

TUYỂN TẬP ĐỀ THI MÔN TOÁN THCS TỈNH HẢI DƯƠNG

hieuchuoi@

Tháng 7.2006

GIỚI THIỆU

Tuyển tập đề thi này gồm tất cả 10 đề thi tuyển sinh vào trường THPT chuyên Nguyễn Trãi – Tỉnh Hải Dương (môn Toán chuyên) và 10 đề thi học sinh giỏi cấp tỉnh Hải Dương. Phần cuối tuyển tập là 30 bài toán được chọn từ các đề thi khác. Cấu trúc tuyển tập như sau:

Phần I: Đề thi tuyển sinh vào lớp 10

Phần II: Đề thi học sinh giỏi cấp tỉnh

Phần III: Một số bài toán từ các đề thi khác

Xin chú thích thêm về các bài toán ở **Phần III**, đó là các bài toán được chọn từ các đề thi Toán không được giới thiệu toàn bộ trong tuyển tập này. Có nhiều bài toán khó, đề phân loại học sinh trong các cuộc thi, hoặc những bài toán đã được cải biên cho hay hơn, khó hơn.

Tuyển tập này không có lời giải, mọi vấn đề hỏi đáp, yêu cầu, góp ý xin xem tại <http://mathnfriend.net> → Toán cho học sinh THCS → Đề thi-Đáp án → Tuyển tập đề thi Tỉnh Hải Dương

Tuyển tập chắc chắn sẽ không tránh khỏi thiếu sót, mong các bạn thông cảm.

hieuchuoi@
Tháng 7.2006

PHẦN I
ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI
MÔN THI: TOÁN CHUYÊN

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI
NĂM HỌC 1997-1998
MÔN THI: TOÁN CHUYÊN – THỜI GIAN: 150 PHÚT

Câu I:

- 1) Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn: $\overline{ab} = (a-1)^2 + (b+1)^2$
- 2) Tìm các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn: $x^3 - 4y^3 - 2z^3 = 0$

Câu II:

- 1) Tính tổng

$$S = \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{1997^2} + \frac{1}{1998^2}}$$

- 2) Tính giá trị biểu thức A:

$$A = x^2 + \sqrt{x^2 + x + 1} \text{ với } x = \frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{8}} - \frac{1}{8}\sqrt{2}$$

Câu III:

Ba đường phân giác trong các góc A, B, C cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A_1, B_1, C_1 . Chứng minh rằng:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 > AB + BC + CA$$

Câu IV:

Cho hình bình hành $ABCD$, đường phân giác $\widehat{BAD}$ cắt cạnh BC và CD tại M và N .

- 1) Chứng minh rằng: Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác CBD .
- 2) Gọi K là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN và đường tròn ngoại tiếp tam giác CBD . Chứng minh rằng $\widehat{AKC} = 90^\circ$.

Câu V:

Chứng minh bất đẳng thức:

$$\left| \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{1997}} - \frac{1}{\sqrt{1998}} \right)^2$$

Trong đó $1997 \leq a, b, c \leq 1998$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI
NĂM HỌC 1998-1999
MÔN THI: TOÁN CHUYÊN - THỜI GIAN: 150 PHÚT

Câu I:

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy - y = 2 \\ yz - z = 2 \\ zx - x = 2 \end{cases}$$

Câu II:

Dãy số $a_1, a_2, \dots, a_n$ được cho theo quy luật sau:

$$a_1 = 1; a_2 = a_1 + \frac{1}{a_1}; \dots; a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$$

Chứng minh rằng $17 < a_{145} < 21$

Câu III:

Cho tam giác ABC không cân, BD và CE là hai đường phân giác trong của góc B và góc C cắt nhau tại I sao cho $ID = IE$

- 1) Tính độ lớn góc $\widehat{BAC}$.
- 2) Chứng minh đẳng thức

$$\frac{3}{AB + BC + CA} = \frac{1}{AB + BC} + \frac{1}{BC + CA}$$

Câu IV:

Cho tam giác ABC , M là một điểm bất kì nằm trong tam giác. AM , BM , CM lần lượt cắt các cạnh BC , CA , AB tại P , Q , R .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$\sqrt{\frac{AM}{MP}} + \sqrt{\frac{BM}{MQ}} + \sqrt{\frac{CM}{MR}}$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI
NĂM HỌC 1998-1999
MÔN THI: TOÁN CHUYÊN - THỜI GIAN: 150 PHÚT

Câu I:

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 - x + y - 6 = 0 \\ x^2 + xy - 2y^2 + 8x + 10y + 12 = 0 \end{cases}$$

Câu II:

Tìm các số nguyên k, m, n đôi một khác nhau và đồng thời khác 0 để đa thức $x(x-k)(x-m)(x-n)+1$ phân tích thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên.

Câu III:

Cho đường tròn tâm O và một điểm M nằm ngoài hình tròn. Qua M kẻ cát tuyến cắt đường tròn tại B, C ($MC > MB$) và tiếp tuyến MA (A là tiếp điểm).

- 1) Gọi E, F là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ B, C . Chứng minh rằng EF luôn song song với một đường thẳng cố định khi cát tuyến MBC thay đổi.
- 2) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên MO . Chứng minh rằng tứ giác $BHOC$ là tứ giác nội tiếp.
- 3) Tìm quỹ tích trọng tâm tam giác ABC khi cát tuyến MBC thay đổi.

