

CĂN THỨC BẬC HAI VÀ HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$

A. Tóm tắt lý thuyết

1. Căn thức bậc hai

a. **Định nghĩa:** Với A là một biểu thức đại số thì $\sqrt{A}$ được gọi là căn thức bậc hai của A và A gọi là biểu thức lấy căn hay là biểu thức dưới dấu căn

b. $\sqrt{A}$ có nghĩa (hay xác định) khi $A \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{A}}$ có nghĩa khi $A > 0$

Ví dụ: $\sqrt{3x}$ có nghĩa khi $3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A, (A \geq 0) \\ -A, (A < 0) \end{cases}$$

2. Hằng đẳng thức:

Ví dụ 1: $\sqrt{12^2} = |12| = 12; \sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$

Ví dụ 2: Rút gọn biểu thức sau: $\sqrt{(x-2)^2}$ với $x \geq 2$

Lời giải

Ta có: $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = x-2$ vì $x \geq 2$

B. Bài tập và các dạng toán

Dạng 1: Tìm điều kiện để biểu thức chứa căn có nghĩa

Cách giải: Chú ý rằng $\sqrt{A}$ có nghĩa khi và chỉ khi $A \geq 0$

- | | |
|--|---|
| +) $\sqrt{A}$ có nghĩa khi $A \geq 0$ | +) $\sqrt{\frac{1}{A}}$ có nghĩa khi $A > 0$ |
| +) $\sqrt{A+B} \Rightarrow A+B \geq 0$ có nghĩa khi $A+B \geq 0$ | +) $\frac{1}{\sqrt{A}}$ có nghĩa khi $A > 0$ |
| +) $\sqrt{A-B}$ có nghĩa khi $A-B \geq 0$ | +) $\frac{1}{\sqrt{A^2}}$ có nghĩa khi $A \neq 0$ |
| +) $\frac{1}{\sqrt{A-B}}$ có nghĩa khi $\Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ \sqrt{A-B} \neq 0 \end{cases}$ | |

$$+) \frac{1}{\sqrt{A+B}} \text{ có nghĩa khi } \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ \sqrt{A+B} \neq 0 \end{cases}$$

$$+) \sqrt{AB} \Rightarrow AB \geq 0 \text{ có nghĩa khi } \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases} \\ \text{hoặc} \\ \begin{cases} A \leq 0 \\ B \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$+) \sqrt{\frac{A}{B}} \text{ có nghĩa } \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \end{cases} \\ \text{hoặc} \\ \begin{cases} A \leq 0 \\ B < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$+) \frac{1}{\sqrt{A \cdot B}} \text{ có nghĩa } \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} A > 0 \\ B > 0 \end{cases} \\ \text{hoặc} \\ \begin{cases} A < 0 \\ B < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$+) x^2 \leq n \Leftrightarrow -\sqrt{n} \leq x \leq \sqrt{n} (n \geq 0)$$

$$+) x^2 \geq n \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{n} \\ x \leq -\sqrt{n} \end{cases} (n \geq 0)$$

Bài 1: Tìm x để các căn thức sau có nghĩa

a. $\sqrt{-3x}$

b. $\sqrt{2x-10}$

c. $\sqrt{-3x-4}$

d. $\sqrt{3x+15}$

e. $\sqrt{5x+\frac{1}{2}}$

f. $\sqrt{x^2-8x-9}$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{-3x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x \leq 0$

b) Ta có: $\sqrt{2x-10}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 2x-10 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$

c) Ta có: $\sqrt{-3x-4}$ có nghĩa $\Leftrightarrow -3x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{4}{3}$

d) Ta có: $\sqrt{3x+15}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 3x+15 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$

e) Ta có: $\sqrt{5x+\frac{1}{2}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow 5x+\frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{10}$

f) Ta có: $\sqrt{x^2-8x-9}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x^2-8x-9 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-9) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 9 \\ x \leq -1 \end{cases}$

Chú ý: Với a là số dương, ta có:

$$\begin{cases} x^2 \geq a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases} \\ x^2 \leq a^2 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \end{cases}$$

Bài 2: Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa

- a. $\sqrt{x(x+2)}$ b. $\sqrt{5x^2 - 3x - 8}$ c. $\sqrt{2x^2 + 4x + 5}$
d. $\sqrt{4 - x^2}$ e. $\sqrt{-x^2 + 2x - 1}$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{x(x+2)}$ có nghĩa khi $x(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq 0 \end{cases}$

x		-2		0	
x	-		-	0	+
$x+2$	-	0	+		+
$x(x+2)$	+		-		+

b) Ta có: $\sqrt{5x^2 - 3x - 8}$ có nghĩa khi $5x^2 - 3x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(5x-8) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq \frac{8}{5} \end{cases}$

c) Ta có: $\sqrt{2x^2 + 4x + 5}$ có nghĩa khi $2x^2 + 4x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 + 3 \geq 0$. Vậy biểu thức luôn có nghĩa

d) Ta có: $\sqrt{4 - x^2}$ có nghĩa khi $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

e) Ta có: $\sqrt{-x^2 + 2x - 1}$ có nghĩa khi $-(x+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Bài 3: Với giá trị nào của x thì mỗi biểu thức sau có nghĩa:

- a. $\sqrt{\frac{4}{2x+3}}$ b. $\sqrt{\frac{-2}{x+1}}$ c. $\frac{1}{3-2x}$

$$\begin{array}{lll} \text{d. } \sqrt{\frac{2}{x^2}} & \text{e. } \frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2} & \text{f. } \frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2} \\ \text{g. } \frac{x}{x^2-4} + \sqrt{x-2} & \text{h. } \sqrt{x+\frac{3}{x}} + \sqrt{-3x} & \end{array}$$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{\frac{4}{2x+3}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \frac{4}{2x+3} \geq 0 \Leftrightarrow 2x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$

b) Ta có: $\sqrt{\frac{-2}{x+1}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \frac{-2}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$

c) Ta có: $\frac{1}{3-2x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \frac{1}{3x-2} \geq 0 \Leftrightarrow 3-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$

d) Ta có: $\sqrt{\frac{2}{x^2}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

e) Ta có: $\frac{x}{x-2} + \sqrt{x-2}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

f) Ta có: $\frac{x}{x+2} + \sqrt{x-2}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$

g) Ta có: $\frac{x}{x^2-4} + \sqrt{x-2}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$

k) Ta có: $\sqrt{x+\frac{3}{x}} + \sqrt{-3x}$ có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{3}{x} > 0 \\ -3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+3}{x} \\ x \leq 0 \end{cases}$ (vô lý).

