KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. CHUẨN KIẾN THỨC

SƠ ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

1. Tập xác định

Tìm tập xác định của hàm số

2. Sự biến thiên

* Xét chiều biến thiên của hàm số :

+ Tính đạo hàm y’;

+ Tìm các điểm tại đó đạo hàm y’ bằng 0 hoặc không xác định ;

+ Xét dấu đạo hàm y’ và suy ra chiều biến thiên của hàm số

* Tìm cực trị

* Tìm các giới hạn tại vô cực ,các giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có)

* Lập bảng biến thiên. (Ghi các kết quả tìm được vào bảng biến thiên)

3. Tìm các khoảng lồi ,lõm và điểm uốn của đồ thị hàm (bước này chỉ thực hiện với hàm bậc ba)

+ Tính y’’

+ Giải phương trình y’’=0

+ Lập bảng xét dấu y’’

4. Đồ thị

Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ

CHÚ Ý.

1. Nếu hàm số tuần hoàn với chu kì T thì chỉ cần khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị trên một chu kì ,sau đó tịnh tiến đồ thị song song với trục Ox
2. Nên tính thêm toạ độ một số điểm ,đặc biệt là giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ
3. Nên lưu ý đến tính đối xứng của đồ thị để vẽ cho chính xác

B. LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP.

Dạng 1: Hàm số bậc ba và vấn đề liên quan.

HÀM SỐ BẬC BA : $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

2. Đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$, $\Delta' = b^2 - 3ac$

$\Delta' > 0$: Hàm số có 2 cực trị.

$\Delta' \le 0$: Hàm số luôn tăng hoặc luôn giảm trên $\mathbb{R}$.

3. Đạo hàm cấp 2: $y'' = 6ax + 2b$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$

$x = -\dfrac{b}{3a}$ là hoành độ điểm uốn, đồ thị nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.

4. Giới hạn: Nếu $a > 0$ thì: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty; \lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

Nếu $a < 0$ thì: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty; \lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$

5. Bảng biến thiên và đồ thị:

Trường hợp $a > 0$:

* $\Delta' = b^2 - 3ac > 0$: Hàm số có 2 cực trị

* $\Delta' = b^2 - 3ac \le 0 \Rightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$: Hàm số luôn tăng trên $\mathbb{R}$.

Trường hợp $a < 0$:

* $\Delta' = b^2 - 3ac > 0$: Hàm số có 2 cực trị.

* $\Delta' = b^2 - 3ac \le 0 \Rightarrow y' \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$: Hàm số luôn giảm trên $\mathbb{R}$.

Một số tính chất của hàm số bậc ba

1. Hàm số có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi: $\Delta' = b^2 - 3ac > 0$.

2. Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$

3. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$

4. Để tìm giá cực trị ta lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$: $f(x) = f'(x).g(x) + rx + q$

Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của $f'(x)$ thì: $f(x_1) = rx_1 + q;\ f(x_2) = rx_2 + q$

Khi đó đường thẳng đi qua các điểm cực trị là $y = rx + q$.

5. Đồ thị luôn có điểm uốn I và là tâm đối xứng của đồ thị.

6. Đồ thị cắt Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ hàm số có hai cực trị trái dấu nhau.

7. Đồ thị cắt Ox tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số có hai cực trị và một cực trị nằm trên Ox.

8. Đồ thị cắt Ox tại một điểm $\Leftrightarrow$ hoặc hàm số không có cực trị hoặc hàm số có hai cực trị cùng dấu.

9. Tiếp tuyến: Gọi I là điểm uốn. Cho $M \in (C)$

* Nếu $M \equiv I$ thì ta có đúng một tiếp tuyến đi qua M và tiếp tuyến này có hệ số góc nhỏ nhất (nếu $a > 0$), lớn nhất (nếu $a < 0$).

* Nếu M khác I thì có đúng 2 tiếp tuyến đi qua M.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số:

1. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$. **2.** $y = -x^3 + 3x^2$ **3.** $y = \dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x$

Lời giải.

1. Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

- Chiều biến thiên :
  - $y' = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow -3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$

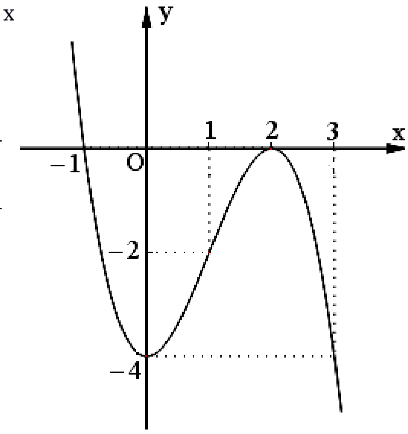
Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty\,;0)$ và $(2\,;+\infty)$, đồng biến trên khoảng $(0\,;2)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$; giá trị cực đại của hàm số là $y(2) = 0$
.
Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = -4$

  - Giới hạn của hàm số tại vô cực : $\lim\limits_{x\to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x} y = -\infty$

- **Bảng biến thiên :**

x	$-\infty$		0		2	$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$
y	$+\infty$	↘		↗ 0 ↘		-4
	$-\infty$					



- Đồ thị :
  - Cho $x = -1 \Rightarrow y = 0$; $x = 3 \Rightarrow y = -4$

2. Tập xác định : $D = \mathbb{R}$
- Chiều biến thiên:
  - $y' = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow -3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$

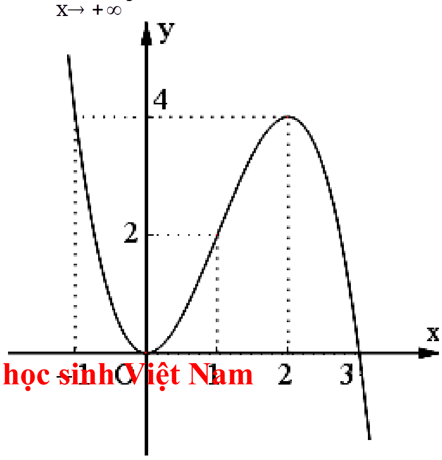
Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty\,;0)$ và $(2\,;+\infty)$, đồng biến trên khoảng $(0\,;2)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$; giá trị cực đại của hàm số là $y(2) = 4$
Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = 0$.