Câu IV:

Cho đa giác lồi $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ có các góc ở đỉnh bằng nhau và độ dài các cạnh là những số nguyên. Người ta tô mỗi cạnh bằng một trong hai màu xanh hoặc đỏ.

Chứng minh rằng bao giờ cũng tồn tại cách tô màu sao cho tổng độ dài các cạnh màu xanh bằng tổng độ dài các cạnh màu đỏ.

Câu V:

Chứng minh bất đẳng thức:

$$\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{1}{n^2(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \text{ với } m, n \in \mathbb{N}^*$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI
NĂM HỌC 2000-2001
MÔN THI: TOÁN CHUYÊN - THỜI GIAN: 150 PHÚT

Câu I:

Tính giá trị của biểu thức:

$$\sqrt{1995.1997.1998.1999.2000.2001+36}$$

Câu II:

- 1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình:

$$|x-5y+2|+|y-4x-3|+|x+y+2|+|2x+3y+6|=7$$

- 2) Giải phương trình theo tham số m :

$$\sqrt{m-\sqrt{m-\sqrt{m-x}}}=x$$

- 3) Cho tứ giác lồi có diện tích bằng 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng các cạnh và hai đường chéo.

Câu III:

Chứng minh rằng với bất kì hai số a và b luôn tìm được các số x, y trong đó $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Thỏa mãn bất đẳng thức:

$$|xy-ax-by| \geq \frac{1}{3}$$

Có thể thay số $\frac{1}{3}$ ở bất đẳng thức trên bằng hằng số c khác với $c > \frac{1}{3}$ được không?

Câu IV:

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O , hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I . Gọi O_1 là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI , O_2 là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác CDI .

- 1) Chứng minh tứ giác O_1OO_2I là hình bình hành.
- 2) Một đường thẳng qua I cắt đường tròn tâm O tại M, N , cắt đường tròn tâm O_1 và tâm O_2 thứ tự tại P, Q . Chứng minh rằng $PM=QN$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI
NĂM HỌC 2001-2002
MÔN THI: TOÁN CHUYÊN -THỜI GIAN: 150 PHÚT

Câu I:

Chứng minh rằng biểu thức:

$$A = \left(\left| \sqrt{xy} + \frac{x+y}{2} \right| - |x| \right) + \left(\left| \sqrt{xy} - \frac{x+y}{2} \right| - |y| \right)$$

Không phụ thuộc vào x và y .

Câu II:

1) Giải phương trình

$$(x^2 - 1)^2 - 4(x - 1)^2 = 12(x + 1)^2$$

2) Xác định các giá trị của m để phương trình:

$$\left| \frac{x^2 - 4mx + 4m^2 + 1}{x - 2m} \right| + x^2 - 6x + 7 = 0$$

Có một nghiệm duy nhất.

Câu III:

1) Cho hai đường tròn tâm O_1 và O_2 tiếp xúc trong tại M (đường tròn tâm O_2 nằm trong), N là một điểm nằm trên (O_2) (N khác M), qua N kẻ một tiếp tuyến với (O_2) cắt (O_1) tại A và B . Đường thẳng MN cắt (O_1) tại E . Gọi I là tiếp điểm của tiếp tuyến với (O_2) kẻ từ E . Đường thẳng EI cắt đường tròn (O_1) tại C .

Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

2) Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác và r, R lần lượt là độ dài bán kính đường tròn nội, ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \sqrt{\frac{3}{2Rr}}$$

Câu IV:

Cho n là số tự nhiên lẻ và n có thể biểu diễn không ít hơn hai cách là tổng của hai số chính phương. Chứng minh rằng n là hợp số.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI
NĂM HỌC 2002-2003
MÔN THI: TOÁN CHUYÊN - THỜI GIAN: 150 PHÚT

Bài I:

Cho đa thức $f(x)$ có bậc 2000 thỏa mãn điều kiện $f(n) = \frac{1}{n}$ với $n = 1, 2, 3, \dots, 2001$. Tính giá trị $f(2002)$.

Bài II:

1) Giải phương trình $8\sqrt{x^3 + 1} = 3(x^2 - 2x)$

2) Cho ba số $k, m, n \in \mathbb{N}^*$ đồng thời thỏa mãn $\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$

Xác định số hữu tỉ q nhỏ nhất sao cho $\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq q$.

Bài III:

1) Cho tam giác nhọn ABC có $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và nội tiếp trong đường tròn tâm O . Gọi H là trực tâm tam giác đó.

Chứng minh rằng $OH = |AB - AC|$

2) Cho tam giác đều ABC và một đường tròn có bán kính bằng cạnh của tam giác đều đó đồng thời đi qua hai đỉnh B và C sao cho đỉnh A nằm ngoài đường tròn, M là điểm trên đường tròn (M không trùng với B và C). Chứng minh rằng MA, MB, MC là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

Bài IV:

1) Cho dãy số tự nhiên được viết theo quy luật sau:

$$u_1 = 14; u_2 = 144; u_3 = 1444; \dots; u_n = 1444\dots 4 \text{ (có } n \text{ chữ số 4)}.$$

Tìm các số hạng của dãy là số chính phương.

2) Lấy các số nguyên từ 1 đến 9 xếp vào các ô của một hình vuông 3×3 ô (mỗi số chỉ lấy 1 lần) sao cho tổng mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo đều là bội của 9. Chứng minh rằng chữ số nằm ở ô của tâm hình vuông là bội của 3.

