**B. BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI VÀ CÁC KĨ THUẬT SỬ DỤNG**

**I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ:**

**Bất đẳng thức AM – GM là viết tắt của “arithmetic and geometric means”, nghĩa là trung bình cộng và trung bình nhân. Cách chứng minh hay nhất của nó là sử dụng phương pháp quy nạp kiểu Cô si (Cauchy) nên nhiều người lầm tưởng rằng Cô si phát hiện ra bất đẳng thức này, và hay gọi bất đẳng thức này là bất đẳng thức Cauchy (Cô si)**

**1. *Bất đẳng thức Cauchy tổng quát :*** Cho  số thực không âm  ta luôn có . Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi .

\* Thông thường trong chương trình THCS ta thường áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai hoặc ba số (tức là n = 2 hoặc n = 3). Cách chứng minh hai trường hợp cụ thể này rất đơn giản.

* + - * ***Một vài hệ quả quan trọng***:
        + 
        + 
        + Cho  số dương ():  ta có:



* + - * ***Bất* đẳng thức BCS**

Cho  số dương ():  ta có:



Dấu “=’ xảy ra 

* + - * ***Hệ quả(Bất đẳng thức Svác-xơ)***

Cho hai dãy số  ta luôn có:



Dấu “=’ xảy ra 

* 1. **Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất**

Cho  là một hàm  biến thực trên xác định trên D

* 
* 
  1. **Các bất đẳng thức phụ hay dùng**

**Với các số thực a, b, c, x, y, z dương ta có:**

**a.** 

b. 

c. 

d. 

e. 

f. 

g. 

h. 

**4. Ví dụ**

**Ví dụ 1.** Cho x, y, z dương thỏa mãn x + y + z = 3. Tìm giá trị lớn nhất của



\* Phân tích:

+ Dự đoán dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi x = y = z = 1.

+ Biểu thức cần tìm giá trị nhỏ nhất là căn bậc hai nên ta nghĩ đến bất đẳng thức AM – GM cho hai số.

+ Dựa vào giải thiết, kết hợp với dầu “=” xảy ra tại đó, ta có được : 

**\* Giải:**

**Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:**







Cộng các vế của ba bất đẳng thức trên, ta được



Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi x = y = z = 1.

**Ví dụ 2.** Chứng minh rằng với mọi *a*, *b*, *c* dương ta luôn có:



**Giải:** Ta có:

 (do )

Ta có: 

Tương tự với 2 số hạng còn lại, suy ra BĐT đã cho tương đương với:



Hoàn toàn chứng minh được BĐT cuối luôn đúng do áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số dương. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi .

**Ví dụ 3.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn a+ b + c = 3. Tìm giá trị

nhỏ nhất của 

\* Phân tích:

+ Luôn lưu ý rằng khi dùng bất đẳng thức AM – GM thì bậc sẽ có xu hướng giảm đi.

+ Do đó, để sử dụng được giả thiết, một suy nghĩ tự nhiên là bình phương hai vế của M lên trước khi dùng bất đẳng thức AM – GM

\* Giải:



Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:









Suy ra 

Vậy maxM = 3 khi và chỉ khi a = b =c =1

**Ví dụ 4.** Cho các số thực dương  thỏa mãn 

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

***(Đề thi HSG Tỉnh Thanh Hóa năm học 2014 - 2015)***

**Giải :** Từ: 

ta có: 

Lại có 

và 



Đặt  (với ).

Có 



mà 

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi t = 2 hay 

Vậy giá trị nhỏ nhất của *P* là  khi 

**Ví dụ 5.** Cho a, b, c là các số thục không âm thỏa mãn a + b + c = 3. Tìm giá trị lớn nhất của 

\* Phân tích:

- Dự đoán dầu “=” xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 1.

- Ta không áp dụng bất đẳng thức AM – GM trên tử được vì bậc của chúng “chênh” nhau.

- Do đó, ta nghĩ đến mẫu.

\* Giải



Vậy maxA =  khi và chỉ khi a = b = c = 1

***5.*** *Trong khuôn khổ chương trình cấp 2, để vận dụng bất đẳng thức Cô – si hay những bất đẳng thức khác chúng ta phải chứng minh bất đẳng thức tổng quát rồi mới áp dụng. Tuy nhiên, trong khuôn khổ bài viết này, tôi xin phép không chứng minh lại mà áp dụng luôn bất đẳng thức này và một số bất đẳng thức được nói trong bài viết này.*

**II. CÁC KĨ THUẬT KHI SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI VÀO CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM CỰC TRỊ ĐẠI SỐ**

***- Kỹ thuật tách ghép bộ số***

***- Kỹ thuật đổi biến số***

***- Phương pháp chọn điểm rơi***

***- Kỹ thuật nhân thêm hệ số***

***- Kỹ thuật hạ bậc***

***- Kỹ thuật cộng thêm***

***- Kỹ thuật Cosi ngược dấu***

**1. Kỹ thuật tách ghép bộ số**

**Đây là một kỹ thuật cơ bản nhất trong số các kỹ thuật sử dụng bất đẳng thức cô si. Kỹ thuật này được giới thiệu cho học sinh trung bình trở lên.**

* 1. **. Kỹ thuật tách ghép cơ bản:**

**Ví dụ 1.** Cho 3 số thực dương *a, b, c.*  Chứng minh rằng: 

**Giải:** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

 (đpcm)

**Ví dụ 2.** Cho 4 số thực dương *a, b, c, d.*  Chứng minh rằng:



**Giải:** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:



 (đpcm)

**Ví dụ 3.** Cho 3 số thực dương *a, b, c* thỏa  *.* Chứng minh rằng:



**Giải:** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:



 (đpcm)

**Ví dụ 4.** Cho 2 số thực dương *a, b.*  Chứng minh rằng: 

**Giải:**Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

(đpcm)