  - Giới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim\limits_{x\to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} y = -\infty$

  Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$



- Đồ thị :

  Cho $x = -1 \Rightarrow y = 4;\ x = 3 \Rightarrow y = 0.$

3. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

- Chiều biến thiên:

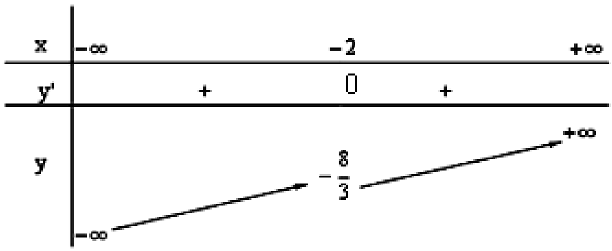
- Giới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y$

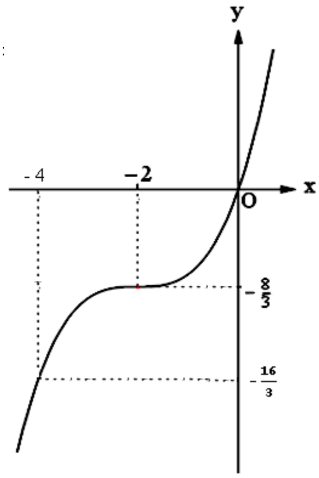
- Ta có: $y' = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

  Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty ; +\infty)$,

  hàm số không có cực trị .

- Bảng biến thiên:





- Đồ thị : Cho $x = 0 \Rightarrow y = 0$

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C)
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số;
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị *(C)* tại $A(3;1)$.

Lời giải.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị:

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Chiều biến thiên :

Ta có : $y' = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow -3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$

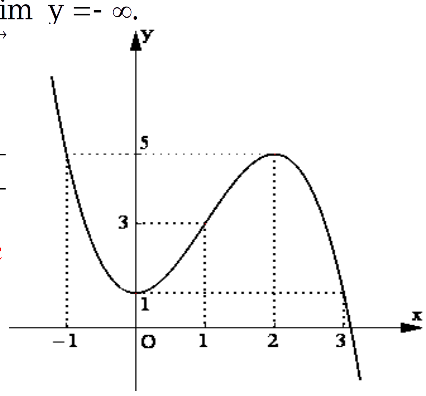
$y' > 0 \Leftrightarrow x \in (0;2)$; $y' < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$; giá trị cực đại của hàm số là $y(2) = 5$. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = 1$.

- Giới hạn của hàm số tại vô cực : $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to} y = -\infty$.
- Bảng biến thiên:

x	-∞ +∞	0		2
y'	-	0	+	0



	-
y	$+\infty$ ↘ 1 ↗ 5 ↘ $-\infty$

- Đồ thị :

Cho $x = -1 \Rightarrow y = 5$;

$x = 3 \Rightarrow y = 1$.

2. Phương trình tiếp tuyến của *(C)* tại điểm $A(3;1)$ có dạng :

$y - 1 = y'(3).(x - 3) \Leftrightarrow y = -9(x - 3) + 1 \Leftrightarrow y = -9x + 28$

> **Ví dụ 3.** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$, trong đó *m* là tham số
> **1.** Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho với $m = 0$;
> **2.** Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Lời giải.

1. Khi $m = 0$ thì hàm số là : $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

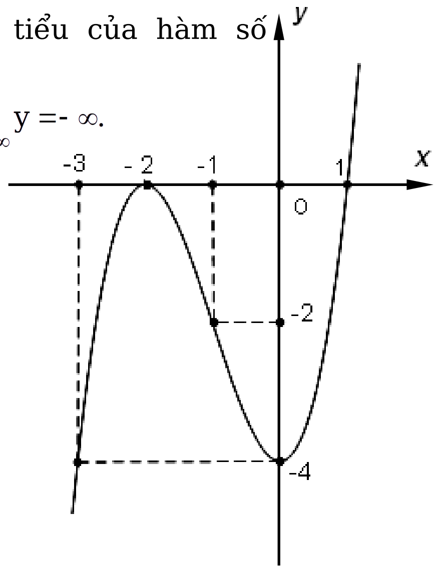
- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Chiều biến thiên:
  - Giới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim\limits_{x\to -\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} y = +\infty$
  - Bảng biến thiên:

    + $y' = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$; giá trị cực đại của hàm số là $y(-2) = 0$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(0) = -4$



- Giới hạn của hàm số tại vô cực : $\lim\limits_{x\to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} y = -\infty$.
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-4	↗	$+\infty$

- Đồ thị :

Cho $x = -3 \Rightarrow y = -4$; $x = 1 \Rightarrow y = 0$

2. Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

$\Leftrightarrow y' = 3x^2 + 6x - m \geq 0,\ \forall x \in (-\infty;0)$.

Xét: $g(x) = 3x^2 + 6x - m,\ x \in (-\infty;0)$

$g'(x) = 6x + 6 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		0
g'(x)		-	0	+	
g(x)	$+\infty$ ↘		$-3 - m$	↗ $-m$	

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy:

$$y' = g(x) = 3x^2 + 6x - m \geq 0,\ \forall x \in (-\infty;0) \Leftrightarrow -3 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -3$$

Vậy khi $m \leq -3$ thì yêu cầu của bài toán được thỏa mãn .