Vậy không có giá trị nào của x làm biểu thức có nghĩa.

Dạng 2: Tính giá trị của biểu thức

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A, (A \geq 0) \\ -A, (A < 0) \end{cases}$$

Cách giải: Sử dụng hằng đẳng thức:

Bài 1: Tính giá trị của các biểu thức sau

a. $A = \sqrt{144} \cdot \sqrt{-\frac{49}{64}} \cdot \sqrt{0,01}$ b. $B = \left(\sqrt{0,25} - \sqrt{(-15)^2} + \sqrt{2,25} \right) : \sqrt{169}$

c. $C = \left(\sqrt{0,04} - \sqrt{(-1,2)^2} + \sqrt{121} \right) \sqrt{81}$ d. $D = 75 : \sqrt{3^2 + (-4)^2} - 3\sqrt{(-5)^2 - 3^2}$

Lời giải

a) Ta có: $A = \sqrt{144} \cdot \sqrt{-\frac{49}{64}} \cdot \sqrt{0,01} = \sqrt{12^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2} \cdot \sqrt{(0,1)^2} = 1,05$

b) Ta có: $B = \left(\sqrt{0,25} - \sqrt{(-15)^2} + \sqrt{2,25} \right) : \sqrt{169} = \left(\sqrt{(0,5)^2} - \sqrt{15^2} + \sqrt{(1,5)^2} \right) : \sqrt{13^2} = -1$

c) Ta có: $C = \left(\sqrt{0,04} - \sqrt{(-1,2)^2} + \sqrt{121} \right) \sqrt{81} \Rightarrow C = 90$

d) Ta có: $D = 75 : \sqrt{3^2 + (-4)^2} - 3\sqrt{(-5)^2 - 3^2} \Rightarrow D = 3$

Bài 2: Tính giá trị của các biểu thức sau

a. $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{22 - 12\sqrt{2}}$ b. $\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} + \sqrt{2}$

c. $3\sqrt{5} - \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2}$ d. $\sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}$

e. $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$ f. $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$

g. $\sqrt{24 + 8\sqrt{5}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$ h. $\sqrt{41 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{41 + 12\sqrt{5}}$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{22 - 12\sqrt{2}} = \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(3\sqrt{2} - 2)^2} = 2\sqrt{2}$

b) Ta có: $\sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} + \sqrt{2} = |\sqrt{3} - \sqrt{2}| + \sqrt{2} = \sqrt{3}$

c) Ta có: $3\sqrt{5} - \sqrt{(1 - \sqrt{5})^2} = 3\sqrt{5} - |1 - \sqrt{5}| = 3\sqrt{5} - |1 - \sqrt{5}| = 3\sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1) = 2\sqrt{5} + 1$

d) Ta có: $\sqrt{17-12\sqrt{2}} + \sqrt{9+4\sqrt{2}} = \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2} = 4$

e) Ta có: $\sqrt{6+2\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = 2\sqrt{5}$

f) Ta có: $\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} + \sqrt{(2-\sqrt{2})^2} = 3$

g) Ta có: $\sqrt{24+8\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{4(6+2\sqrt{5})} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = 2|\sqrt{5}+1| + |\sqrt{5}-2| = 3\sqrt{5}$

h) Ta có: $\sqrt{41-12\sqrt{5}} - \sqrt{41+12\sqrt{5}} = \sqrt{(6-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(6+\sqrt{5})^2} = -2\sqrt{5}$

Bài 3: Thực hiện các phép tính sau

a) $A = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{5+2\sqrt{6}}$

b) $B = \left(\frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \right)^2 - \left(\frac{4+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \right)^2$

c) $C = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{9 - \sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$

d) $D = \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$

Lời giải

a) Ta có: $A = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{5+2\sqrt{6}} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 1$

b) Ta có: $B = \left(\frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \right)^2 - \left(\frac{4+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \right)^2 = \left[\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{\sqrt{3}-1} \right]^2 - \left[\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{\sqrt{3}-1} \right]^2 = (\sqrt{3}-1) - (\sqrt{3}+1) = -4\sqrt{3}$

c) Ta có: $C = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{9 - \sqrt{29-12\sqrt{5}}}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{9 - \sqrt{20-12\sqrt{5}+9}}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{9 - \sqrt{(2\sqrt{5}+3)^2}}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{9 - (2\sqrt{5}+3)}} = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}} = \sqrt{\sqrt{5} - (\sqrt{5}-1)} = \sqrt{1} = 1$

d) Ta có:

$$\begin{aligned} \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}} &= \sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{(2\sqrt{2}+1)^2}}} = \sqrt{13+30\sqrt{2+(2\sqrt{2}+1)}} = \sqrt{13+30\sqrt{3+2\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{13+30\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}} = \sqrt{13+30(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{43+30\sqrt{2}} = \sqrt{25+2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{2}+18} = \sqrt{(5+3\sqrt{2})^2} = 5+3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{(4-\sqrt{15})^2} + \sqrt{15}$

b) $B = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

c) $C = \sqrt{49-12\sqrt{5}} - \sqrt{49+12\sqrt{5}}$

d) $D = \sqrt{29+12\sqrt{5}} - \sqrt{29-12\sqrt{5}}$

Lời giải

a) Ta có: $A = \sqrt{(4 - \sqrt{15})^2} + \sqrt{15} = |4 - \sqrt{15}| + \sqrt{15} = 4 + \sqrt{15} \quad (4 > \sqrt{15})$

b) Ta có: $B = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| + |1 + \sqrt{3}| = 1$

c) Ta có: $C = \sqrt{49 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{49 + 12\sqrt{5}} = \sqrt{(2 - 3\sqrt{5})^2} - \sqrt{(2 + 3\sqrt{5})^2} \Rightarrow C = 4$

d) Ta có: $D = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} = \sqrt{(3 + 2\sqrt{5})^2} - \sqrt{(3 - 2\sqrt{5})^2} \Rightarrow D = 6$