**Ví dụ 5.** Cho 2 số thực dương *a, b.*  Chứng minh rằng: 

**Giải:** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:



(đpcm)

**1.2. Kỹ thuật tách nghịch đảo**

**Ví dụ 1**. Chứng minh rằng với mọi x > 1, ta có  .Dấu đẳng thức (dấu bằng) xảy ra khi nào ?

**Gợi ý:** Trong bài toán này có chứa hai số hạng dạng nghịch đảo. Vì đã có số hạng   nên phần còn lại phải biểu diễn thành thừa số của x - 1. Vậy ta phải viết lại vế trái như sau:  (\*)  
Vì x > 1nên x – 1 > 0.  
Áp dụng bất đẳng thức Côsi (2) cho 2 số dương 4(x-1) và , ta có:

  
Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi (vì x > 1)

**Ví dụ 2.** Cho a, b, c dương và a2 + b2 + c2 = 3.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Gợi ý**

Ta có: (1)

(2), (3)

Lấy (1) + (2) + (3) ta được: (4)

Vì a2 + b2 + c2 =3

Từ (4) vậy giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi a = b = c = 1.

**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng: 

**Giải:** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

 (đpcm)

**Ví dụ 4.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: 

**Giải:**



Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  hay 

Vậy GTNN của 

**Ví dụ 5.** Chứng minh rằng: 

**Giải:** Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:



**1.1.3 Kỹ thuật ghép đối xứng**

Trong kỹ thuật ghép đối xứng ta cần nắm một số thao tác sau:

Phép cộng:

Phép nhân:

**Ví dụ 1.** Cho ba số thực dương *a, b, c* thỏa **. Chứng minh rằng



**Giải:**



Vậy 

**Ví dụ 2.** Cho  . Chứng minh rằng 

**Giải:** Ta có:



**Ví dụ 3.** Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng : 

**Gợi ý :** Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực dương ta có :



Tương tự , cho các số hạng còn lại, cộng ba BĐT này lại với nhau ta được điều phải chứng minh.

 Nhận xét :\* Phương pháp mà chúng ta làm ở trong bài toán trên người ta thường gọi là phương pháp tách gép cặp trong BĐT Côsi. Vì sao chúng ta lại ghép   ? Mục đích của việc làm này là làm mất các biến ở mẫu do vế phải của BĐT là một biểu thức không có biến ở mẫu. Vì sao ta lại ghép   mà không phải là b+c hay … điều này xuất phát từ điều kiện để đẳng thức xảy ra. Vì BĐT đã cho là một BĐT đối xứng (Tức là khi đổi vị trí hai biến bất kì cho nhau thì BĐT không thay đổi) nên đẳng thức thường xảy ra khi các biến bằng nhau và khi đó nên ta phải ghép với .

\* Nếu abc = 1 thì ta có :  nên  : .

\* Phương pháp trên được sử dụng nhiều trong chứng minh BĐT

**1.1.4 Kỹ thuật ghép cặp nghịch đảo**

Trong kỹ thuật ghép cặp nghịch đảo ta ứng dụng bất đẳng thức sau

Với  và  thì 

Chứng minh bất đẳng thức trên : Ta có với  thì



Với  và  thì 

**Ví dụ 1.** Cho *a*, *b*, *c* là ba số dương thoả mãn: *a* + *b* + *c* = .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

**Hướng dẫn:** Áp dụng Bất đẳng thức Côsi cho ba số dương ta có

 (\*)

Áp dụng (\*) ta có 

**Ví dụ 2.** Cho ba số thực dương *a, b, c*. CMR: 

**Giải:** Ta có:



**Ví dụ 3.** Cho ba số thực dương *a, b, c*. CMR: 

**Giải:**  

 

Ta có



Do đó  (đpcm)

**2. Kỹ thuật đổi biến số**

Có những bài toán về mặt biểu thức toán học tương đối cồng kềnh, khó nhận biết được phương hướng giải. Bằng cách đổi biến số, ta có thể đưa bài toán về dạng đơn giản và dễ nhận biết hơn.

**Ví dụ 1.**Cho các số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng :



Giải: Đặt , , .Khi đó a + b + c =1 và BĐT đã cho trở thành : 

Áp dụng BĐT Côsi ta có : 

.Tương tự cho các số hạng còn lại.

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta được : 

Mặt khác ta lại có :



Suy ra (điều phải chứng minh)

***Nhận xét :*** BĐT trên có nhiều cách chứng minh, ngoài cách chứng minh trên còn có những cách chứng minh khác cũng dùng BĐT Côsi.

**Cách khác :** Đặt  

**Ví dụ 2.** Chứng minh 

**Nhận xét**: Bất đẳng thức trên là hệ quả của bất đẳng thức

qua một phép biến đổi. Do đó để giải được nhanh gọn bài toán trên ta phải thực hiện phép đổi biến để đưa về bất đẳng thức nguồn ban đầu.Đặt .

**Bài toán trở thành chứng minh**:



Để giải được tiếp tục nhận xét điểm rơi ở bài này là 

Từ đó ta giải được như sau: 

Cộng vế theo vế ta được: dấu bằng xảy ra 

**Tuy nhiên chúng ta có thể giải bài toán trên bằng cách sau**:

Ta có : 

Tương tự: => 

Áp dụng bất đẳng thức Svacxo ta có:

 , dấu bằng xảy ra 

**Ví dụ 3.** Cho Tìm GTNN của biểu thức:



**Nhận xét** : Nhìn vào biểu thức  trông rất phức tạp nhưng nỗi lên rõ biến đó có liên quan đến  Do vậy để đơn giản hóa ta nên đổi biến đưa về bài toán mới. Mặt khác với suy nghĩ đổi biến như vậy thì chúng ta cần đánh giá tử số đưa về biến cần đổi và chú ý tới điểm rơi là .