Hãy chỉ ra một cách xếp có số ở ô tâm là 6.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI
NĂM HỌC 2003-2004
MÔN THI: TOÁN CHUYÊN - THỜI GIAN: 150 PHÚT

Câu I:

Cho hai số dương a và b . Xét tập hợp T bao gồm các số có dạng

$$T = \{ax + by; x + y = 1; x > 0; y > 0\}$$

Chứng minh rằng các số $\frac{2ab}{a+b}$ và $\sqrt{ab}$ đều thuộc tập hợp T .

Câu II:

Cho tam giác ABC , D và E là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh AB và AC , đường phân giác của góc B cắt đường thẳng DE tại H .

Chứng minh tam giác BHC là tam giác vuông.

Câu III:

1) Giải hệ phương trình;

$$\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2) = 45 \\ (x-y)(x^2+y^2) = 85 \end{cases}$$

2) Tìm các số hữu tỉ a, b, c sao cho các số

$$a + \frac{1}{b}; b + \frac{1}{c}; c + \frac{1}{a} \text{ là các số nguyên dương.}$$

Câu IV:

Tìm đa thức $f(x)$ và $g(x)$ hệ số nguyên sao cho:

$$\frac{f(\sqrt{2} + \sqrt{7})}{g(\sqrt{2} + \sqrt{7})} = \sqrt{2}$$

Câu V:

Tìm số nguyên tố p để $4p^2 + 1$ và $6p^2 + 1$ đều là các số nguyên tố

Câu VI:

Cho phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2 ($x_1 \neq x_2$). Đặt

$$u_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} \quad (n \text{ là số tự nhiên}). \text{ Tìm giá trị } a \text{ và } b \text{ sao cho đẳng thức}$$

$u_{n+1}u_{n+2} - u_nu_{n+3} = (-1)^n$ đúng với mọi số tự nhiên n , từ đó suy ra
 $u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI
NĂM HỌC 2004-2005
MÔN THI: TOÁN CHUYÊN - THỜI GIAN: 150 PHÚT

Câu I:

Tìm giá trị của a để phương trình:

$$a^4x - a^3 + (1 - \sqrt{3})a^2 + (3 + \sqrt{3})a = 3(3x - \sqrt{3})$$

Có vô số nghiệm.

Câu II:

Tìm các số tự nhiên a, b, c ($a \leq b \leq c$) thỏa mãn đẳng thức:

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) = 2$$

Câu III:

Cho a, b, c là các số nguyên dương sao cho $\frac{a - b\sqrt{3}}{b - c\sqrt{3}}$ là số hữu tỉ.

- 1) Chứng minh rằng $b^2 = ac$
- 2) Với $b \neq 1$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2$ là hợp số.

Câu IV:

Cho hình bình hành $ABCD$, M là điểm nằm trong hình bình hành sao cho $\widehat{AMB} + \widehat{CMD} = 180^\circ$. Chứng minh rằng $\widehat{MAD} = \widehat{MCD}$.

Câu V:

Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), đường phân giác trong kẻ từ đỉnh B cắt cạnh AC tại D thỏa mãn $BC = BD + DA$.

- 1) Tính các góc của tam giác ABC .
- 2) Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = 3ab^2$ ($AB = AC = b; BC = a$).

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI
NĂM HỌC 2005-2006
MÔN THI: TOÁN CHUYÊN - THỜI GIAN: 150 PHÚT

Câu I:

Cho phương trình $x^2 - 5x + 3 = 0$.

Gọi hai nghiệm của phương trình là x_1, x_2 . Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \left| x_1 - 2 \right| - \sqrt{x_2 + 1}$$

Câu II:

1) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x+10} + \sqrt{y-6} = 4 \\ \sqrt{x-6} + \sqrt{y+10} = 4 \end{cases}$$

2) Cho phương trình $(x-1)(x-2)(x-3)(x-6) = (m^2 - 1)x^2$ (ẩn x)

Giả sử phương trình có bốn nghiệm là x_1, x_2, x_3, x_4 . Chứng minh giá trị của biểu thức $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$ không phụ thuộc vào m .

Câu III:

Cho tam giác ABC ($\widehat{BAC} \neq 90^\circ$) nội tiếp đường tròn tâm O , đường thẳng AB, AC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC tâm I lần lượt tại M và N . Gọi J là điểm đối xứng của I qua MN . Chứng minh rằng:

1) Tam giác AMC là tam giác cân.

2) AJ vuông góc với BC .

Câu IV:

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Gọi M, H, K theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ A đến CD, DB, BC . Chứng minh $HM = HK$ khi và chỉ khi các đường phân giác góc $\widehat{BAD}, \widehat{BCD}$ và BD đồng quy.