Bài 5: Chứng minh rằng

a) $11 + 6\sqrt{2} = (3 + \sqrt{2})^2$

b) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 6$

c) $8 - 2\sqrt{7} = (\sqrt{7} - 1)^2$

d) $\sqrt{8 - 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = -2$

Lời giải

a) Ta có: $VT = 11 + 6\sqrt{2} = 9 + 2 \cdot 3\sqrt{2} + 2 = (\sqrt{3} + 2)^2 = VP \Rightarrow$ đpcm

b) Ta có: $VT = \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = |\sqrt{2} + 3| + |\sqrt{2} - 3| = 6 = VP \Rightarrow$ đpcm

c) Ta có: $8 - 2\sqrt{7} = 7 - 2\sqrt{7} + 1 = (\sqrt{7} - 1)^2 \Rightarrow$ đpcm

d) Ta có: $VT = \sqrt{8 - 2\sqrt{7}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{7}} = \sqrt{(\sqrt{7} - 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{7} + 1)^2} = -2 = VP \Rightarrow$

Dạng 3: Rút gọn các biểu thức chứa biến

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A, (A \geq 0) \\ -A, (A < 0) \end{cases}$$

Cách giải: Sử dụng hằng đẳng thức:

Bài 1: Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{64a^2} + 2a \quad (a \geq 0)$

b) $B = 5\sqrt{25a^2} - 25a \quad (a < 0)$

c) $\sqrt{16a^4} + 6a^2$ (với a bất kỳ)

d) $3\sqrt{9a^6} - 6a^3$ (với a bất kỳ)

e) $E = \sqrt{a^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 6a + 9}$ (với a bất kỳ)

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{64a^2} + 2a (a \geq 0) = |8a| + 2a = 10a \Rightarrow A = 10a$

b) Ta có: $5\sqrt{25a^2} - 25a (a < 0) = 5 \cdot |5a| - 25a = -50a \Rightarrow B = -50a$

c) Ta có: $\sqrt{16a^4} + 6a^2 = |4a^2| + 6a^2 = 10a^2 \Rightarrow C = 10a^2$ (với a bất kỳ)

d) Ta có: $3\sqrt{9a^6} - 6a^3 = 3|3a^3| - 6a^3$ (với a bất kỳ)

+) $a < 0 \Rightarrow 3|3a^3| - 6a^3 = 3 \cdot (-3a^3) - 6a^3 = -15a^3$

+) $a \geq 0 \Rightarrow 3|3a^3| - 6a^3 = 9a^3 - 6a^3 = 3a^3$

e. (khó)

$A = \sqrt{a^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 6a + 9}$ với a bất kỳ

$A = \sqrt{a^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 6a + 9} = |a + 3| + |a - 3|$

+) Nếu $a < -3 \Rightarrow |a + 3| + |a - 3| = -a - 3 + 3 - a = -2a$

+) Nếu $-3 \leq a \leq 3$ thì $|a + 3| + |a - 3| = a + 3 + 3 - a = 6$

+) Nếu $a > 3$ thì $|a + 3| + |a - 3| = a + 3 + a - 3 = 2a$

Bài 2: Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = 4\sqrt{x} - \frac{(x + 6\sqrt{x} + 9)(\sqrt{x} - 3)}{x - 9} (0 \leq x; x \neq 9)$

b) $B = \frac{\sqrt{9x^2 + 12x + 4}}{3x + 2} \left(x \neq -\frac{2}{3} \right)$

Lời giải

a) Ta có: $A = 4\sqrt{x} - \frac{(\sqrt{x} + 3)^2(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \Rightarrow A = 3(\sqrt{x} - 1) (0 \leq x \neq 9)$

b) Ta có: $B = \frac{\sqrt{9x^2 + 12x + 4}}{3x + 2} = \frac{|3x + 2|}{3x + 2} = \begin{cases} 1 & x > -\frac{2}{3} \\ -1 & x < -\frac{2}{3} \end{cases}$

Bài 3: Thực hiện các phép tính

$$a) A = 5\sqrt{x} - \frac{(x - 10\sqrt{x} + 25)(\sqrt{x} + 5)}{x - 25} \quad (0 \leq x \neq 25)$$

$$b) B = \frac{\sqrt{4x^2 - 4x + 1}}{2x - 1} \left(x \neq \frac{1}{2} \right)$$

Lời giải

a) Ta có: $A = 4\sqrt{x} + 5 \quad (0 \leq x \neq 25)$

$$B = \frac{\sqrt{4x^2 - 4x + 1}}{2x - 1} = \begin{cases} 1 & x > \frac{1}{2} \\ -1 & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

b) Ta có:

Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau

$$a) A = \sqrt{a + 2\sqrt{a - 1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a - 1}} \quad (1 \leq a \leq 2)$$

$$b) B = 4x - \sqrt{x^2 - 4x + 4} \quad (x \geq 2)$$

$$c) C = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} \quad (x \neq -2)$$

$$d) D = 2x - 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5}$$

$$e) E = 4\sqrt{x} - \frac{(x + 6\sqrt{x} + 9)(\sqrt{x} - 3)}{x - 9} \quad (0 \leq x \neq 9)$$

Lời giải

a) Ta có: $A = \sqrt{a + 2\sqrt{a - 1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a - 1}} \quad (1 \leq a \leq 2) = |\sqrt{a - 1} + 1| + |\sqrt{a - 1} - 1|$