Ta có bài giải như sau:



Đặt 

Suy ra: 

Do đó:

Vậy 

**Tuy nhiên chúng ta có thể giải bài toán trên bằng cách sau**:



Đặt 

=> 



**3. Phương pháp chọn điểm rơi**

*Đây là kĩ năng kiên quyết được ưu tiên hàng đầu trong bất đẳng thức Cô si ở những bài toán cực trị hoặc bất đẳng thức khó và đặc biệt ở bài toán cực trị hay bất đẳng thức có điều kiện. Đặc biệt trong bài toán cực trị, phải chỉ được dấu “=” xảy ra và điểm rơi chính là ở đây.*

*§©y lµ ph­¬ng ph¸p rÊt l«i cuèn häc sinh, b»ng c¸ch thªm c¸c sè h¹ng phï hîp vµ sö dông khÐo lÐo bÊt ®¼ng thøc C«si ta cã thÓ ®¹t nh÷ng kÕt qu¶ kh«ng ngê!*

*Trong các bất đẳng thức dấu “ = ” thường xảy ra ở các trường hợp sau:*

*+ Các biến có giá trị bằng nhau. Khi đó ta gọi bài toán có cực trị đạt được tại tâm Khi các biến có giá trị tại biên ( 1 biến bằng 0). Khi đó ta gọi bài toán có cực trị đạt được tại biên.*

*+ Ngoài ra , củng có một số trường hợp ngoại lệ là 3 biến lệch nhau hoàn toàn . Không có một “thuật toán” nào có thể giúp chúng ta dự đoán được dấu bằng bằng tay cả . Nếu dùng máy tính thì chúng ta có thuật toán Fermat-Lagrange để làm điều này . Nhưng chúng ta củng có thể có một vài cách tư duy để dự đoán được dấu bằng . Trường hợp tầm thường nhất đó là dấu đẳng thức xảy ra tại tâm 3 biến bằng nhau . Điều này thường xảy ra đối với các bài toán đối xứng 3 biến ( vai trò a,b,c như nhau ) . Trường hợp, hay gặp thứ 2 là có một biến bằng 0. Trong trường hợp này, gần như BĐT AM-GM không làm gì được và nó trở nên không đủ sức công phá các bài dạng này . Ta sẽ nói ở sau về dạng bài này . Trong một số bài toán có điều kiện kiểu như 3 biến a,b,c thuộc một đoạn đóng nào đó kiểu [a;b] thì rất có thể đẳng thức sẽ xảy ra tại 2 điểm đầu và cuối , và biến còn lại chúng ta có thể hoàn toàn tìm ra được bằng cách thử trực tiếp .*

***“ Kiểm tra điều kiện xảy ra dấu bằng, chọn điểm rơi và cân bằng hệ số!”***

***Bài toán 1.*** Cho , tìm GTNN của 

**Giải***:* Ta có: 

Dấu “=” xảy ra  . Vậy minP = 4 

***Bài toán 2.*** Cho , tìm GTNN của 

**HDGiải: Cho Hs quan sát hai lời giải**

*Lời giải 1*. Ta có: 

Dấu “=” xảy ra . Vô nghiệm

Vậy không tồn tại 

*Lời giải 2.* Ta có: 

Mặt khác . Vậy 

Dấu “=” xảy ra .

***Lời bình:*** Bài toán 1 và bài toán 2 gần như tương tự nhau, cùng áp dụng bất đẳng thức . Lời giải 1 tại sao sai? Lời giải 2 tại sao lại tách ?..? Làm sao nhận biết được điều đó…?...***Đó chính là kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức. Và qua chuyên đề này chúng ta sẽ hiểu sâu hơn về kỹ thuật “chọn điểm rơi” trong việc giải các bài toán cực trị***

**Ví dụ 1.** Cho , tìm GTNN của biểu thức .

*Sai lầm thường gặp*:

*Sai lầm* : Ta có :

 Mặt khác . Vậy  nên 

*Nguyên nhân sai lầm*:

*Sai lầm*: Học sinh chưa có khái niệm “điểm rơi”, việc tách  là do thói quen để làm xuất hiện . . Dấu “=” bất đẳng thức không xảy ra  không kết luận được 

***Lời giải đúng***: Do P là biểu thức đối xứng với , ta dự đoán  đạt tại , ta có:



Dấu bằng xảy ra .

**Ví dụ 2.** Cho , tìm GTNN của biểu thức .

*Sai lầm thường gặp*:

Ta có: 

. 

*Nguyên nhân sai lầm*: 

***Lời giải đúng:*** Ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi , và ta thấy  vì thế ta muốn xuất hiện ; ta áp dụng bất đẳng thức với ba số  và nếu vậy:

, ta không đánh giá tiếp được cho nên ta phải áp dụng bất đẳng thức cho 5 số:

Dấu bằng xảy ra khi .

**Ví dụ 3.**

Cho . Tìm GTLN của .

*Sai lầm thường gặp*:

*Sai lầm 1*: Ta có 



*Sai lầm 2*:



*Nguyên nhân sai lầm*: Cả hai lời giải trên đều đã biết hướng “đích” song chưa biết chọn điểm rơi. , tức là không tồn tại 

***Lời giải đúng***: Từ hai lời giải trên với dự đoán  đạt được tại 

nên tách các số ra cho dấu bằng xảy ra.

*Cách 1*: Ta có , tương tự và ta có:

, vậy  khi .

*Cách 2*: Ta có , mặt khác:

, tương tự ta có:

. Dấu “=” xảy ra khi , suy ra:

 khi.

***Nhận xét***: Ta có thể mở rộng **Ví dụ 3:**

Cho . Tìm GTLN của .

Với : Cách làm tương tự như bài 3, ta tách . Nếu , thì bài toán có còn giải quyết được không?