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ có đồ thị (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số;

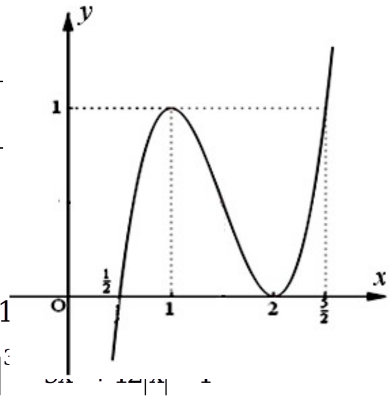
2. Tìm *m* để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt: $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$

Lời giải.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

+ Đồ thị :



2. Ta có: $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m \Leftrightarrow 2|x|^3 - 9x^2 + 1$

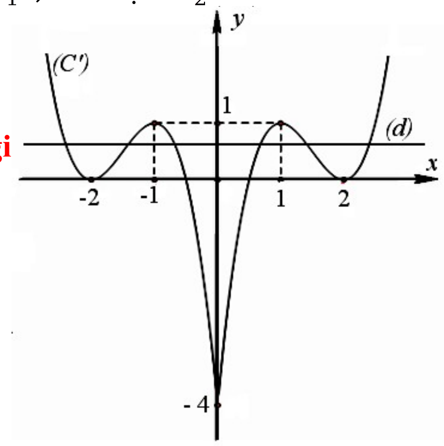
Gọi $(C): y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ và $(C'): y = 2|x|^3$

Ta thấy khi $x \geq 0$ thì: $(C'): y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

Mặt khác hàm số của đồ thị *(C')* là hàm số chẵn nên *(C')* nhận *Oy* là trục đối xứng . Từ đồ thị *(C)* ta suy ra đồ thị *(C')* như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị *(C)* bên phải trục *Oy*, ta được (C_1')
- Lấy đối xứng qua trục *Oy* phần (C_1'), ta được (C_2')
- $(C') = (C_1') \cup (C_2')$

Số nghiệm của phương trình:



$$2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$$

$$\Leftrightarrow 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4 = m - 4$$

là số giao điểm của đồ thị *(C')* và đường thẳng $(d): y = m - 4$.

Từ đồ thị *(C')*, ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0 < m - 4 < 1 \Leftrightarrow 4 < m < 5$.

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 2$ có đồ thị là (C_m), m là tham số

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) khi $m = -3$

2. Tùy theo k giải và biện luận phương trình: $-|x|^3 + 3x^2 + k = 0$

3. Gọi A và B là hai điểm cực trị của (C), tìm điểm M trên (C) sao cho tam giác MAB cân tại M

4. Tìm m để đồ thị hàm số (C_m) cắt trục hoành tại điểm duy nhất.

Lời giải.

∗ Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$

∗ Ta có: $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

∗ Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$

∗ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

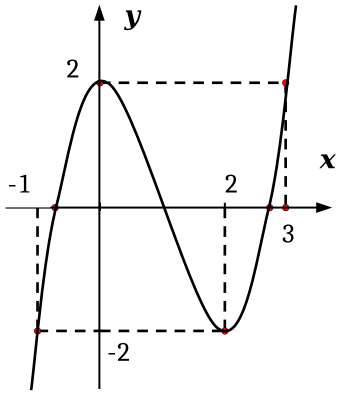
Hàm đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên $(0; 2)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$ với giá trị cực đại của hàm số là $y(0) = 2$ và hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$ với giá trị cực tiểu của hàm số là $y(2) = -2$.

∗ Đồ thị

- Điểm uốn: : $y'' = 6x - 6$ và $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Ta thấy y'' đổi dấu khi x qua điểm $x=1$.
Vậy $I(1;0)$ là điểm uốn của đồ thị.



- Giao điểm của đồ thị với trục tọa độ

Giao điểm của đồ thị với trục Oy là điểm $(0;2)$

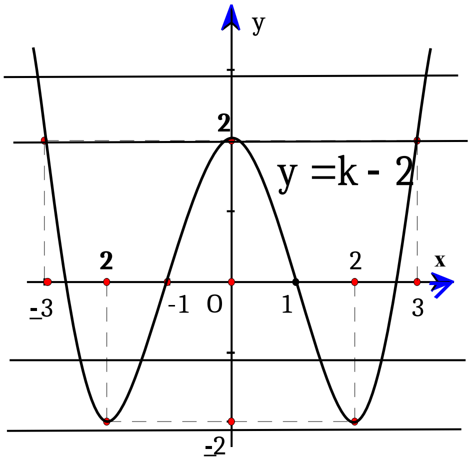
Đồ thị cắt Ox tại ba điểm $(1;0), (1\pm\sqrt{3};0)$

- Chọn $x=3 \Rightarrow y=2,\quad x=-1 \Rightarrow y=-2$.

Nhận xét: Đồ thị nhận $I(1;0)$ làm tâm đối xứng.

2. $-|x|^3+3x^2+k=0 \Leftrightarrow |x|^3-3x^2+2=k-2$, đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C'): $y=|x|^3-3x^2+2$ và đường thẳng (d): $y=k-2 \Rightarrow$ số nghiệm của phương trình cho chính là số giao điểm của hai đồ thị

$$\begin{cases} y=|x|^3-3x^2+2 \quad (C') \\ y=k-2 \ (d) \end{cases}.$$



- $k-2<-2 \Leftrightarrow k<0 \Rightarrow d$ không cắt đồ thị (C') nên phương trình cho vô nghiệm.
- $\left[\begin{array}{l} k-2=-2 \\ k-2>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=0 \\ k>4 \end{array}\right. \Rightarrow d$ cắt (C') tại hai điểm phân biệt nên phương trình cho có hai nghiệm phân biệt.
- $k-2=2 \Leftrightarrow k=4 \Rightarrow d$ cắt (C') tại ba điểm phân biệt nên phương trình cho có ba nghiệm phân biệt.
- $-2<k-2<2 \Leftrightarrow 0<k<4 \Rightarrow d$ cắt (C') tại bốn điểm phân biệt nên phương trình cho có bốn nghiệm phân biệt.