Với $1 \leq a \leq 2 \Rightarrow \sqrt{a - 1} + 1 > 0; \sqrt{a - 1} - 1 \leq 0$, ta được:

$$A = |\sqrt{a - 1} + 1| + |\sqrt{a - 1} - 1| = \sqrt{a - 1} + 1 - \sqrt{a - 1} + 1 = 2$$

b) Ta có: $B = 4x - \sqrt{x^2 - 4x + 4} \quad (x \geq 2) = 4x - |x - 2| = 4x - (x - 2) = 3x + 2$

c) Ta có: $C = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} \quad (x \neq -2) = \frac{|x + 2|}{x + 2}$

- Nếu $x < -2$ thì $A = -1$

- Nếu $x > -2$ thì $A = 1$

d) Ta có: $D = 2x - 1 - \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5} = 2x - 1 - \frac{|x - 5|}{x - 5}$

+) Nếu $x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 5 \Rightarrow A = 2x - 1 + 1 = 2x$

+) Nếu $x \geq 5 \Rightarrow A = 2x - 2$

e) Ta có:
$$E = 4\sqrt{x} - \frac{(x+6\sqrt{x}+9)(\sqrt{x}-3)}{x-9} \quad (0 \leq x \neq 9)$$

$$\Rightarrow E = 4\sqrt{x} - \frac{(x+6\sqrt{x}+9)(\sqrt{x}-3)}{x-9} = 4\sqrt{x} - \frac{(\sqrt{x}+3)^2(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = 3(\sqrt{x}-1) \quad (0 \leq x \neq 9)$$

Bài 5:

Cho biểu thức: $A = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}} - \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}}$

a. Với giá trị nào của x thì A có nghĩa

b. Tính A nếu $x \geq \sqrt{2}$

Lời giải

a) Ta có:

$$A = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{x^2 - 1}} - \sqrt{x^2 - 2\sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{(\sqrt{x^2 - 1} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{x^2 - 1} - 1)^2} = |\sqrt{x^2 - 1} + 1| + |\sqrt{x^2 - 1} - 1|$$

$$A \text{ có nghĩa} \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

b) Ta có:

$$x \geq \sqrt{2} \Rightarrow x^2 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} - 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{x^2 - 1} + 1 + \sqrt{x^2 - 1} - 1 = 2\sqrt{x^2 - 1}$$

Bài 6:

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn: $xy + yz + zx = 1$

Tính:
$$A = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 1+y^2 = (xy + yz + zx) + y^2 = (x+y)(y+z); 1+z^2 = (y+z)(z+x); 1+x^2 = (x+z)(x+y)$$

$$\Rightarrow A = x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) = 2(xy + yz + zx) = 2$$

Vậy $A=2$.

Dạng 4: giải phương trình

Cách giải: Chú ý một số cách biến đổi tương đương liên quan đến căn thức bậc hai

$$1) \quad \sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{1-x^2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x^2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 1-x^2 = x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x=0(\text{loại}) \\ x=1(t/m) \end{cases}$$

$$2) \quad \sqrt{A^2} = B \Leftrightarrow |A| = B$$

$$3) \quad \sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0(\text{hay } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$$

$$4) \quad \sqrt{A^2} = \sqrt{B^2} \Leftrightarrow |A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$$

$$5) \quad A^2 = B^2 \Leftrightarrow A = \pm B$$

$$(x-1)^2 = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = x \\ x-1 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=1(vn) \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ví dụ: (thỏa mãn)

$$7) \quad |A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \\ A = -B \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}} = 2x \Leftrightarrow \left| x + \frac{1}{2} \right| = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ x + \frac{1}{2} = 2x \\ x + \frac{1}{2} = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{1}{2}(t/m) \\ x = -\frac{1}{6}(\text{loại}) \end{cases}$$

Ví dụ:

$$8) \quad |A| = |B| \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ A = -B \end{cases}$$

Ví dụ: $|3x+1|=|x+3| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1=x+3 \\ 3x+1=-x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

9) $|A|+|B|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$

Ví dụ: $|x+5|+|x^2-25|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ x=5 \\ x=-5 \end{cases} \Leftrightarrow x=-5$

10) $\sqrt{A}+\sqrt{B}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$

Bài 1: Giải các phương trình sau

a. $\sqrt{x^2-2x+4}=2x-2$

b. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=2$

c. $\sqrt{2x^2-2x+1}=2x-1$

d. $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}=2$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{x^2-2x+4}=2x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 \geq 0 \\ x^2-2x+4=(2x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-2x+4=4x^2-8x+4 \end{cases} \Rightarrow x=2$

b) **Cách 1:** Ta có: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=2 \Leftrightarrow x+2\sqrt{x-1}=2^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=4-x \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 4(x-1)=(4-x)^2 \end{cases} \Rightarrow x=2$

Cách 2: Ta có $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}=2 \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1|=2 \Rightarrow x=2$

c) Ta có: $\sqrt{2x^2-2x+1}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2x^2-2x+1=(2x-1)^2 \end{cases} \Rightarrow x=1$

d) Ta có: Điều kiện $\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ x+4\sqrt{x-4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 4$

$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}=2 \Leftrightarrow x+4\sqrt{x-4}-4=0 \Leftrightarrow (x-4)+2\sqrt{x-4} \cdot 2+4=4 \Leftrightarrow (\sqrt{x-4}-2)^2=2^2 \Rightarrow x=4$

Bài 2: Giải các phương trình sau

a. $\sqrt{x^2-3x+2}=\sqrt{x-1}$

b. $\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{4x^2-12x+9}$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 3x + 2 = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

b) Ta có: $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{4x^2 - 12x + 9} \Leftrightarrow |x - 2| = |2x - 3| \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$