**Ví dụ 4.** Cho . Chứng minh .

*Sai lầm thường gặp*:

Ta có: , tương tự ta có:

,

mà 

*Nguyên nhân sai lầm*: , vậy 

***Lời giải đúng***: Ta dự đoán dấu “=” trong bất đẳng thức xảy ra khi . Vậy ta áp dụng Cauchy cho ba số  ta có:

, tương tự ta có:

, dấu bằng xảy ra khi 

**Ví dụ 5.** Cho , chứng minh rằng: 

*Sai lầm thường gặp*:

*Sai lầm 1:* , mặt khác , suy ra: .

Vậy , dấu “=” xảy ra khi 

*Sai lầm 2*: Ta có: ,

mặt khác 

*Nguyên nhân sai lầm*:

*Ở sai lầm 1*: Học sinh quên tính chất cơ bản của bất đẳng thức: 

*Ở sai lầm 2*: Dấu “=” xảy ra 

***Lời giải đúng***: Ta dự đoán dấu “=” xảy ra khi . Vì vậy khi áp dụng Cauchy cho  và : 

Ta có: 

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi .

**Ví dụ 6.** Cho  thoả mãn . (k là hằng số dương; M là số không âm cho trước) Tìm GTLN của .

Phân tích và tìm lời giải:

Do vai trò bình đẳng của x, y nên có thể dự đoán giá trị lớn nhất đạt được khi  và các thao tác đối với x và y là “giống nhau”. Ta tách  đồng thời “chia đều”

 cho cả x và y.

Áp dụng BĐT Cô si như sau: 

Để xuất hiện biểu thức **** ta cần chọn m sao cho (vì ).

Khi đó cộng vế theo vế suy ra: .

Vậy GTLN của 

Áp dụng: Cho  thoả mãn . Tìm GTLN của .

Giải : Bước 1: Chọn 

Bước 2: Áp dụng BĐT Côsi ta có: 

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được: .

Vậy Max S =  khi 

**Ví dụ 7.** Cho  thoả mãn . (n,k là hằng số dương; M là số không âm cho trước) Tìm GTLN của .

Phân tích và tìm lời giải**:**

Do vai trò bình đẳng của x, y nên có thể dự đoán giá trị lớn nhất đạt được khi  và các thao tác đối với x và y là “giống nhau”. Ta tách:  đồng thời “chia đều”

 cho cả x và y.

Áp dụng BĐT Cô si như sau: 

Để xuất hiện biểu thức **** ta cần chọn m sao cho (vì ). Khi đó cộng vế theo vế suy ra: .

Vậy GTLN của 

**Áp dụng:** Cho  thoả mãn:. Tìm GTLN của .

**Bước 1: Chọn **

**Bước 2: Áp dụng BĐT Cô si ta có:**

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được: .

**Vậy** Max S =  khi  .

**Ví dụ 8.** Cho  thoả mãn . (k là hằng số dương; M là số không âm cho trước) Tìm GTLN của .

Phân tích và tìm lời giải:

a).Do vai trò bình đẳng của x, z nên có thể dự đoán giá trị lớn nhất đạt được khi x và z và các thao tác đối với x và z là “giống nhau”. Để xuất hiện biểu thức:**** thì khi ta áp dụng BĐT Cô si

; và .

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên ta có: . Ta cần chọn m () sao cho: 

Khi đó suy ra: 

Do đó: **.** Vậy: 

**Áp dụng**: *(ĐỀ THI HSG Tỉnh Nghệ An Lớp 11-Bảng A-2002-2003)*

Cho  thoả mãn . Tìm GTLN của .

Giải. Ta áp dụng cho trường hợp: 

Bước 1: Tìm 

Bước 2: Áp dụng BĐT Cô si ta có



Cộng vế theovế các BĐT trên ta được:



Vậy: 

*Đến đây chúng ta thấy rằng nếu không có định hướng cách giải rõ ràng thì bài toán trở nên khó với kết quả khá phức tạp và đầy bất ngờ chứ nhỉ?*

**Ví dụ 9.** Cho . Tìm giá trị lớn nhất của:

a).

b). 

(Với n là số tự nhiên; , M là số không âm cho trước; a là hằng số dương).

**Phân tich và tìm lời giải:**

a).Do vai trò bình đẳng của x, y nên có thể dự đoán giá trị lớn nhất đạt được khi  và các thao tác đối với

x và y là “giống nhau”. Để xuất hiện biểu thức:**** thì khi áp dụng BĐT Cô si

**;  và .** Ta cần chọn các số  sao cho :.

Ta có:



Suy ra: .

b).Tương tự để xuất hiện biểu thức **** ta chọn các số  sao cho :.

Áp dụng: Cho .

Tìm giá trị lớn nhất của: a). 

b). 

Giải. a).Ta áp dụng cho trường hợp: 

Bước 1: Tìm  sao cho :.

Bước 2: Áp dụng BĐT Cô si ta có: 

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta có:



Suy ra: .

Vậy: .

**b).**Ta áp dụng cho trường hợp: ****

**Bước 1:** Tìm  sao cho :.

**Bước 2:** Áp dụng BĐT Cô si ta có:

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta có:



Suy ra: **. Vậy:** .

**Ví dụ 10.** Cho  thoả mãn (M là số không âm cho trước)

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  (k là số dương)

**Phân tích và tìm lời giải:**

Do vai trò bình đẳng của x, y nên có thể dự đoán giá trị lớn nhất đạt được khi  và các thao tác đối với x và y là “giống nhau”.”. Ta tách  đồng thời “chia

đều”  cho cả x và y.

Áp dụng BĐT Cô si ta có:

Để xuất hiện biểu thức **** ta cần chọn m sao cho (vì ).