3. Giả sử $A(0;2)$ và $B(2;-2)$ là hai điểm cực trị của (C)

Tam giác MAB cân tại $M \Leftrightarrow MA=MB$ và M,A,B không thẳng hàng.

$MA=MB \Leftrightarrow M$ thuộc trung trực $AB: x-2y-1=0$

Tọa độ M thỏa nghiệm hệ phương trình: $\begin{cases} y=x^3-3x^2+2 \\ x-2y-1=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow (x-1)(2x^2-4x-5)=0 \Rightarrow M\left(1\pm\frac{\sqrt{14}}{2};\pm\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$$

Loại $M(1;0)$ vì M,A,B thẳng hàng.

4. Cách 1: Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (C_m) với trục Ox: $x^3+mx+2=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{2}{x}=-m$

Xét hàm số $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$. Ta có: $f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}$ và $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Lập bảng biến thiên suy ra $-m<3 \Leftrightarrow m>-3$ là những giá trị cần tìm.

Cách 2: Để đồ thị hàm số (C_m) cắt Ox tại duy nhất một điểm ta có các trường hợp sau:

TH 1: Đồ thị hàm số (C_m) không có cực trị hay là hàm số (C_m) luôn đồng biến (do $a=1>0$) trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y'=3x^2+m\geq 0 \ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m\geq 0$

TH 2: Đồ thị hàm số (C_m) có hai cực trị cùng dấu

$y'=0 \Leftrightarrow x^2=-\frac{m}{3} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{m}{3}}$ với $m<0$

Hai giá trị cực trị là: $y_1=2+\frac{2m}{3}\sqrt{-\frac{m}{3}}$, $y_2=2-\frac{2m}{3}\sqrt{-\frac{m}{3}}$

$\Rightarrow y_1.y_2=4+\frac{4m^3}{27}>0 \Leftrightarrow -3<m<0$.

Vậy $m>-3$ là những giá trị cần tìm.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+9x-1$ có đồ thị là .(C)

1. Tìm m để đường thẳng $d_m: y=(2m-1)x-1$ cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;-1),B,C$ sao cho $BC=\sqrt{82}$.

2. Tìm những điểm nằm trên (C) mà qua đó vẽ được duy nhất một tiếp tuyến đến (C).

Bài 2. Cho hàm số $y=-x^3-3x^2+mx+4$, trong đó m là tham số .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho, với $m=0$

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

3. Tìm m để đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

Bài 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số $y=x^3+3x^2+(4m-1)x+2m^2-3$ cắt Ox tại ba điểm A,B,C sao cho $AB=BC$.

Bài 4. Tìm m để đồ thị (C_m): $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3mx - m + 1$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt trong đó có ít nhất một điểm có hoành độ âm.

Bài 5. Tìm m để đồ thị $(C_m): y = x^3 - 2x^2 - (3m-1)x + m + 3$ cắt đường thẳng $d: y = (1-m)x + m - 5$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ $x_1 < x_2 < 1 < x_3$.

Bài 6. Cho hàm số (C) $y = x^3 - 5x^2 + 6x + 3$.

1. Tìm trên đồ thị (C_2) những cặp điểm đối xứng qua O

2. Tìm m để trên O tồn tại một cặp điểm đối xứng nhau qua Oy

Bài 7. Cho hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + mx + 3m - 2$ có đồ thị (C_m).

1. Tìm trên (C_1) những cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ

2. Tìm m để trên (C_m) tồn tại ít nhất một cặp điểm đối xứng nhau qua trục tung.

3. Tìm tất cả các điểm cố định họ đường cong (C_m) luôn đi qua.

4.Tìm những điểm cố định mà không có đồ thị nào của họ (C_m) đi qua.

Bài 8. Cho hàm số $(C): y = -\dfrac{2}{x}$ có đồ thị (C). Trên đồ thị (C)có bao nhiêu bộ bốn điểm A, B, C, D sao cho tứ giác ABCD là hình vuông tâm $I(1;-1)$.

Bài 9. Trên mp Oxy cho đồ thị $(C): y = x^3 - 2\sqrt{2}x$. Chứng minh rằng nếu một hình bình hành có tất cả các đỉnh đều nằm trên (C)thì tâm của hình bình hành đó là gốc tọa độ O.

Bài 10. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt. Chứng minh rằng $\left|27c + 2a^3 - 9ab\right| < 2\sqrt{\left(a^2 - 3b\right)^3}$.

Bài 11: Cho hàm số : $y = \dfrac{1}{8}\left(x^3 - 3x^2 - 9x - 5\right)$ có đồ thị là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).

2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

Bài 12: Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 - x + 2$, có đồ thị là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ (C).

2. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $\left|x^3 + x - 2\right| = m$ (1)

Bài 13: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)

2. Tìm m để phương trình $x^3 - 3x^2 = m\ (1)$ có ba nghiệm phân biệt.

3. Từ đồ thị (C) hãy suy ra đồ thị (C'): $y = g(x) = |x|^3 - 3x^2 + 2$.

4. Biện luận số nghiệm của phương trình : $-|x|^3 + 3x^2 + m = 0\ (2)$.

Bài 14: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)

2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 36x + 1$.

3. Tìm m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt : $|x|^3 - \frac{3}{2}x^2 + m = 0$.

4. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình : $\left|2x^2 - x - 1\right| = \frac{m}{|x - 1|}$.

Bài 15: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2\ (C_m)$, với tham số thực m.

Giả sử tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho khi $m = 1$

2. Chứng minh rằng trung điểm I của AB nằm trên (C_m).

3. Tìm giá trị của m để phương trình đường thẳng AB là $y = -x - 1$. Khi đó viết phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại A.

Bài 16: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị là (C)

1.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số .

2.Tìm phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ x = 3.