Câu V:

Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a \geq b \geq c; abc = 1$ và $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

Chứng minh rằng $a + b > ab + 1$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO THPT CHUYÊN NGUYỄN TRÃI
NĂM HỌC 2006-2007
MÔN THI: TOÁN CHUYÊN - THỜI GIAN: 150 PHÚT

Câu I:

Rút gọn biểu thức: $\sqrt{1+\frac{2}{3}}\sqrt{1+\frac{2}{4}}\sqrt{1+\frac{2}{5}}\dots\sqrt{1+\frac{2}{2005}}\sqrt{1+\frac{2}{2006}}$

Câu II:

1) Cho hai đa thức

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 7x^3 - 9x^2 + 8x - 2; g(x) = x^2 - 2x + a$$

Xác định giá trị của a để tồn tại đa thức $p(x)$ thỏa mãn:

$$f(x) = g(x)p(x) \text{ với mọi giá trị của } x.$$

2) Gọi α là nghiệm của đa thức $f(x) = x^3 - x^2 - 1$. Tìm đa thức $h(x)$ có hệ số nguyên nhận $\alpha^2 + 1$ làm nghiệm.

Câu III:

Cho phương trình $x^2 - 4x + 1 = 0$, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình.

$$\text{Đặt } a_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{2\sqrt{3}}; n = 1; 2; 3; \dots$$

Chứng minh rằng a_n là một số nguyên với mọi $n = 1; 2; 3; \dots$

Câu IV:

Cho tam giác nhọn ABC , gọi H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

1) Chứng minh rằng $AH=AO$ khi và chỉ khi $\widehat{BAC} = 60^\circ$

2) BD, CE là hai đường phân giác trong của góc B, C ($D \in AC, E \in AB$). M

là điểm trên BC sao cho tam giác MDE là tam giác đều.

Chứng minh rằng $AH=AO$.

Câu V:

Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn các điều kiện:

$$a < b < c; a + b + c = 6; ab + bc + ca = 9$$

Chứng minh rằng $0 < a < 1 < b < 3 < c < 4$

PHẦN 2
ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH MÔN TOÁN

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH MÔN TOÁN
NĂM HỌC 1996-1997 – THỜI GIAN 150 PHÚT

Câu I:

- 1) Cho $\frac{2x}{x^2 + 2x + 4} = -\frac{2}{3}$. Hãy tính $P = \frac{2x^2}{x^4 + 2x^2 + 4}$.
- 2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 5(x + y) + 2xy = -19 \\ 3xy + x + y = -35 \end{cases}$$

Câu II:

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- 1) Giả sử $f(x)$ có nghiệm x_1, x_2 . Kí hiệu $P(k) = x_1^k + x_2^k$.
Chứng minh rằng $aP(k+2) + bP(k+1) + cP(k) = 0$. Áp dụng để tính
$$R = \left(0,5 + \sqrt{1,25}\right)^9 + \left(0,5 - \sqrt{1,25}\right)^9.$$
- 2) Cho $0 \leq f(m) \leq 1$ với $m \in \{0; 1; 2\}$.
Chứng minh $f(x) \leq 1,125$ với mọi x thỏa mãn $1 \leq x \leq 2$.
- 3) Cho $a=1$, b và c là các số nguyên. Chứng minh có thể tìm được số tự nhiên n sao cho:
 $f(n+1); f(n+2); \dots; f(n+1996)$ đều là hợp số.

Câu III:

Cho các số hữu tỉ a, b, c thỏa mãn:

$$\begin{cases} abc = 1 \\ \frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{a^3} = \frac{b^3}{a} + \frac{a^3}{c} + \frac{c^3}{b} \end{cases}$$

Chứng minh rằng trong ba số $\sqrt[3]{a}; \sqrt[3]{b}; \sqrt[3]{c}$ có ít nhất một số là số hữu tỉ.

Câu IV:

Trên các cạnh AB, BC, CA theo thứ tự lấy F, D, E và dựng về phía ngoài tam giác ABC một tam giác ACK sao cho $\widehat{ACK} = \widehat{DFE}; \widehat{CAK} = \widehat{FDE}$. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF cắt AC tại M (nằm giữa C và E). Chứng minh rằng:

- 1) FM song song AK .
2) Tứ giác $DBFK$ và tam giác ABC có diện tích bằng nhau.

(còn tiếp ở trang sau)

Câu V:

Cho đường thẳng a cắt đường gấp khúc kín L tại 1997 điểm. Có tồn tại một đường thẳng cắt L tại không ít hơn 1998 điểm hay không?

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH MÔN TOÁN
NĂM HỌC 1997-1998 – THỜI GIAN 150 PHÚT

Câu I:

1) Giải và biện luận phương trình:

$$\frac{2m(m^2-1)}{x^2-m^2} + \frac{m-1}{m-x} = \frac{3m+1}{x+m} \quad (x \text{ là ẩn, } m \text{ là tham số})$$

2) Tìm các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^3 = b^3 + c^3 + 3abc \\ a^2 = 2(b+c) \end{cases}$$

Câu II:

Cho a, b là hai số dương

1) Chứng minh rằng $\frac{a}{a^4+b^2} + \frac{b}{b^4+a^2} \leq \frac{1}{ab}$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$

Câu III:

1) Cho tứ giác lồi $ABCD$, biết góc $\widehat{BAC} = 30^\circ; \widehat{ADB} = 50^\circ; \widehat{DCA} = 40^\circ; \widehat{CDB} = 60^\circ$; và $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} < 180^\circ$. Tính các góc của tứ giác $ABCD$.

2) Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Một góc 45° quay xung quanh đỉnh A và nằm bên trong hình vuông cắt cạnh BC, CD lần lượt ở M và N .

a) Chứng minh rằng $(BM + DN)a + BM \cdot DN = a^2$.

b) Đường thẳng AM cắt đường thẳng CD tại E . Chứng minh

$$\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{a^2}$$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH MÔN TOÁN
NĂM HỌC 1998-1999 – THỜI GIAN 150 PHÚT

Câu I:

1) Rút gọn: $\sqrt{7-\sqrt{48}} + \sqrt{5-\sqrt{24}} + \sqrt{3-\sqrt{8}}$

2) Cho a, b là hai số dương có tổng bằng $\sqrt{2}$

Chứng minh bất đẳng thức $\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \geq 9$

Câu II:

Cho phương trình $x^2 - 2|x| + 1 - 4a^2 = 0$ (x là ẩn số)

1) Giải phương trình khi $a = 1$.

2) Tìm a để phương trình có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 . Khi đó tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

Câu III:

1) Cho tứ giác ABCD, sao cho AB, CD kéo dài cắt nhau tại M; AD, BC kéo dài cắt nhau tại N, đường phân giác $\widehat{AMD}$ và $\widehat{CND}$ cắt nhau tại P. Chứng minh rằng: Nếu tứ giác ABCD nội tiếp thì tam giác MNP vuông. Điều ngược lại có đúng không?

2) Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$). Trên đường cao AH lấy điểm D và trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\widehat{EBC} = \widehat{ACD}$ và $\widehat{BEC} = \widehat{AED}$. Tính $\widehat{EBC}$.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH MÔN TOÁN
NĂM HỌC 1999-2000 – THỜI GIAN 150 PHÚT

Câu I:

Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}} \left(\sqrt{(1+a)^3} - \sqrt{(1-a)^3} \right)}{2 + \sqrt{1-a^2}}$ với $-1 \leq a \leq 1$

Câu II:

Cho hai số a và b nguyên. Chứng minh rằng phương trình $x^2 + 3ax - 3(b^2 + 1) = 0$ không có nghiệm nguyên.

Câu III:

Cho hai đường tròn tâm O_1 và tâm O_2 cắt nhau tại A và B , qua A kẻ cát tuyến bất kỳ cắt đường tròn tâm O_1 tại C và đường tròn tâm O_2 tại D .

- 1) Đường thẳng AO_2 cắt đường tròn tâm O_1 tại P , đường thẳng AO_1 cắt đường tròn tâm O_2 tại Q . Chứng minh rằng $\widehat{PCA} = \widehat{QDA}$.
- 2) Gọi M, N là điểm chính giữa cung CB và BD (không chứa A), K là trung điểm đoạn CD . Chứng minh rằng MK vuông góc với NK .

Câu IV:

Cho $\sqrt{2} - \frac{m}{n} > 0$ (m, n là các số tự nhiên khác 0). Chứng minh rằng

$$\sqrt{2} - \frac{m}{n} > \frac{1}{3mn}$$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH MÔN TOÁN
NĂM HỌC 2000-2001 – THỜI GIAN 150 PHÚT

Câu I:

- 1) Cho $\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) = 1$. Tính $x + y$.
- 2) Cho $\left(x + \sqrt{1+y^2}\right)\left(y + \sqrt{1+x^2}\right) = 1$. Chứng minh rằng $x + y = 0$.

Câu II:

- 1) Tìm số nguyên x để $2x^2 + 3x - 35 = p^2$ với p là số nguyên tố.
- 2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

Câu III:

Cho hai điểm C và D nằm trên nửa đường tròn tâm O đường kính AB (C nằm giữa A và D). Đường tròn qua 3 điểm A, C, O cắt đường tròn qua 3 điểm B, D, O tại N . Đường thẳng AD cắt đường thẳng BC ở I .

- 1) Chứng minh rằng bốn điểm A, B, I, N cùng nằm trên một đường tròn. Và bốn điểm C, D, I, N cũng nằm trên một đường tròn.
- 2) Chứng minh rằng tam giác ONI vuông.

Câu IV:

Cho hai số thực x và y . Chứng minh rằng luôn tồn tại một số hữu tỉ xen giữa hai số ấy.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH MÔN TOÁN
NĂM HỌC 2001-2002 – THỜI GIAN 150 PHÚT

Câu I:

Cho phương trình: $x^2 - (2m - 1)x + (m^2 - 2m - 1) = 0$

1) Tìm điều kiện của m để phương trình có hai nghiệm.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm đẳng thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m .

2) Tìm giá trị của m để $x_1^3 + x_2^3 = 36$.

Câu II:

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + x + y - 0,75} + \sqrt{y^2 + x + y - 0,75} + x + y = 4,5 \\ \sqrt{x^2 + x + y - 0,75} + \sqrt{y^2 + x + y - 0,75} - x - y = 1 \end{cases}$$

Câu III:

Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH ($H \in BC$). Gọi D là điểm đối xứng của A qua H. I là điểm trên HD. Qua I kẻ đường thẳng cắt cạnh AC tại M và CD kéo dài tại N sao cho $IM = IN$.

Chứng minh rằng tam giác BMN là tam giác cân

Câu IV:

Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $ab + bc + ca + abc = 4$.