Bài 3: Giải các phương trình sau

a. $\sqrt{(x - 3)^2} = 3 - x$

b. $\sqrt{4x^2 - 20x + 25} + 2x = 5$

c. $\sqrt{(3 - 2x)^2} = 4$

d. $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} = 2 (x \geq 1)$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{(x - 3)^2} = 3 - x \Leftrightarrow |x - 3| = 3 - x \Leftrightarrow x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$

b) Ta có: $\sqrt{4x^2 - 20x + 25} + 2x = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(5 - 2x)^2} = 5 - 2x \Leftrightarrow |5 - 2x| = 5 - 2x \Leftrightarrow 5 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{2}$

c) Ta có: $\sqrt{(3 - 2x)^2} = 4 \Leftrightarrow |3 - 2x| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x = 4 \\ 3 - 2x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1,5 \\ x = -3,5 \end{cases}$

d) Ta có: $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} = 2 (x \geq 1) \Leftrightarrow \sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x - 1} + 1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x - 1} + 1)^2} = 2 \Leftrightarrow |\sqrt{x - 1} + 1| = 2$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x - 1} = 3 \\ \sqrt{x - 1} = -1 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = 10$

Bài 4: Giải các phương trình sau

a. $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$

b. $\sqrt{2x^2 - 3} = \sqrt{4x - 3}$

c. $\sqrt{1 - x^2} = x - 1$

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x - 1)^2} + \sqrt{(x - 3)^2} = 1 \Leftrightarrow |x - 1| + |x - 3| = 1$

+) Với $x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0; x - 3 < 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 1 - x + 3 - x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ (loại)

+) Với $1 \leq x \leq 3 \Rightarrow x - 1 \geq 0; x - 3 \leq 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x - 1 + 3 - x = 1 \Leftrightarrow 0x = -1$ (loại)

+) Với $x > 3 \Rightarrow x - 1 > 0; x - 3 > 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x - 1 + x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \text{ (loại)}$

Vậy phương trình vô nghiệm

$$\sqrt{2x^2 - 3} = \sqrt{4x - 3} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3 \geq 0 \\ 2x^2 - 3 = 4x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{4} \\ x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 2 \text{ (tm)} \end{cases}$$

b) Ta có:

$$\sqrt{1 - x^2} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 = (x^2 - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{2} \text{ (t/m)} \end{cases} \Rightarrow x \in \{\pm 1; \pm \sqrt{2}\}$$

c) Ta có:

Bài 5: Giải các phương trình sau

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x^2 - 1$$

b. $|x^2 - 3| = |x - \sqrt{3}|$

a.

$$\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 0$$

c.

d. (Khó). $\sqrt{3x^2 - 18x + 28} + \sqrt{4x^2 - 24x + 45} = -5 - x^2 + 6x$

Lời giải

a) Ta có:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x^2 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = x^2 - 1 \Leftrightarrow |x-1| = x^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x-1 = x^2 - 1 \\ x-1 = -(x^2 - 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x^2 - x = 0 \\ (x-1)(x+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \\ x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 1 \text{ (t/m)} \\ x = -2 \text{ (t/m)} \end{cases} \Rightarrow x \in \{1; -2\}$$

b) Ta có:

$$|x^2 - 3| = |x - \sqrt{3}| \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = x - \sqrt{3} \\ x^2 - 3 = -(x - \sqrt{3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) - (x - \sqrt{3}) = 0 \\ (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) + (x - \sqrt{3}) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{3} = 0 \\ x + \sqrt{3} - 1 = 0 \\ x - \sqrt{3} = 0 \\ x + \sqrt{3} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \Leftrightarrow x = -2 \\ x = -2 \end{cases}$$

c) Ta có:

d. (Khó)

$$\text{Ta có: } \sqrt{3x^2 - 18x + 28} + \sqrt{4x^2 - 24x + 45} = -5 - x^2 + 6x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3(x-3)^2 + 1} + \sqrt{4(x-3)^2 + 9} = 4 - (x-3)^2 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } VT(1) \geq 4; VP \leq 4$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm khi hai vế đều bằng 4} \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\text{Vậy } x = 3.$$

Dạng 5: Tìm GTLN, GTNN của biểu thức

Cách giải: Áp dụng bất đẳng thức: $|A| + |B| \geq |A + B|$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow AB \geq 0$$

Bài 1: Tìm GTNN của các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

b) $B = |2x - 1| + |3 - 2x|$

c) $C = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + \sqrt{4x^2 - 12x + 9}$

d) $\sqrt{49x^2 - 42x + 9} + \sqrt{49x^2 + 42x + 9}$

Lời giải

a) Ta có: $A = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} \Leftrightarrow A = |x + 1| + |x - 1|$

Cách 1:

+) Nếu $x < -1 \Rightarrow A = -x - 1 - x + 1 = -2x > 2(1)$

+) Nếu $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow A = x + 1 - x + 1 = 2(2)$

+) Nếu $x > 1 \Rightarrow A = x + 1 + x - 1 = 2x > 2(3)$

Từ (1)(2)(3) $\Rightarrow \text{Min}A = 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

Cách 2: Áp dụng bất đẳng thức $|A| + |B| \geq |A + B|$

$$A = |x + 1| + |x - 1| = |x + 1| + |1 - x| \geq |x + 1 + 1 - x| = 2$$

Vậy $\text{Min}A = 2 \Leftrightarrow (x + 1)(1 - x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

b) Ta có: $B = |2x - 1| + |3 - 2x| \Rightarrow \text{Min}B = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$

c) Ta có: $C = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + \sqrt{4x^2 - 12x + 9} = |2x - 1| + |3 - 2x| \geq |(2x - 1) + (3 - 2x)| = 2$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)(3 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

d) Ta có: $D_{\min} = 6 \Leftrightarrow \frac{-3}{7} \leq x \leq \frac{3}{7}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây sai

a. $\sqrt{3x}$ xác định khi $x \geq 0$

b. $\sqrt{-9x}$ xác định khi $x \leq 0$

c. $\sqrt{\frac{x-5}{3}}$ xác định khi $x \geq 5$

d. $\sqrt{\frac{-4}{x-9}}$ xác định khi $x > 7$

Lời giải

Chọn đáp án D

Giải thích:

A) $\sqrt{3x}$ xác định $\Leftrightarrow 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

B) $\sqrt{-9x}$ xác định $\Leftrightarrow -9x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

C) $\sqrt{\frac{x-5}{3}}$ xác định $\Leftrightarrow \frac{x-5}{3} \geq 0 \Leftrightarrow x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5$

D) $\sqrt{\frac{-4}{x-9}}$ xác định $\Leftrightarrow \frac{-4}{x-9} > 0 \Leftrightarrow x-9 < 0 \Leftrightarrow x < 9$

Câu 2: Điền vào chỗ (...) để được khẳng định đúng

a) Điều kiện xác định của $\sqrt{3xy^2}$ là...

b) Điều kiện xác định của $\sqrt{5-4x}$ là...

c) Điều kiện xác định của $\sqrt{x^2 - 81}$ là... d) Điều kiện xác định của $\sqrt{\frac{5y-1}{4x^2}}$ là...