3. Tìm phương trình tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

Bài 17: Cho hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + 2(m+1)x^2 - 3(m+1)x + 1\ (1)$ (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (C) của hàm số (1) khi m = 0.

2. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số (1) nghịch biến trên ¡ .

3. Tìm các giá trị của tham số m để trên đồ thị của hàm số (1) tồn tại một cặp điểm M , N (M khác N) đối xứng với nhau qua gốc tọa độ O.

Bài 18: Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 4$, trong đó m là tham số .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho, với $m = 0$

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

3. Tìm m để đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành một cấp số cộng.

Bài 19: Cho hàm số y = $2x^3 + (m-1)x^2 + (m+2)x + 1\ (1)$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 1.

2.Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng y = 9x – 3.

3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại và điểm cực tiểu có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{6}$.

Bài 20: Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+9x-1$ có đồ thị là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)

2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất.

3. Tìm m để đường thẳng $d_m: y=(2m-1)x-1$ cắt đồ thị (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;-1), B, C$ sao cho $BC=\sqrt{82}$.

4. Tìm những điểm nằm trên (C) mà qua đó vẽ được duy nhất một tiếp tuyến đến (C).

Bài 21: Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+1$ có đồ thị (C). Tìm m để phương trình $x^3-3x^2=m^3-3m^2$ có ba nghiệm phân biệt.

Bài 22:

1 Cho hàm số $y=-x^3-3x^2+mx+4$, trong đó m là tham số thực.

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho, với $m=0$

b. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

2.Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y=-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x-3$.

Chứng minh rằng phương trình $-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x-3=0$ có ba nghiệm phân biệt , trong đó có một nghiệm dương nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.

3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{17}{3}$.

Chứng minh rằng phương trình $y=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

4. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y=-x^3+3x^2+9x+2$.

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0, biết rằng $y''(x_0)=-6$. Giải bất phương trình $y'(x-1)>0$

5. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x$.Tìm tất cả các đường thẳng đi qua điểm $M(4;4)$ và cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt.

6. Tìm hệ số a,b,c sao cho đồ thị của hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 và tiếp xúc với đường thẳng $y=1$ tại điểm có hoành độ là -1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với giá trị a,b,c vừa tìm được .

7. Tìm các hệ số $m,n,p\in \mathbb{R}$ sao cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+mx^2+nx+p$ đạt cực đại tại điểm $x=3$ và đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng (d): $y=3x-\frac{1}{3}$ tại giao điểm của (C) với trục tung .

Dạng 2: Hàm số bậc trùng phương và vấn đề liên quan.

Phương pháp giải

HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG : $y=ax^4+bx^2+c$

1. TXĐ: $D=\mathbb{R}$

2. Đạo hàm: $y'=4ax^3+2bx=2x(2ax^2+b)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x^2=-\frac{b}{2a}$.

* Nếu $ab\ge 0$ thì y có một cực trị $x_0=0$

* Nếu $ab<0$ thì y có 3 cực trị $x_0=0;\ x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$

3. Đạo hàm cấp 2: $y''=12ax^2+2b,\ y''=0\Leftrightarrow x^2=-\frac{b}{6a}$

* Nếu $ab\ge 0$ thì đồ thị không có điểm uốn.
* Nếu $ab<0$ thì đồ thị có 2 điểm uốn.
4. Bảng biến thiên và đồ thị:
*$a>0,b<0$: Hàm số có 3 cực trị.

x	$+\infty$ $+\infty$		x_1		0		x_2	
y'		-	0	+	0	-	0	+
y	$+\infty$ $+\infty$		CT				CT	CĐ

* $a<0,b>0$: Hàm số có 3 cực trị.

x	$+\infty$ $+\infty$		x_1		0		x_2	
y'		+	0	-	0	+	0	-
y	$-\infty$ $-\infty$		CĐ				CĐ	CT

*$a>0,b\ge 0$: Hàm số có 1 cực trị.

x	$-\infty$ $+\infty$		0	
y'		-	0	+

y	$+\infty$	↘		↗ $+\infty$
			CT	

* $a<0, b\le 0$: Hàm số có 1 cực trị.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	CĐ	↘	
	$-\infty$				$-\infty$

Tính chất:

* Đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \ne 0)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt lập thành cấp số cộng khi phương trình: $aX^2 + bX + c = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt thỏa $X_1 = 9X_2$.

* Nếu đồ thị hàm số có ba điểm cực trị thì ba điểm cực trị tạo thành một tam giác cân có đỉnh nằm trên Oy.

* Nếu đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị thì đường thẳng d' đối xứng với d qua Ox cũng là tiếp tuyến của đồ thị.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ có đồ thị (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số;

2. Dùng đồ thị *(C)*, hãy biện luận theo m số nghiệm thực của phương trình

$$x^4 - 2x^2 - 1 = m \quad (*)$$

Lời giải.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị:

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.
- Chiều biến thiên :

Ta có : $y' = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right)$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm 1$

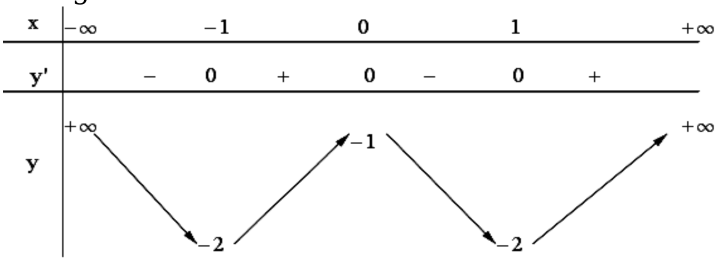
$$y' > 0 \Leftrightarrow x \in (-1;0) \cup (1;+\infty)\,; y' < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-1) \cup (0;1)$$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$, đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

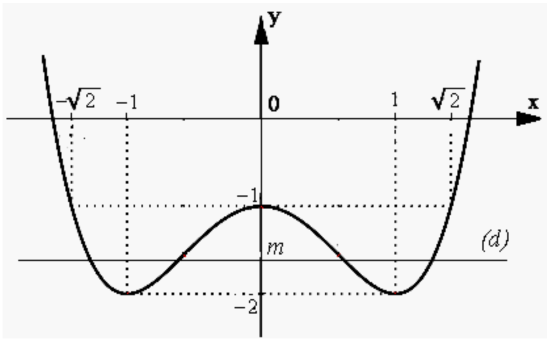
Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$; giá trị cực đại của hàm số là $y(0) = -1$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = \pm 1$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(\pm 1) = -2$

- Giới hạn của hàm số tại vô cực: $\lim\limits_{x\to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} y = +\infty$.
- Bảng biến thiên :



- Đồ thị : Cho $y = -1 \Rightarrow x = 0 ; x = \pm\sqrt{2}$.