Chứng minh rằng $a + b + c \geq ab + bc + ca$.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH MÔN TOÁN
NĂM HỌC 2002-2003 – THỜI GIAN 150 PHÚT

Câu I:

Tính giá trị của biểu thức $A = x^2 + 2002x - 2003$ với

$$x = \frac{(27 + 10\sqrt{2})\sqrt{27 - 10\sqrt{2}} - (27 - 10\sqrt{2})\sqrt{27 + 10\sqrt{2}}}{(\sqrt{\sqrt{13} - 3} + \sqrt{\sqrt{13} + 3}) : \sqrt{\sqrt{13} + 2}}$$

Câu II:

1) Cho phương trình $x^2 + (a - 4)x + a^2 - 3a + 3 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm

của phương trình. Tìm giá trị của a để $\frac{ax_1^2}{1 - x_1} + \frac{ax_2^2}{1 - x_2} = -\frac{8}{9}$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 = (x + 8)(x^2 + 2) \\ y^2 + 16(x + 1) = 5x^2 + (8 + 4x)y \end{cases}$$

Câu III:

Cho đa giác $ABCDE$ nội tiếp trong một đường tròn. Gọi M là giao điểm của AC và BD , N là giao điểm của AD và CE , các tam giác ABM , AMN , AEN , CDM , CDN có diện tích bằng nhau. Chứng minh rằng:

1) Tứ giác $CMND$ là hình thang cân

2) $AB^2 + AC \cdot AE = AD^2$

Câu IV:

Cho a, b, c là các số thực không âm và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh rằng $a + b + c \leq 2abc + \sqrt{2}$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH MÔN TOÁN
NĂM HỌC 2003-2004 – THỜI GIAN 150 PHÚT

Câu I :

Giải phương trình:

$$|xy - x - y + a| + |x^2y^2 + x^2y + xy^2 - 4b| = 0$$

$$a = (\sqrt{57} + 3\sqrt{6} + \sqrt{38} + 6)(\sqrt{57} - 3\sqrt{6} - \sqrt{38} + 6)$$

$$b = \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$$

Câu II:

Hai phương trình $x^2 + (a-1)x + 1 = 0$; $x^2 + (b+1)x + c = 0$ có nghiệm chung, đồng thời hai phương trình $x^2 + x + (a-1) = 0$; $x^2 + cx + (b+1) = 0$ cũng có nghiệm chung.

Tính giá trị của biểu thức $\frac{2004a}{b+c}$

Câu III:

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Đường thẳng O_1A cắt (O_2) tại D. Đường thẳng O_2A cắt (O_1) tại C. Qua A kẻ đường thẳng song song với CD cắt (O_1) tại M và cắt (O_2) tại N. Chứng minh rằng:

- 1) Năm điểm B, C, D, O_1, O_2 cùng nằm trên một đường tròn.
- 2) $BC + BD = MN$

Câu IV:

Tìm các số thực x và y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 3$ và $x + y$ là một số nguyên.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH MÔN TOÁN
NĂM HỌC 2004-2005 – THỜI GIAN 150 PHÚT

Câu I:

- 1) Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + 2004x + 1 = 0$ và x_3, x_4 là nghiệm của phương trình $x^2 + 2005x + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $(x_1 + x_3)(x_2 + x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)$
- 2) Cho a, b, c, d là các số thực và $a^2 + b^2 < 1$. Chứng minh rằng phương trình $(a^2 + b^2 - 1)x^2 - 2(ac + bd - 1)x + c^2 + d^2 - 1 = 0$ luôn có nghiệm.

Câu II:

Cho hai số tự nhiên m và n thỏa mãn $\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m}$ là số nguyên. Chứng minh rằng ước chung lớn nhất của m và n không lớn hơn $\sqrt{m+n}$.

Câu III:

Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A và B. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn gần B có tiếp điểm là C và D; $C \in (O_1); D \in (O_2)$. Qua A kẻ đường thẳng song song với CD, cắt (O_1) tại M và cắt (O_2) tại N. Đường thẳng BC, BD cắt đường thẳng MN tại P, Q. Đường thẳng CM và DN cắt nhau tại E. Chứng minh rằng:

- 1) Đường thẳng AE vuông góc với đường thẳng CD
- 2) Tam giác EPQ là tam giác cân

Câu IV:

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^5 + y^5 = 11 \end{cases}$$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH MÔN TOÁN
NĂM HỌC 2005-2006 – THỜI GIAN 150 PHÚT

Câu I:

Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{a^3 - 5a + (a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 9} + a^2 + 3}{a^3 - 5a + (a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 9} - a^2 - 3}$$

Câu II:

Chứng minh rằng $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$

Câu III:

1) Cho phương trình $3x^2 - (2p - 1)x + p^2 - 6p + 11 = 0$ (p là tham số)

Tìm các số hữu tỉ p để phương trình có ít nhất một nghiệm nguyên.

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (\sqrt{x} - 2y)\left(1 - \frac{1}{2y\sqrt{x}}\right) = 3 \\ (x + 4y^2)\left(1 + \frac{1}{4xy^2}\right) = 25 \end{cases}$$

Câu IV:

Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại A và B .

1) Một điểm M trên (O_1) , Qua M kẻ tiếp tuyến MD với (O_2) (D là tiếp điểm). Chứng minh rằng biểu thức $\frac{MD^2}{MA \cdot MB}$ không phụ thuộc vào vị trí của M trên (O_1) .

2) Kéo dài AB về phía B lấy điểm C . Từ C kẻ hai tiếp tuyến CE, CF với đường tròn (O_1) (E, F là các tiếp điểm và F nằm cùng phía với (O_2) bờ AB). Đường thẳng BE và BF cắt đường tròn (O_2) tại P và Q . Gọi I là trung điểm của PQ . Chứng minh rằng ba điểm E, F, I thẳng hàng.