Lời giải

A) Điều kiện xác định của $\sqrt{3xy^2}$ là: $x \leq 0$

B) Điều kiện xác định của $\sqrt{5-4x}$ là: $x \leq \frac{5}{4}$

C) Điều kiện xác định của $\sqrt{x^2 - 81}$ là: $x \leq -9$ hoặc $x \geq 9$

D) Điều kiện xác định của $\sqrt{\frac{5y-1}{4x^2}}$ là: $y \geq \frac{1}{5}$ và $x \neq 0$

Câu 3: Điều kiện xác định của $\sqrt{\frac{a^2+1}{a^3}}$ là:

a) $a \geq 0$

b) $a \leq 0$

c) $a > 0$

d) $a > -1$

Lời giải

Chọn đáp án C

Điều kiện xác định của $\sqrt{\frac{a^2+1}{a^3}}$ là $\frac{a^2+1}{a^3} \geq 0 \Leftrightarrow a^3 > 0 \Leftrightarrow a > 0$ (vì $a^2+1 > 0$)

Câu 4: Biểu thức $\sqrt{(-6)^2} \cdot \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2} \cdot |-3|$ có giá trị đúng là số nào ?

a) 3

b) -3

c) $2\sqrt{3}$

d) $-2\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn đáp án B

Giải thích: Ta có $\sqrt{(-6)^2} \cdot \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(2\sqrt{3}-1)^2} \cdot |-3| = |-6| \cdot |1-\sqrt{3}| - 3(2\sqrt{3}-1)$ (do $\sqrt{3} > 1$ và $2\sqrt{3} > 1$) $= 6\sqrt{3} - 6 - 6\sqrt{3} + 3 = -3$

Câu 5: $\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$ có kết quả rút gọn là số nào ?

- | | |
|------------------|-----------------|
| a) 2 | b) 1 |
| c) $-2\sqrt{10}$ | d) $2\sqrt{10}$ |

Lời giải

Chọn đáp án B

Giải thích: Ta có $\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} - \sqrt{5} = |2-\sqrt{5}| - \sqrt{5} = \sqrt{5} - 2 - \sqrt{5} = -2$
(do $2 < \sqrt{5}$)

Câu 6: Rút gọn $\sqrt{19-6\sqrt{10}} + \sqrt{26-8\sqrt{10}}$ ta được số nào ?

- | | |
|------------------|-----------------|
| a) -1 | b) 1 |
| c) $-2\sqrt{10}$ | d) $2\sqrt{10}$ |

Lời giải

Chọn đáp án B

Giải thích: Ta có $\sqrt{19-6\sqrt{10}} + \sqrt{26-8\sqrt{10}} = \sqrt{(3-\sqrt{10})^2} + \sqrt{(\sqrt{10}-4)^2} = |3-\sqrt{10}| + |\sqrt{10}-4|$
 $= \sqrt{10} - 3 + 4 - \sqrt{10} = 1$

Câu 7: Nếu $x > \frac{3}{2}$ thì phương trình $\sqrt{9-12x+4x^2} = 5-3x$ có nghiệm là số nào?

- | | |
|------------|------------|
| a) $x=1,6$ | b) $x=1,7$ |
| c) $x=1,8$ | d) $x=1,9$ |

Lời giải

Chọn đáp án A

Giải thích: Ta có $\sqrt{9-12x+4x^2} = 5-3x \Leftrightarrow \sqrt{(3-2x)^2} = 5-3x \Leftrightarrow |3-2x| = 5-3x$

Vì $x > \frac{3}{2} \Rightarrow 3x - 2 > 0$, nên ta có: $|3 - 2x| = 5 - 3x \Leftrightarrow 2x - 3 = 5 - 3x \Leftrightarrow x = \frac{8}{5} = 1,6$ (thỏa mãn).

Câu 8: Với điều kiện $x < \frac{2}{\sqrt{10}}$, phương trình $\sqrt{4 - 4\sqrt{10}x + 10x^2} = 3 - 2\sqrt{10}x$ có nghiệm là số nào?

a) $x = \frac{1}{2\sqrt{10}}$

b) $x = \frac{1}{\sqrt{10}}$

c) $x = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

d) Một kết quả khác

Lời giải

Chọn đáp án B

Giải thích: Ta có

$$\sqrt{4 - 4\sqrt{10}x + 10x^2} = 3 - 2\sqrt{10}x \Leftrightarrow \sqrt{(2 - \sqrt{10}x)^2} = 3 - 2\sqrt{10}x \Leftrightarrow |2 - \sqrt{10}x| = 3 - 2\sqrt{10}x$$

Vì $x < \frac{2}{\sqrt{10}} \Rightarrow 2 - \sqrt{10}x > 0 \Rightarrow |2 - \sqrt{10}x| = 3 - 2\sqrt{10}x \Leftrightarrow 2 - \sqrt{10}x = 3 - 2\sqrt{10}x \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{10}}$ (thỏa mãn)

Câu 9: Giá trị của biểu thức $A = \sqrt{4a^2 - 4a + 1} + 2a + 5$ bằng số nào khi $a = \frac{3}{2}$

a) 6

b) 8

c) 10

d) 12

Lời giải

Chọn đáp án C

Giải thích: Ta có $A = \sqrt{4a^2 - 4a + 1} + 2a + 5 = \sqrt{(2a - 1)^2} + 2a + 5 = |2a - 1| + 2a + 5$