2 . Biện luận theo *m* số nghiệm thực của phương trình:
Số nghiệm của (*) là số giao điểm của *(C)* và $(d): y = m$.
Dựa vào đồ thị, ta thấy :
+ Khi $m < -2$ thì (*) vô nghiệm.
+ Khi $\left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m > -1 \end{array}\right.$ thì (*) có 2 nghiệm.
+ Khi $-2 < m < -1$ thì (*) có 4 nghiệm.
+ Khi $m = -1$ thì (*) có 3 nghiệm.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - mx^2 + \frac{3}{2}$ có đồ thị (C).
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số $m = 3$
2. Xác định m để đồ thị của hàm số có cực tiểu mà không có cực đại.

Lời giải.

1. Khi $m = 3$ thì hàm số là : $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$.

- Tập xác định : D = ¡ .
- Chiều biến thiên :
  - Bảng biến thiên :

    + Ta có : $y' = 2x^3 - 6x = 2x\left(x^2 - 3\right)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x\left(x^2 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{3}\,; 0\right)$ và $\left(\sqrt{3}\,; +\infty\right)$, nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty\,; -\sqrt{3}\right)$ và $\left(0\,; \sqrt{3}\right)$.

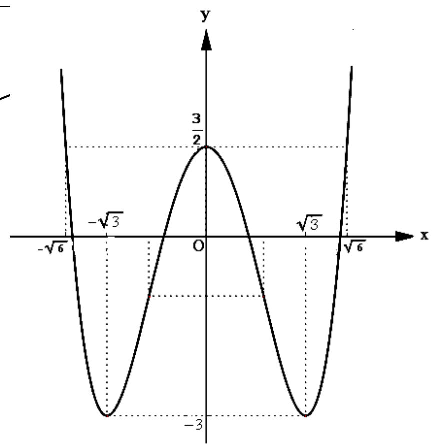
Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$; giá trị cực đại của hàm số là $y(0) = \frac{3}{2}$.

Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = \pm\sqrt{3}$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(\pm\sqrt{3}) = -3$.

- Giới hạn của hàm số tại vô cực : $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$ $\quad -\sqrt{3} \quad$ **0** $\sqrt{3}$ $\quad +\infty$
y'	– **0** + **0** – **0** +
y	$+\infty$ ↘ ↗ ↘ $+\infty$ **–3**



- Đồ thị :

  - Cho $y = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{6} \end{array}\right.$
  - Vì hàm số đã cho là hàm số chẵn, nên đồ thị của nó nhận trục tung làm trục đối xứng .
  - Đồ thị (hình vẽ):

2. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm: $y' = 2x^3 - 2mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x^2 = m$ (*)

Hàm số có cực tiểu mà không có cực đại

$\Leftrightarrow$ y' = 0 có một nghiệm duy nhất và *y'* đổi dấu từ âm sang dương khi *x* đi qua nghiệm đó

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0 \Leftrightarrow m \le 0$

Vậy giá trị cần tìm là: $m \le 0$.

Ví dụ 3 Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ có đồ thị (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số khi m = 1;

2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho OA = BC; trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

Lời giải.

1. $y = x^4 - 4x^2 + 1$

- Tập xác định D = $\mathbb{R}$
- Sự biến thiên :

o Chiều biến thiên : $y' = 4x^3 - 8x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{2}$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(0; \sqrt{2})$; đồng biến trên các khoảng $\left(-\sqrt{2};0\right)$ và $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

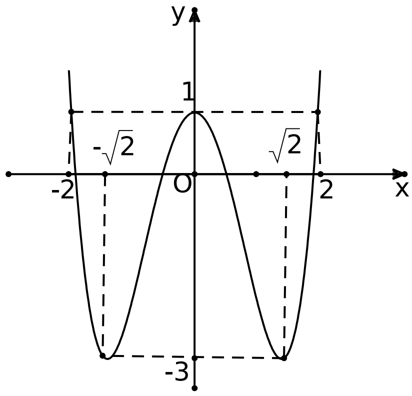
Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{2}$; $y_{CT} = -3$, đạt cực đại tại $x = 0$; $y_{CĐ} = 1$

o Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

- Đồ thị:



2. Xét $y = x^4 - 2(m + 1)x^2 + m$ (C_m)

$\Rightarrow y' = 4x^3 - 4(m + 1)x$

Đồ thị của hàm số (C_m) có ba cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có

ba nghiệm phân biệt.

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow 4x[x^2 - m - 1] = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x^2 = m + 1$

Vì thế để thỏa mãn điều kiện trên thì phương trình $x^2 = m + 1$

Cần có hai nghiệm phân biệt khác 0. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi :

$m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$ (1)

Kết luận thỏa mãn (1), (C_m) có ba cực trị tại các điểm

$A(0, m)$, $B\left(-\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1\right)$, $C\left(\sqrt{m+1}; -m^2 - m - 1\right)$

Lúc đó: $OA = OB \Leftrightarrow OA^2 = BC^2$ (do $OA > 0$; $BC > 0$)

$\Leftrightarrow m^2 = 4(m + 1) \Leftrightarrow m^2 - 4m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \pm 2\sqrt{2}$

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = x^4 - mx^2 + m - 1$ (1) có đồ thị (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số khi $m = 8$;

2. Xác định m sao cho đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

Lời giải.