Khi đó cộng vế theo ba BĐT trên ta được:  khi và chỉ khi

Áp dụng: 1). Cho  thoả mãn .Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  . Ta áp dụng cho trường hợp: 

Bước 1: Tìm 

Bước 2: Áp dụng BĐT Cô si ta có: 

Cộng vế theo các BĐT trên ta được:.

Vậy .

2). Cho  thoả mãn .Chứng minh rằng:  .

HDG: Ta áp dụng cho trường hợp: 

Bước 1: Tìm 

Bước 2: Kiểm nghiệm kết quả: 

**Ví dụ 11. (B-2007)** Cho x, y, z là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: 

*Phân tích:*  Do vai trò bình đẳng nên ta có thể thấy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = y = z. Khi đó . Vì thế đến đây để triệt tiêu biến, ta sử dụng bắt đẳng thức Cô si cho 3 số ,  và ,

suy ra x = 1

Lưu ý rằng, ta phải biến đổi biểu thức 

Và chú ý đến bất đẳng thức: 

Do đó, 

**4. Kỹ thuật nhân thêm hệ số**

**Ví dụ 1.**  Cho 3 số thực dương *a, b, c*  thỏa*.*  Tìm GTLN của:



Phân tích: Do *A* là biểu thức đối xứng với *a, b, c*  nên ta dự đoán GTNN của *A* đạt tại 

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:



Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:



Dấu “=” xảy ra 

Vậy GTLN của *A* là . Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi 

*Lưu ý:* *Trong bài toán sử dụng kỹ thuật nhân thêm hệ số, ta sẽ sử dụng kỹ thuật chọn điểm rơi để tìm hệ số cho phù hợp*.

**Ví dụ 2.** Cho 3 số thực dương *a, b, c* thỏa*.*  Chứng minh rằng:



Phân tích: Do biểu thức đã cholà biểu thức đối xứng với *a, b, c*  nên ta dự đoán dấu “=” xảy ra khi: 

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:



Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

 (đpcm)

**Ví dụ 3.** Cho *a, b, c*  thỏa*.*  Chứng minh rằng:



Phân tích: Do biểu thức đã cholà biểu thức đối xứng với *a, b, c*  nên ta dự đoán dấu “=” xảy ra khi: 

**Giải** : Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:



Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:



Mà theo bất đẳng thức Bunyakovski ta có



nên  (đpcm)

**5. Kỹ thuật hạ bậc**

**Ví dụ 1.** Cho các số thực dương *a, b, c* thỏa mãn điều kiện  (\*). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

Phân tích: Sự chênh lệch về số mũ của các biểu thức  và  gợi cho ta sử dụng bất đẳng thức Cauchy để hạ bậc . Nhưng ta cần áp dụng cho bao nhiêu số và là những số nào? Căn cứ vào bậc của các biến số *a, b, c* trong các biểu thức trên (số bậc giảm 2 lần) thì ta cần áp dụng bất đẳng thức Cauchy lần lượt cho và cùng với 1 hằng số dương tương ứng khác để làm xuất hiện  và . Do *a, b, c* dương và có vai trò như nhau nên ta dự đoán *A* đạt giá trị nhỏ nhất khi , từ (\*) ta có . Mặt khác thì dấu “=” của bất đẳng thức Cauchy xảy ra khi chỉ khi các số tham gia bằng nhau. Khi đó ta có lời giải như sau

Lời giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số:  và  ta có:

 (1) Dấu “=” xảy ra 

Tương tự:  (2) Dấu “=” xảy ra 

 (3) Dấu “=” xảy ra 

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

.

Dấu “=” xảy ra 

Vậy GTNN của *A* là , Dấu “=” xảy ra 

**Ví dụ 1.1.**  Cho các số thực dương *a, b* thỏa mãn điều kiện (\*). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

Phân tích: Căn cứ vào bậc của các biến số *a, b* trong các biểu thức trên (số bậc giảm 6 lần) thì ta cần áp dụng bất đẳng thức Cauchy lần lượt cho  và  cùng với 5 hằng số dương tương ứng khác để làm xuất hiện  và . Do *a, b* dương và có vai trò như nhau nên ta dự đoán *A* đạt giá trị lớn nhất khi , từ (\*) ta có . Mặt khác thì dấu “=” của bất đẳng thức Cauchy xảy ra khi chỉ khi các số tham gia bằng nhau. Khi đó ta có lời giải như sau:

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 6 số:  và 5 số  ta có:

 (1) Dấu “=” xảy ra 

Tương tự:  (2) Dấu “=” xảy ra 

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1) và (2) ta được:



Dấu “=” xảy ra 

Vậy giá trị lớn nhất của *A* là , Dấu “=” xảy ra 

**Ví dụ 1.2.** Cho 3 số thực dương *a, b, c* thỏa . Chứng minh rằng 

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

(1) ; (2) ; (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:



 (đpcm)

**Ví dụ 1.3.** Cho 3 số thực dương *a, b, c* thỏa . CMR: 

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 5 số: 3 số  và 2 số 1, ta có:

 (1)

Tương tự:  (2) ;  (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:



 (đpcm)

**Ví dụ 1.4.**  Cho 3 số thực dương *a, b, c* thỏa . Chứng minh rằng 

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 7 số: 3 số  , 3 số  và số 1, ta có:

 (1)

Tương tự:  (2) ;  (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:



 (đpcm)

**Ví dụ 1.5.** Cho 2 số thực dương *a, b*. CMR: 

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

(1);  (2) ;  (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

 (đpcm)

**Ví dụ 1.6.** Cho 3 số thực dương *a, b, c*. Chứng minh rằng 

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 6 số: 4 số ,1 số  và 1 số ta có:

 (1)

Tương tự:  (2) ;  (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:



 (đpcm)

**Ví dụ 1.7.** Cho các số thực dương *a, b, c, m, n*. Chứng minh rằng



Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho *m+n* số: *m* số  và *n* số ta có:

 (1)

Tương tự:  (2)

 (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:



 (đpcm)

*Lưu ý:* *Bất đẳng thức chúng ta vừa chứng minh sẽ được sử dụng trong chứng minh các bài toán sau này.*

**Ví dụ 1.8.** Cho 3 số thực dương *a, b, c* thỏa  *.* Chứng minh bất đẳng thức sau: 

Giải: Từ kết quả trên ta có 

Chọn  ta được:



Tương tự:  (2) ,  (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

(đpcm)

**Ví dụ 2.** Cho các số thực dương *a, b, c* thỏa mãn điều kiện . Chứng minh rằng: 

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

, , 

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta có:

Dấu “=” xảy ra 

Đây là một lời giải ngắn gọn nhưng có vẻ hơi thiếu tự nhiên. Chúng ta sẽ thắc mắc tại sao lại tách được . Nếu tách cách khác, chẳng hạn  liệu có giải được không? Tất nhiên mọi cách tách khác đều không dẫn đến kết quả, và tách  cũng không phải là sự may mắn. Bây giờ ta sẽ tìm lí do việc tách  ở bài toán trên.

Với . Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

, 



Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta có:



Lúc này ta cân bằng điều kiện giả thuyết, tức là:





Khi đó ta có lời giải bài toán như trên.

**Ví dụ 3.** Cho các số thực dương *a, b* thỏa mãn điều kiện . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

Phân tích: Dự đoán *A* đạt GTLN khi 

Giả sử *A* đạt GTLN khi  . Ta có  (1)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số:  và 2 số  ta có:



Tương tự: 

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

Đẻ xuất hiện ở vế phải  ta chọn  sao cho 

Từ (1) và (2) ta có hệ: 

Khi đó ta có lời giải sau:

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

 , 

Cộng theo vế các bất đẳng thức trên ta được:



Dấu “=” xảy ra khi 

Vậy GTLN của *A* là , Dấu “=” xảy ra khi 

**Ví dụ 3.** Cho các số thực dương *a, b, c* thỏa mãn điều kiện . Tìm GTNN của 

Phân tích: Với . Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

, , 

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta có:



Dấu “=” xảy ra 

Chọn sao cho , Ta có hệ phương trình: 



Khi đó ta có lời giải bài toán như sau

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

, , 

Cộng theo vế 3 bất đẳng thức trên, ta được:



Dấu “=” xảy ra 

Vậy GTNN của *A* là 12, Dấu “=” xảy ra 

**6. Kỹ thuật cộng thêm**

**Ví dụ 1.** Cho 3 số thực dương *a, b, c.*

Chứng minh bất đẳng thức sau: 

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

 (1) ;  (2);  (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

 (đpcm)

**Ví dụ 2.** Cho 3 số thực dương *a, b, c*. Chứng minh bất đẳng thức sau:



Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

 (1) ;

 (2) ; (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:



 (đpcm)

*Lưu ý:* *Trong bài toán sử dụng kỹ thuật cộng thêm hệ số, ta sẽ sử dụng kỹ thuật chọn điểm rơi và kỹ thuật hạ bậc để tìm hạng tử cho phù hợp*.

Đối với ví dụ 1 bất đẳng thức đã cho có tính đối xứng với *a, b, c*  nên ta dự đoán dấu “=” xảy ra khi . Khi đó , ta chọn .

Đối với ví dụ 2 bất đẳng thức đã cho có tính đối xứng với *a, b, c*  nên ta dự đoán dấu “=” xảy ra khi . Khi đó , muốn sử dụng bất đẳng thức Cauchy để làm mất mẫu thì ta cộng thêm . Chọn mẫu là số 9 vì .

**Ví dụ 3.** Cho 3 số thực dương *a, b, c*. Chứng minh bất đẳng thức sau:



Giải: Ta có:



Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

 (1);  (2) ;  (3) ;

 (4) ;  (5) ;  (6)

Cộng theo vế các bất đẳng thức từ (1) đến (6) ta được:



 (đpcm)

**Ví dụ 4.** Cho 3 số thực dương *a, b, c.* Chứng minh bất đẳng thức sau:



Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

 (1) ;  (2);  (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:



 (đpcm)

**Ví dụ 5.** Cho 3 số thực dương *a, b, c.* Chứng minh bất đẳng thức sau:



Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

 (1)  (2) ;  (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức từ (1), (2) và (3) ta được:



 (đpcm)

**Ví dụ 6.** Cho 3 số thực dương *a, b, c* thỏa  . Chứng minh bất đẳng thức sau: 

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

 (1) ;

 (2) ; (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

 (đpcm)

**Ví dụ 7.** Cho 3 số thực dương *a, b, c.* Chứng minh bất đẳng thức sau:



Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

 (1) ,  (2),

 (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

 (đpcm)

**Ví dụ 8.** Cho 3 số thực dương *a, b, c*. Chứng minh bất đẳng thức sau:



Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

 (1)

 (2) ;  (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

 (đpcm)

**Ví dụ 9.** Cho 3 số thực dương *a, b, c* thỏa  . Chứng minh rằng:



Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

 (1) ;

 (2) ;  (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:



Mặt khác ta có: 

Chọn  ta được:



Cộng theo vế các bất đẳng thức (1’)và (2’) ta được:



 (đpcm)

**Ví dụ 10.** Cho 3 số thực dương *a, b, c*. Chứng minh bất đẳng thức sau:



Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

 (1) ; (2) ;  (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:



Mặt khác ta có: 

Chọn  ta được: 

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1’)và (2’) ta được:



 (đpcm)

**Ví dụ 11.** Cho 3 số thực dương *a, b, c*. Chứng minh bất đẳng thức sau:



Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

 (1) ;

 (2) ;  (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:



Mặt khác ta có: 

Chọn  ta được:



Cộng theo vế các bất đẳng thức (1’)và (2’) ta được:



 (đpcm)

**Ví dụ 12.** Cho 3 số thực dương *a, b, c.* Chứng minh bất đẳng thức sau:



Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

 (1) ;

 (2) ;  (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:



Mà ta có:  ;

; 

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1’), (2’), (3’) và (4’) ta được:

 (đpcm)

**Ví dụ 13.** Cho 3 số thực dương *a, b, c*. Chứng minh bất đẳng thức sau:

, Dấu “=” của bất đẳng thức xảy ra khi 

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

 (1);  (2) ;  (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức từ (1), (2) và (3) ta được:  (đpcm)

**Ví dụ 14.** Cho 3 số thực dương *a, b, c*. Chứng minh bất đẳng thức sau:



Gợi ý: Dấu “=” của bất đẳng thức xảy ra khi 

Giải: Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

 (1);  (2) ;  (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức từ (1), (2) và (3) ta được:



 (đpcm)

**7. Kỹ thuật Cosi ngược dấu**

Đối với kỹ thuật này, học sinh khá khó có thể vận dụng và tư duy được trong giải toán. Với kỹ thuật này ta có thể giải một số bài toán bằng lời giải hết sức độc đáo sau khi sử dụng bất đẳng thức Cô si mà bài toán đó khó có cacxhs giải khác hoặc cách giải đó rất dài!

Xét bài toán sau:

Bài toán: Cho 3 số thực dương *a, b, c* có tổng thỏa điều kiện :. Chứng minh bất đẳng thức sau: 

Phân tích và giải: Ta không thể dùng trực tiếp bất đẳng thức Cauchy với mẫu vì bất đẳng thức sau đó sẽ đổi chiều:  

Đến đây chúng ta sẽ bị lúng túng trong cách giải. Ở đây ta sẽ sử dụng lại bất đẳng thức Cauchy theo cách khác:



Tương tự ta có: ; 

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta được:

 (đpcm)

Nhận xét: Kỹ thuật Cauchy ngược dấu có thể hiểu là ta lấy *nghịch đảo hai vế* của bất đẳng thức Cauchy sau đó *nhân hai vế với -1*. Khi đó dấu của bất đẳng thức ban đầu sẽ không đổi chiều.

- Kỹ thuật Cô si ngược dấu đã cho chúng ta một lời giải đẹp.

**Ví dụ 1.** Cho 3 số thực dương *a, b, c* thỏa mãn điều kiện :.

Chứng minh bất đẳng thức sau:

Giải: Ta có: 

Tương tự ta có: ; 

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta được:

 (đpcm)

**Ví dụ 2.** Cho 3 số thực dương *a, b, c* có tổng thỏa điều kiện :.

Chứng minh bất đẳng thức sau:

Giải: Ta có:

Tương tự ta có: ; 

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta được:

Mặt khác ta có:

 Từ (1’) và (2’) ta có: (đpcm)

Lưu ý: *Ta sẽ sử dụng kết quả  trong chứng minh các bài toán khác.*

Vậy tương tự ta có thể chứng minh bất đẳng thức trên với 4 biến không? Ta có bài toán sau: *Nếu a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn điều kiện*

*a + b + c + d = 3 thì ta luôn có *

**Ví dụ 3.** Cho 3 số thực dương *a, b, c* có tổng thỏa điều kiện :. Chứng minh bất đẳng thức sau: 

Giải: Ta có: 

Tương tự ta có:  ; 

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta được:



Vậy 

**Ví dụ 4.** Cho 3 số thực dương *a, b, c* . Chứng minh bất đẳng thức sau:



Giải: Ta có:

Tương tự ta có: ; 

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta được:

 (đpcm)

***Ta có bài toán mở rộng với 4 số dương a, b, c, d ta luôn có:***

**

**Ví dụ 5.** Cho 3 số thực dương *a, b, c* có tổng thỏa điều kiện :.

Chứng minh bất đẳng thức sau: 

Giải: Ta có:



Tương tự ta có: ; 

Cộng theo vế (1), (2), (3) và áp dụng các bất đẳng thức sau

**



Suy ra  (đpcm)

**Ví dụ 6.** Cho 3 số thực dương *a, b, c* có tổng thỏa điều kiện . Chứng minh bất đẳng thức sau: 

Giải: Ta có: (1)

Tương tự ta có:; 

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta được:



Mặt khác ta có: 

Cộng theo vế (1’) và (2’) ta được:



**Ví dụ 7.** Cho 3 số thực dương *a, b, c* . Chứng minh rằng:



Giải: Ta có: 

Tương tự ta có: ; 

Cộng theo vế (1), (2), (3)

**Ví dụ 8.** Cho 3 số thực dương *a, b, c* có tổng thỏa điều kiện .

Chứng minh bất đẳng thức sau: 

Giải: Ta có: 

Tương tự ta có: ; 

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta được:



Mặt khác ta có:  (1’)

Tương tự:  (2’) ;  (3’)

Cộng theo vế (1’), (2’) và (3’) ta có





Từ (\*) và (\*\*) ta có:  (đpcm)

**Ví dụ 9.** Cho 3 số thực dương *a, b, c* thỏa điều kiện . Chứng minh bất đẳng thức sau: 

Giải: Ta có: (1)

Tương tự ta có:  ; 

Cộng theo vế (1), (2), (3) ta được: 

Mặt khác ta có: 

Tương tự ta có: ; 

Cộng theo vế (1’), (2’), (3’) ta được:



Từ (\*) và (\*\*) ta có:  (đpcm)

Như vậy việc sử dụng bất đẳng thức Cosi và các kĩ thuật sử dụng bất đẳng thức Cosi trong chứng minh bất đẳng thức và tìm cực trị thật không hề giản đơn, đòi hỏi người học nắm bắt các kĩ thuật và sử dụng linh hoạt, sáng tạo trong từng bài toán.

