$$\begin{aligned}
 &= 4 \cos x \cdot \frac{1}{2} \left[\cos(-2x) + \cos \frac{2p}{3} \right] \\
 &= 2 \cos x \cos 2x - \cos x = \cos 3x + \cos(-x) - \cos x = \cos 3x, \forall x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Vậy $4 \cos x \cos \left(\frac{p}{3} - x \right) \cos \left(\frac{p}{3} + x \right) = \cos 3x,$ với $x \in \mathbb{R}.$



Ví dụ 3.3.

Chúng minh $S = \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2p}{3} + x \right) + \cos^2 \left(\frac{2p}{3} - x \right)$ không phụ thuộc giá trị của

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}
 S &= \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2p}{3} + x \right) + \cos^2 \left(\frac{2p}{3} - x \right) \\
 &= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos \left(\frac{4p}{3} + 2x \right)}{2} + \frac{1 + \cos \left(\frac{4p}{3} - 2x \right)}{2} \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{4p}{3} + 2x \right) + \cos \left(\frac{4p}{3} - 2x \right) \right] \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \frac{4p}{3} \cos 2x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cos 2x = \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Vậy $S = \frac{3}{2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (không phụ thuộc vào biến số x).



▮ Dạng 4. Công thức biến đổi tổng thành tích



Phương

$$(1) \quad \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$(2) \quad \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$(3) \quad \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$(4) \quad \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$



Ví dụ 4.1.

Biến đổi mỗi biểu thức dưới đây thành một tích:

$$(1) \quad \sin x + \sin 2x + \sin 3x$$

$$(2) \quad \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$$

$$(3) \quad \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$$

$$(4) \quad \frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y}$$

🔑 Lời giải

$$(1) \quad \sin x + \sin 2x + \sin 3x$$

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x &= (\sin 3x + \sin x) + \sin 2x \\ &= 2 \sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x = \sin 2x (2 \cos x + 1) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$$

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x &= (\sin 7x + \sin x) + (\sin 5x + \sin 3x) \\ &= 2 \sin 4x \cdot \cos 3x + 2 \sin 4x \cos x = 2 \sin 4x (\cos 3x + \cos x) \\ &= 4 \sin 4x \cdot \cos 2x \cdot \cos x \end{aligned}$$

$$(3) \quad \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$$

$$\begin{aligned} \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x &= (\cos 3x + \cos x) + (\cos 4x + \cos 2x) \\ &= 2 \cos 2x \cdot \cos x + 2 \cos 3x \cdot \cos x = 2 \cos x (\cos 2x + \cos 3x) \\ &= 4 \cos x \cdot \cos \frac{5x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$(4) \quad \frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y}$$

$$\frac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y} = \frac{2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}}{-2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}} = -\cot \frac{x+y}{2} \cdot \cot \frac{x-y}{2}$$



Ví dụ 4.2.

Chứng minh

$$(1) \cos 5x \cos 3x + \sin 7x \sin x = \cos 2x \cos 4x$$

$$(2) \sin 5x - 2 \sin x (\cos 2x + \cos 4x) = \sin x$$

$$(3) \cos 5x \cos x + \sin 3x \sin x = \cos 2x \cos 4x$$

$$(4) 2(\sin a \cos 2a - \sin 2a \cos 3a) + \sin 5a = \sin 3a$$

👉 **Lời giải**

$$(1) \cos 5x \cos 3x + \sin 7x \sin x = \cos 2x \cos 4x$$

Ta có: $\cos 5x \cos 3x + \sin 7x \sin x$

$$= \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 8x) + \frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 8x) = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x) = \cos 4x \cos 2x$$

$$(2) \sin 5x - 2 \sin x (\cos 2x + \cos 4x) = \sin x$$

Ta có: $\sin 5x - 2 \sin x (\cos 2x + \cos 4x)$

$$= \sin 5x - 2 \sin x \cos 2x - 2 \sin x \cos 4x$$

$$= \sin 5x - [\sin(-x) + \sin 3x] - [\sin(-3x) + \sin 5x] = \sin x$$

$$(3) \cos 5x \cos x + \sin 3x \sin x = \cos 2x \cos 4x$$

Ta có: $\cos 5x \cos x + \sin 3x \sin x$

$$= \frac{1}{2}[\cos 4x + \cos 6x] + \frac{1}{2}[\cos 2x - \cos 4x] = \frac{1}{2}[\cos 6x + \cos 2x] = \cos 2x \cos 4x$$

$$(4) 2(\sin a \cos 2a - \sin 2a \cos 3a) + \sin 5a = \sin 3a$$

Ta có: $2(\sin a \cos 2a - \sin 2a \cos 3a) + \sin 5a$

$$= 2 \sin a \cos 2a - 2 \sin 2a \cos 3a + \sin 5a = \sin(-a) + \sin 3a - [\sin(-a) + \sin 5a] + \sin 5a = \sin 3a$$