Khi $a = \frac{3}{2} \Rightarrow A = \left| 2 \cdot \frac{3}{2} - 1 \right| + 2 \cdot \frac{3}{2} + 5 = |3 - 1| + 3 + 5 = 2 + 3 + 5 = 10$

Câu 10: Trong các kết luận sau, kết luận nào sai

a) Biểu thức $y = \sqrt{x^2 + 4}$ luôn có nghĩa với mọi giá trị của x

b) Biểu thức $y = \sqrt{9 - x^2}$ luôn có nghĩa với mọi giá trị của x

- c) Biểu thức $y = \sqrt{\frac{1}{2x^2 - 2\sqrt{2} + 1}}$ luôn có nghĩa với mọi giá trị của $x \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$
- d) Biểu thức $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}$ có nghĩa khi $-3 \leq x \leq 3$

Lời giải

Chọn đáp án D

Giải thích:

- A) $y = \sqrt{x^2 + 4}$ có nghĩa khi $x^2 + 4 \geq 0$ (luôn đúng)
- B) $y = \sqrt{9 - x^2}$ có nghĩa khi $9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow |x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$
- C) $y = \sqrt{\frac{1}{2x^2 - 2\sqrt{2} + 1}} = \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{2}x - 1)^2}}$ có nghĩa khi $\sqrt{2}x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$
- D) $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{\frac{x-3}{x+3}}$ có nghĩa khi $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ \frac{x-3}{x+3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3$

BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Với mỗi giá trị nào của x thì mỗi căn thức sau có nghĩa

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| a) $\sqrt{\frac{2}{3x-5}}$ | b) $\sqrt{-3x}$ | c) $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$ |
| d) $\sqrt{x^2+2}$ | e) $\sqrt{\frac{3}{x^2+1}}$ | f) $\sqrt{2x-1}$ |
| g) $\sqrt{-x^2+2x-1}$ | h) $\sqrt{- x+1 }$ | i) $\sqrt{-x^2-3}$ |

Hướng dẫn giải

- a) $\sqrt{\frac{2}{3x-5}}$ có nghĩa khi $\frac{2}{3x-5} > 0 \Leftrightarrow 3x-5 > 0 \Leftrightarrow 3x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$
- b) $\sqrt{-3x}$ có nghĩa khi $-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

c) $\sqrt{\frac{1}{3-2x}}$ có nghĩa khi $\frac{1}{3-2x} > 0 \Leftrightarrow 3-2x > 0 \Leftrightarrow 3 > 2x \Leftrightarrow \frac{3}{2} > x \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$

d) $\sqrt{x^2+2}$ có nghĩa khi $x^2+2 \geq 0$ (luôn đúng)

e) Do $\begin{cases} 3 > 0 \\ x^2+1 \geq 1 > 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{x^2+1}}$ có nghĩa với mọi $x \in \mathbb{R}$

f) $\sqrt{2x-1}$ có nghĩa khi $2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

g) Ta có: $-x^2+2x-1 = -(x^2-2x+1) = -(x-1)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, nên $\sqrt{-x^2+2x-1}$ có nghĩa khi $-(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

h) Ta có $|x+1| \geq 0 \Leftrightarrow -|x+1| \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{-|x+1|}$ có nghĩa khi $-|x+1| = 0 \Leftrightarrow x = -1$

i) Ta có $-x^2-3 = -(x^2+3)$, do $x^2+3 \geq 3 > 0 \Rightarrow -(x^2+3) < 0$

Do đó không tồn tại x để $\sqrt{-x^2-3}$ có nghĩa.

Bài 2: Tính

a) $A = \sqrt{49} \cdot \sqrt{144} + \sqrt{256} : \sqrt{64}$

b) $B = 72 : \sqrt{2^2 \cdot 36 \cdot 3^2} - \sqrt{225}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $A = \sqrt{49} \cdot \sqrt{144} + \sqrt{256} : \sqrt{64} \Rightarrow A = 86$

b) Ta có: $B = 72 : \sqrt{2^2 \cdot 36 \cdot 3^2} - \sqrt{225} \Rightarrow B = -13$

Bài 3: Tính giá trị của biểu thức

a) $A = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}$

b) $B = \sqrt{(\sqrt{7}-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}$

c) $C = \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}}$

d) $D = \sqrt{17+12\sqrt{2}} + \sqrt{17-12\sqrt{2}}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $A = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2}-\sqrt{5})^2} \Rightarrow A = 2\sqrt{2} - 2$

b) Ta có: $B = \sqrt{(\sqrt{7}-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} \Rightarrow B = 3 - \sqrt{7}$

c) Ta có: $C = \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}} \Rightarrow C = 2\sqrt{2}$

d) Ta có: $D = \sqrt{17+12\sqrt{2}} + \sqrt{17-12\sqrt{2}} \Rightarrow D=6$

Bài 4: Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{64a^2} + 2a$

b) $B = 3\sqrt{9a^6} - 6a^3$

c) $C = (x-y) \sqrt{\frac{xy}{(x-y)^2}} \quad (xy > 0)$

d) $D = \sqrt{\frac{9-6x+x^2}{25y^2}}$

e) $E = \frac{3}{2(2x-1)} \sqrt{8x^4(4x^2-2x+1)}$

f) $F = \frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^2(1-4a+4a^2)}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $A = \sqrt{64a^2} + 2a \Rightarrow \begin{cases} A = 10(a \geq 0) \\ A = -6a(a < 0) \end{cases}$

b) Ta có: $B = 3\sqrt{9a^6} - 6a^3 \Rightarrow \begin{cases} B = -15a^3(a < 0) \\ B = 3a^3(a \geq 0) \end{cases}$

c) Biểu thức có nghĩa khi $xy \geq 0; x \neq y$

Ta có: $C = (x-y) \sqrt{\frac{xy}{(x-y)^2}} = (x-y) \cdot \frac{\sqrt{xy}}{|x-y|} = \begin{cases} \sqrt{xy} (x > y) \\ -\sqrt{xy} (x < y) \end{cases}$