1. Khi $m = 8 \Rightarrow y = x^4 - 8x^2 + 7$.

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$.
- Chiều biến thiên :

+ Ta có : $y' = 4x^3 - 16x = 4x\left(x^2 - 4\right)$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2 - 4\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \pm 2$$

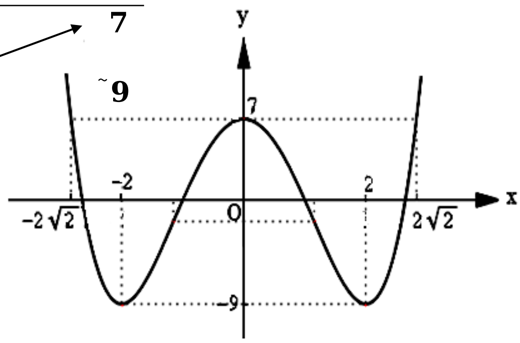
Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$; giá trị cực đại của hàm số là $y(0) = 7$.

Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm $x = \pm 2$; giá trị cực tiểu của hàm số là $y(\pm 2) = -9$.

- Giới hạn của hàm số tại vô cực : $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.
- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	+	0	$-$	0	+	
y	$+\infty$	↘	-9	↗	7	↘	-9	↗	$+\infty$



- Đồ thị (hình vẽ):
  - Cho $y = 7 \Rightarrow x^4 - 8x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2}. \end{array}\right.$
  - Vì hàm số đã cho là hàm số chẵn nên đồ thị của nó nhận trục tung làm trục đối xứng.

2. Gọi $(C_m): y = x^4 - mx^2 + m - 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục Ox :

$$x^4 - mx^2 + m - 1 = 0 \qquad (1).$$

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$, suy ra $(1) \Leftrightarrow t^2 - mt + m - 1 = 0 \qquad (2)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m + 4 > 0 \\ S = m > 0 \\ P = m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2. \end{cases}$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho hàm số $y = x^4 + 3(m+1)x^2 + 3m + 2$, có đồ thị là (C_m)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_1) khi $m = 1$

2. Tìm các giá trị của m để (C_m) có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông.

Bài 2: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 2$ có đồ thị là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).

2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 24y + 1 = 0$.

3. Tìm a để Parabol (P): $y = 2x^2 + a$ tiếp xúc với (C).

Bài 3: Cho hàm số $y = -x^4 + 6x^2 - 5$ có đồ thị (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).

2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các điểm uốn.

3. Tìm m để phương trình $(x^2 - 5)\left|x^2 - 1\right| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

Bài 4: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1$ có đồ thị là (C_m)

1. Khảo sát hàm số và vẽ đồ thị (3) của hàm số khi $=1$.

2. Tìm giá trị của m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt A, B, C, D sao cho $AB = BC = CD$.

3. Tìm m để (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông.

Bài 5: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m - 5$ (1) (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 1.

2. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và ba điểm này là ba đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 32.

Bài 6: Cho hàm số $y = x^4 + 2(m+1)x^2 - 4m - 4$ (1).

1. Tìm các điểm trên mặt phẳng tọa độ mà đồ thị hàm số (1) luôn đi qua dù m lấy bất cứ giá trị nào (*các điểm này gọi là các **điểm cố định** của đồ thị hàm số (1).*

2. Xác định các giá trị của tham số m để hàm số chỉ có điểm cực tiểu mà không có điểm cực đại .

3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) khi m = 0.

4. Cho hai điểm $A(0;-16)$ và $B(-1;-8)$ Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

Bài 7:

1. Cho hàm số: $y = x^4 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C). Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $x^4 - 2x^2 + 1 + \log_2 m = 0$.

2. Cho hàm số $y = 8x^4 - 9x^2 + 1$ có đồ thị (C). Dựa vào đồ thị (C) hãy biện luận theo

m số nghiệm của phương trình: $8\cos^4 x - 9\cos^2 x + m = 0$ với $x \in [0;\pi]$

3. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-4}{x-2}$ có đồ thị (C). Tìm các giá trị của m để phương trình sau có 2 nghiệm trên đoạn $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$: $\sin^6 x+\cos^6 x=m\,(\sin^4 x+\cos^4 x)$

Bài 8: Chứng minh rằng phương trình: $x^4-2\left(m^2+2\right)x^2+m^4+3=0$ luôn có 4 nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3,x_4 với mọi giá trị của m. Tìm giá trị $m\in\mathbb{R}$ sao cho $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_1x_2x_3x_4=11$.

Bài 9: Tìm m để đường thẳng $y=-1$ cắt (C_m): $y=x^4-(3m+2)x^2+3m$ tại 4 điểm phân biệt đều có hoành độ nhỏ hơn 2.

Bài 10: Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+2m+1$ có đồ thị (C_m)

1. Khảo sát hàm số và vẽ đồ thị của hàm số khi $m=1$.

2. Tìm giá trị của m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt A,B,C,D sao cho $AB=BC=CD$.

3. Tìm m để (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông.

Dạng 3: Hàm số hữu tỷ và vấn đề liên quan.

Phương pháp giải

HÀM SỐ NHẤT BIẾN: $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, $ac\neq 0$.

1. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$

2. Đạo hàm: $y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. Đặt $m=ad-bc$, ta có:

* Nếu $m>0$ thì hàm số tăng trên từng khoảng xác định.

* Nếu $m<0$ thì hàm số giảm trên từng khoảng xác định.