**III. BÀI TẬP RÈN LUYỆN**

1. **Bài tập cơ bản :**

**Bài 1**: Cho a, b dương. Chứng minh 

**Bài 2 :** Cho a, b là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức



*Gợi ý : Sử dụng BĐT Cô si ở tử và mẫu min M = *

**Bài 3**: Cho a, b, c dương. Chứng minh rằng 

*Gợi ý : Sử dụng BĐT Cô si :* 

**Bài 4**: Chứng minh rằng 

**Bài 5 :** Cho a, b là hai số dương thỏa mãn . Chứng minh **

**Bài 6** : Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn . Chứng minh rằng 

*Gợi ý:* Từ giả thiết ta có 

1. **Bài tập nâng cao :**

**Bài 1**: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn a > b và ab + (a+b)c + c2 = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

*Gợi ý :* Biến đổi biểu thức 

**Bài 2 :** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn : a+ b+ c = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức 

*Gợi ý :* Đưa các biểu thức ở tử về đồng bậc,

4 – 3a = a+4b+4c = 1+ 3b + 3c 

**Bài 3**: Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức



*Gợi ý : Đổi biến*

*Đặt *

Khi đó với mọi x > 0

**Bài 4**: Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng



*Gợi ý :*BĐt cần chứng minh 

+ 

+

**Bài 5 : (Dự bị B - 2010)**  Cho x, y, z là các thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

*Gợi ý:*Xét



**Bài 6**: Cho  là ba số thỏa mãn điều kiện 

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức 

**Bài 7** : Cho ba số dương  thỏa mãn . Chứng minh:



**III. KẾT LUẬN**

*Khi sử dụng bất đẳng thức AM – GM trong chứng minh bất đẳng thức và bài toán cực trị Đại số, cần chú ý:*

1. Khi áp dụng bđt AM - GM thì các số phải là những số không âm

2. BĐT AM - GM thường được áp dụng khi trong bđt cần chứng minh có tổng và tích.

3. Điều kiện xảy ra dấu ‘=’, đặc biệt chú ý trong bài toán tìm cực trị.

4. Chú ý tới điều kiện đề bài cho để lựa chọn điểm rơi, để biến đổi bất đẳng thức hoặc trong bài cực trị.

5. Cần kết hợp với các bất đẳng thức cơ bản khác, đẳng thức trong giải toán.

6. Đôi khi đánh giá bất đẳng thức trực tiếp bằng AM – GM không hiệu quả, khi đó cần kết hợp biến đổi giữa điều kiện bài toán và bất đẳng thức cần chứng minh hay tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) để đưa về bài toán đơn giản hơn.

7. Bài toán với các biểu thức cồng kềnh, ta có thể đặt ẩn phụ để bài toán trở nên đơn giản hơn.

8. Bất đẳng thức AM – GM ngoài hai ứng dụng trên, còn ứng dụng khác trong giải toán, đó là : Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trong bài toán hình học, giải phương trình, hệ phương trình, chứng minh các mệnh đề toán học…

**CỘNG HOÀ XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM**

**Độc lập - Tự do - Hạnh phúc**

**ĐƠN YÊU CẦU CÔNG NHẬN SÁNG KIẾN**

Kính gửi: Sở GD – DDT Nam Định

- Tên tôi là : Tô Thị Bình

- Ngày tháng năm sinh: 18/04/1983

- Nơi công tác : Trường THCS Giao Thủy

- Chức danh: Bí thư chi Đoàn trường THCS Giao Thủy

- Trình độ chuyên môn: Đại học sư phạm Toán

- Tỷ lệ (%) đóng góp vào việc tạo ra sáng kiến: 96%

- Là tác giả (nhóm tác giả) đề nghị xét công nhận sáng kiến:

“KĨ THUẬT SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC COSI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM CỰC TRỊ ĐẠI SỐ”

- Lĩnh vực áp dụng sáng kiến: Giáo dục

- Ngày sáng kiến được áp dụng lần đầu hoặc áp dụng thử: Năm học 2012 - 2013

- Mô tả bản chất của sáng kiến: Giúp học sinh vận dụng bất đẳng thức Cosi trong mọi tình huống và các bài toán về bất đẳng thức và tìm cực trị Đại số

- Những điều kiện cân thiết để áp dụng sáng kiến: Có học sinh để giảng dạy

- Đánh giá lợi ích thu được hoặc dự kiến có thể thu được do áp dụng sáng kiến theo ý kiến của tác giả: chuyên đề đã góp phần tích cực hóa hoạt động của học sinh đồng thời nâng cao chất lượng dạy và học của thầy và trò, cụ thể: Kết quả thi học sinh giỏi năm học 2012 – 2013, có 4 em đạt giải nhì, 1 em đạt giải ba, 2 em đạt giải khuyến khích , năm học 2013 – 2014: 2 em đạt giải nhì, 5 em đạt giải ba, 1 khuyến khích. Năm học 2014 – 2015: 2 em đạt giải nhì và 5 em đạt giải ba . Năm học 2015 – 2016, có 3 em giải nhì, 3 em giải ba và 3 em đạt giải khuyến khích

Danh sách những người tham gia áp dụng thử hoặc áp dụng lần đầu (nếu có): Học sinh các lớp 9B, 9C, 9D, 9B và 9D trong các năm học từ 2012 – 2013 đến năm học 2015 – 2016.

Tôi xin cam đoan mọi thông tin trong đơn là trung thực, đúng sự thật và hoàn toàn chịu trách nhiệm trước pháp luật.

Giao Thủy, ngày 24 tháng 12 năm 2016

Người nộp đơn

Tô Thị Bình