d) Biểu thức có nghĩa khi $y \neq 0$

Ta có: $D = \sqrt{\frac{9-6x+x^2}{25y^2}} = \sqrt{\frac{(x-3)^2}{25y^2}} = \sqrt{\left(\frac{x-3}{5y}\right)^2} = \frac{x-3}{3y}$

$$= \begin{cases} \frac{x-3}{5y} \text{ khi } \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ y > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x-3 \leq 0 \\ y < 0 \end{cases} \\ \frac{3-x}{5y} \text{ khi } \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ y < 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x-3 \leq 0 \\ y > 0 \end{cases} \end{cases}$$

e) Ta có: $E = \frac{3}{2(2x-1)} \sqrt{8x^4(4x^2-2x+1)} = \frac{3}{2(2x-1)} \cdot \sqrt{2 \cdot (2x^2)^2 \cdot (2x-1)^2} = \frac{3}{2(2x-1)} \cdot 2x^2 \cdot |2x-1| \cdot \sqrt{2}$

$$= \frac{3\sqrt{2}x^2}{2x-1} \cdot |2x-1| = \begin{cases} 3\sqrt{2}x^2 \text{ khi } x > \frac{1}{2} \\ -3\sqrt{2}x^2 \text{ khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

f) Ta có:

$$F = \frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^2(1-4a+4a^2)} = \frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^4(1-4a+4a^2)} = \frac{2}{2a-1} \sqrt{5a^4(2a-1)^2} = \frac{2}{2a-1} \cdot 5a^2 |2a-1|$$

$$= \begin{cases} 10a^2 & \text{khi } a > \frac{1}{2} \\ -10a^2 & \text{khi } a < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài 5: Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = \sqrt{a^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 6a + 9} \quad (-3 \leq a \leq 3)$ b) $B = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}} \quad (1 \leq a \leq 2)$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $A = \sqrt{a^2 + 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 6a + 9} \quad (-3 \leq a \leq 3) = |a+3| + |a-3| = a+3+3-a = 6$

b) Ta có: $B = \sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}} \quad (1 \leq a \leq 2) = 2$

Bài 6: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x^2 + x} = x$ b) $\sqrt{1-x^2} = x-1$
 c) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x^2 - 1$ d) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = x-1$
 e) $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} = x-1$ f) $|x^2 - 1| + |x+1| = 0$
 g) $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x+1} = 0$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\sqrt{x^2 + x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

b) Ta có: $\sqrt{1-x^2} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 1-x^2 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x(x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x=0; x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

c) Ta có: $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x^2 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = x^2 - 1 \Leftrightarrow |x-1| = x^2 - 1 (*)$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - 1 = x^2 - 1 \\ x - 1 = 1 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x^2 - x = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x(x-1) = 0 \\ (x-1)(x+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Cách 1:

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B \\ A = -B \end{cases}$$

(*) **Nhận xét:** Ở cách này ta dùng phương pháp:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - 1 = x^2 - 1 \end{cases} \text{ hoặc } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x - 1 = 1 - x^2 \end{cases}$$

Cách 2:

Giải 2 trường hợp ra ta nhận được kết quả giống cách 1.

(*) **Nhận xét:** Ở cách này ta dùng phương pháp: $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases}$ hoặc $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A < 0 \\ A = -B \end{cases}$

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{(2x - 1)^2} = x - 1 \Leftrightarrow |2x - 1| = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 = x - 1 \\ 2x - 1 = 1 - x \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

d) Ta có:

$$\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} = x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x^2 - 1)^2} = x - 1 \Leftrightarrow |x^2 - 1| = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 1 = x - 1 \\ x^2 - 1 = 1 - x \end{cases}$$

e) Ta có:

$$|x^2 - 1| + |x + 1| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

f) Ta có:

$$\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x + 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

g) Ta có:

Bài 7: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 4 - x$

b) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3$

c) $\sqrt{2x - 2} + 2\sqrt{2x - 3} + \sqrt{2x + 13} + 8\sqrt{2x - 3} = 5$

d) $\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 0$

Hướng dẫn giải

a) Cách 1: $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 4 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ x^2 - 6x + 9 = (4 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$

Cách 2: $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 4 - x \Leftrightarrow |x - 3| = 4 - x \Rightarrow x = \frac{7}{2}$

b) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 3 \Leftrightarrow |x - 1| + |x - 2| = 3$

+ Nếu $1 < x < 2$, ta được: $x - 1 + 2 - x = 3 \Leftrightarrow 1 = 3$ (vô nghiệm)

+ Nếu $x > 2$, ta được: $x - 1 + x - 2 = 3 \Leftrightarrow x = 3$

+ Nếu $x < 1$, ta được: $1 - x + 2 - x = 3 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy $x = 0$ hoặc $x = 3$

c) Ta có: $\sqrt{2x - 2} + 2\sqrt{2x - 3} + \sqrt{2x + 13} + 8\sqrt{2x - 3} = 5 \Leftrightarrow |\sqrt{2x - 3} + 1| + |\sqrt{2x - 3} + 4| = 5 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

d) Ta có: $\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} = 0 \\ \sqrt{(x - 3)^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3$

Bài 8:

Tìm các số thực x, y, z thỏa mãn đẳng thức: $x + y + z + 8 = 2\sqrt{x - 1} + 4\sqrt{y - 2} + 6\sqrt{z - 3}$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có:

$$x + y + z + 8 = 2\sqrt{x - 1} + 4\sqrt{y - 2} + 6\sqrt{z - 3} \Leftrightarrow (\sqrt{x - 1} - 1)^2 + (\sqrt{y - 2} - 2)^2 + (\sqrt{z - 3} - 3)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2; y = 6; z = 12$$

Cách 2:

Ta có: $x = (x - 1) + 1 \geq 2\sqrt{x - 1}; y + 2 = (y - 2) + 4 \geq 4\sqrt{y - 2}; z + 6 = (z - 3) + 9 \geq 6\sqrt{z - 3}$

Vậy: $x = 2; y = 6; z = 12$.