PHẦN III
MỘT SỐ BÀI TOÁN TỪ CÁC ĐỀ THI KHÁC

Bài 1: Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$). M là điểm chuyển động trên cạnh đáy BC . Vẽ đường tròn thứ nhất đi qua M và tiếp xúc với AB tại B , đường tròn thứ hai đi qua M tiếp xúc với AC tại C . Hai đường tròn này cắt nhau tại D .

- 1) Chứng minh đường thẳng DM luôn đi qua 1 điểm cố định
- 2) Chứng minh tổng độ dài hai đường tròn trên không phụ thuộc vào vị trí của M .

(Đề thi tuyển sinh vào THPT Chuyên Nguyễn Trãi- năm 1997-1998 – Môn Toán cho các lớp chuyên KHTN – Đã cải biên)

Bài 2: Cho 1997 số thực $a_1, a_2, \dots, a_{1997}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{1997} = 0 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{1997}^2 = 1997 \end{cases}$$

Chứng minh rằng trong 1997 số đó bao giờ cũng tồn tại hai số có tích không vượt quá -1 .

(Đề thi tuyển sinh vào THPT Chuyên Nguyễn Trãi- năm 1997-1998 – Môn Toán cho các lớp chuyên KHTN)

Bài 3: Cho tam giác nhọn ABC . D là một điểm trên cạnh BC .

- 1) Gọi $O; O_1; O_2$ thứ tự làm tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC; ABD; ADC$. Chứng minh rằng OO_1O_2 là tam giác cân khi và chỉ khi AD là phân giác $\widehat{BAC}$.

- 2) Vẽ điểm D sao cho $\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \sqrt{2}$

(Đề thi tuyển sinh vào THPT Chuyên Nguyễn Trãi- năm 1998-1999 – Môn Toán cho các lớp chuyên KHTN- Đã cải biên)

Bài 4: Tìm các cặp số tự nhiên (x, y) thỏa mãn phương trình:

$$x^2 - 3xy - 2y^2 + 8 = 0$$

(Đề thi tuyển sinh vào THPT Chuyên Nguyễn Trãi- năm 1998-1999 – Môn Toán cho các lớp chuyên KHTN)

Bài 5: Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB , M là điểm chuyển động trên nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B lần lượt ở C và D . Đường thẳng OC cắt AM tại E và đường thẳng OD cắt BM tại F . Chứng minh tứ giác $CEFD$ nội tiếp và xác định vị trí của M để đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CEFD$ có chu vi nhỏ nhất.

(Đề thi tuyển sinh vào THPT Chuyên Nguyễn Trãi- năm 1999-2000 – Môn Toán cho các lớp chuyên KHTN- Đã cải biên)

Bài 6: Tìm các số nguyên x, y, z với $x < y < z$ thỏa mãn phương trình:

$$x^4(y^2 + z^2) + y^4(x^2 + z^2) + z^4(x^2 + y^2) + 2x^2y^2z^2 = 50$$

(Đề thi tuyển sinh vào THPT Chuyên Nguyễn Trãi- năm 1999-2000 – Môn Toán cho các lớp chuyên KHTN)

Bài 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = x^2 + 2y^2 - z^2$ với x, y, z thỏa

$$\text{mãn: } \begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 4x + 3y - z = 10 \end{cases}$$

(Đề thi tuyển sinh vào THPT Chuyên Nguyễn Trãi- năm 2000-2001 – Môn Toán cho các lớp chuyên KHTN)

Bài 8: Cho đường tròn (O) và dây BC không qua tâm. A là điểm chuyển động trên đường tròn sao cho tam giác ABC nhọn. BM và CN là các đường cao của tam giác ABC . ($M \in AC; N \in AB$). Chứng minh rằng độ dài đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN không đổi.

(Đề thi tuyển sinh vào THPT Chuyên Nguyễn Trãi- năm 2000-2001 – Môn Toán cho các lớp chuyên KHTN- Đã cải biên)

Bài 9: Cho x, y, z là các số dương và $xy + yz + zx = 1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2} \geq 3$$

(Đề thi tuyển sinh vào THPT Chuyên Nguyễn Trãi- năm 2001-2002 – Môn Toán cho các lớp chuyên KHTN)

Bài 10: Chứng minh rằng $\left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2} \right| \leq |b - c|$ với $a, b, c \in R$

(Đề thi tuyển sinh vào THPT Chuyên Nguyễn Trãi- năm 2002-2003 – Môn Toán cho các lớp chuyên KHTN)

Bài 11: Cho đường tròn (O) và dây AB , M là điểm chuyển động trên đường tròn. Từ M kẻ MH vuông góc AB ($H \in AB$). Gọi E và F là hình chiếu của H trên MA và MB . Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với EF cắt dây AB tại D .

1) Chứng minh rằng đường thẳng MD luôn đi qua 1 điểm cố định khi M thay đổi trên đường tròn.

2) Chứng minh $\frac{MA}{MB} = \frac{AH}{BD} \cdot \frac{AD}{BH}$

(Đề thi tuyển sinh vào THPT Chuyên Nguyễn Trãi- năm 2003-2004 – Môn Toán cho các lớp chuyên KHTN)

Bài 12: Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab > c; a^3 + b^3 = c^3 + 1$. Chứng minh rằng $a + b > c + 1$.

(Đề thi tuyển sinh vào THPT Chuyên Nguyễn Trãi- năm 2004-2005 – Môn Toán cho các lớp chuyên KHTN)

Bài 13: Cho đường tròn (O) và dây AB không qua tâm. M là điểm trên đường tròn sao cho tam giác ABM nhọn. Phân giác $\widehat{MAB}$ và $\widehat{MBA}$ cắt (O) lần lượt tại P và Q . Gọi I là giao điểm của AP và BQ .

1) Chứng minh rằng MI vuông góc PQ

2) Chứng minh rằng tiếp tuyến chung của đường tròn tâm P tiếp xúc với MB , và đường tròn tâm Q tiếp xúc với MA luôn song song với một đường thẳng cố định khi M thay đổi.

(Đề thi tuyển sinh vào THPT Chuyên Nguyễn Trãi- năm 2004-2005 – Môn Toán cho các lớp chuyên KHTN)

Bài 14: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$. H là trực tâm tam giác ABC . Đường thẳng OH cắt AB và AC lần lượt ở M và N . Chứng minh rằng $BM + CN = MN$

(Đề thi tuyển sinh vào THPT Chuyên Nguyễn Trãi- năm 2005-2006 – Môn Toán cho các lớp chuyên KHTN – Đã cải biên)

Bài 15: Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ có hai nghiệm là x_1, x_2 thỏa mãn $ax_1 + bx_2 + c = 0$. Tính giá trị của biểu thức $M = a^2c + ac^2 + b^3 - 3abc$

(Đề thi tuyển sinh vào THPT Chuyên Nguyễn Trãi- năm 2005-2006 – Môn Toán cho các lớp chuyên KHTN)

Bài 16: Tính giá trị của $A = \frac{x^5 - 4x^3 - 3x + 9}{x^4 + 3x^2 + 11}$ với $\frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{4}$

(Đề thi tuyển sinh vào THPT – năm học 2004-2005)

Bài 17: Tìm số nguyên m để $\sqrt{m^2 + m + 20}$ là số hữu tỉ.

(Đề thi tuyển sinh vào THPT – năm học 2003-2004)

Bài 18: Tìm số nguyên lớn nhất không vượt quá $(7 + 4\sqrt{3})^7$

(Đề thi tuyển sinh vào THPT – năm học 2002-2003)

Bài 19: Tìm cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình:

$$3\sqrt{x} + 7\sqrt{y} = \sqrt{3200}$$

(Đề thi tuyển sinh vào THPT – năm học 2001-2002)

Bài 20: Tam giác ABC có các cạnh thỏa mãn điều kiện $BC \geq AC(AB + AC)$.

Giả sử D là một điểm trên BC kéo dài sao cho $\widehat{CAD} = \widehat{ABC}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{BD - AD}{AD} \geq \frac{AB^2}{BD^2 - AD^2}$$

Bài 21: Chứng minh bất đẳng thức sau với a, b, c dương:

$$\frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{ac}{a^2 + 2ac} + \frac{ab}{c^2 + 2ab} \leq 1$$

(Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi Tỉnh Hải Dương – vòng 1 – Năm học 1997-1998- đã cả biên)

Bài 22: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD và ACD. Chứng minh AH, BK cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

(Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi Tỉnh Hải Dương - vòng 1 – Năm học 1997-1998)

Bài 23:

1) Tìm số có ba chữ số $\overline{aba}$ sao cho $\overline{aba} = (a + b)^3$

2) Tìm các số nguyên a, b thỏa mãn $\frac{a + b}{a^2 - ab + b^2} = \frac{3}{7}$

(Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi Tỉnh Hải Dương – vòng 2 – Năm học 1997-1998)

Bài 24: Cho a, b là các số thực dương và $a^2 + b^3 \geq a^3 + b^4$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 \leq 2$.

(Đề thi tuyển sinh vào THPT Chuyên Nguyễn Trãi)

Bài 25: Giải phương trình $\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x - x^2 + 1} = x^2 - x + 2$.

(Đề thi tuyển sinh vào THPT Chuyên Nguyễn Trãi – Dự bị)

(Còn tiếp ở trang sau)

5 bài toán từ 26 tới 30 là 5 bài toán trong **Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi tỉnh Hải Dương năm 1997**.

Bài 26: Tìm tất cả các số tự nhiên k thỏa mãn: Tích các chữ số của k bằng $44k - 86868$.

Bài 27: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 2b \\ x^2y - xy^2 = b \end{cases}$$

Bài 28: Tìm mối liên hệ giữa a, b, c biết rằng tích một nghiệm của phương trình $x^2 + ax + 1 = 0$ với một nghiệm nào đó của phương trình $x^2 + bx + 1 = 0$ là một nghiệm của phương trình $x^2 + cx + 1 = 0$.

Bài 29: Cho MN là một dây của đường tròn (O) . Vẽ một tam giác ABC bất kì có AB là đường kính của đường tròn và hai cạnh AC, BC lần lượt đi qua M, N . Chứng minh rằng đường cao hạ từ C của tam giác ABC đi qua một điểm cố định.

Bài 30: Trong lục giác lồi $ABCDEF$ độ dài các đường chéo AD, BE, CF đều lớn hơn 2. Hỏi có thể luôn tìm được ở lục giác đó một cạnh có độ dài lớn hơn 1 hay không?

____HẾT____