3. Các đường tiệm cận : $x=-\frac{d}{c}$ là tiệm cận đứng và $y=\frac{a}{c}$ là tiệm cận ngang.

4. Bảng biến thiên và đồ thị :

* $m>0$

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	$\frac{a}{c}$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$\frac{a}{c}$

$m<0$:

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
y'		-	||	-	
y	$\frac{a}{c}$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$\frac{a}{c}$

5. Đồ thị của hàm số nhất biến gọi là một hypebol vuông góc có tâm đối xứng
$I\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$, là giao điểm của 2 đường tiệm cận.

HÀM SỐ PHÂN THỨC $y = \frac{ax^2 + bx + c}{\alpha x + \beta}$, $a.\alpha \neq 0$

Thực hiện phép chia đa thức ta được: $y = Ax + B + \frac{C}{\alpha x + \beta}$ $(a.\alpha.C \neq 0)$.

1. TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\beta}{\alpha}\right\}$

2. Đạo hàm: $y' = A - \frac{C\alpha}{(\alpha x + \beta)^2} = \frac{A(\alpha x + \beta)^2 - C\alpha}{(\alpha x + \beta)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow (\alpha x + \beta)^2 = \frac{C\alpha}{A}$

* Nếu $\frac{C\alpha}{A} < 0$ thì hàm số không có cực trị, hàm số tăng hoặc giảm trên từng khoảng xác định.

* Nếu $\frac{C\alpha}{A} > 0$ thì hàm số có 2 cực trị.

3. Các đường tiệm cận: Tiệm cận đứng: $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ và Tiệm cận xiên: $y = Ax + B$.

4. Bảng biến thiên

$*A > 0,\ AC\alpha > 0$: Hàm số có 2 cực trị

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{\beta}{\alpha}$		x_2		$+\infty$
y'		+	0	-	‖	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	CĐ	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	CT	↗	$+\infty$

* $A > 0,\ C\alpha < 0$: Hàm số không có cực trị

x	$-\infty$		$-\frac{\beta}{\alpha}$		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

$*A < 0,\ C\alpha < 0$: Hàm số có 2 cực trị.

x	$-\infty$		x_1		$-\frac{\beta}{\alpha}$		x_2		$+\infty$
y'		-	0	+	||	+	0	-	
y	$+\infty$		CT		$+\infty$ || $-\infty$		CĐ		$-\infty$

$*\, A < 0,\ AC\alpha < 0$: Hàm số không có cực trị.

x	$-\infty$		$-\frac{\beta}{\alpha}$		$+\infty$
y'		-	||	-	
y	$+\infty$		$-\infty$ || $+\infty$		$-\infty$

Một số tính chất của hàm số hữu tỉ bậc 2 trên bậc 1.

Giả sử $y' = \frac{g(x)}{(\alpha x+\beta)^2}$ với g(x) là một tam thức bậc 2 có biệt số Δ.

1. Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ $g(x)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-\frac{\beta}{\alpha}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) \neq 0 \end{cases}$$

2. Các cực trị là: $y_1 = \frac{2ax_1+b}{\alpha}; y_2 = \frac{2ax_2+b}{\alpha}$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $y'=0$.

Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị có phương trình :

$y = \frac{1}{\alpha}(2ax+b)$

3. Điều kiện để 2 cực trị trái dấu là : $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{\beta}{\alpha}$ và $ax^2+bx+c=0$ vô nghiệm.

4. Giả sử M là điểm thuộc đồ thị hàm số. Nếu tiếp tuyến với đồ thị tại M cắt 2 tiệm cận tại A, B thì ta có :

* M là trung điểm của AB và $S_{\Delta IAB}$ không đổi (I là giao điểm 2 đường tiệm cận, cũng là tâm đối xứng của đồ thị).

* Tích các khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận là 1 hằng số.

Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$, trong đó *m* là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số với $m=1$
2. Với giá trị nào của *m* thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$

Lời giải.

1. Khi $m=1$ thì hàm số là: $y=\dfrac{x+4}{x+1}$.

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
- Chiều biến thiên:

  \+ Ta có : $y'=\dfrac{-3}{(x+1)^2}<0,\ \forall x\neq -1$

  Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1),(-1;+\infty)$

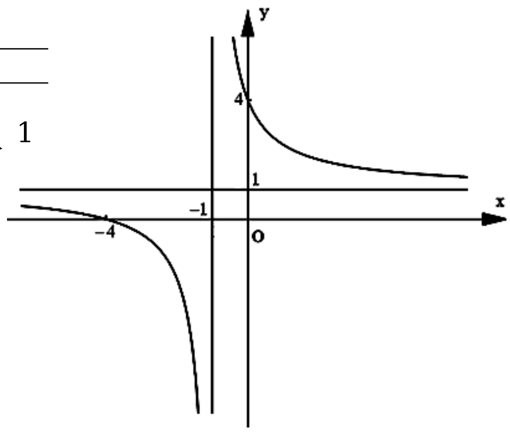
  - Giới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực và các đường tiệm cận:

    \+ Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=-\infty$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=+\infty$, do đó đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho (khi $x\to(-1)^-$ và khi $x\to(-1)^+$).

    \+ Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty} y=1$, nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho (khi $x\to+\infty$ và khi $x\to-\infty$)

  - **Bảng biến thiên:**

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		-	||	-	
y	1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	1



- Đồ thị : (hình vẽ)
  - $y=0\Rightarrow x=-4$; $x=0\Rightarrow y=4$, tức là đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm $(-4;0)$, cắt trục tung tại $(0;4)$
  - Đồ thị của hàm số nhận giao điểm $I(-1;1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng .

2. Với giá trị nào của m thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$

$$y' = \frac{m^2 - 4}{(x+m)^2}.$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (-\infty; 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ x = -m \notin (-\infty; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1.$$

Vậy giá trị cần tìm là: $-2 < m \leq -1$.

Ví dụ 2 Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số;

2. Tìm *m* để đường thẳng $(d): y = -x + m$ cắt *(C)* tại hai điểm phân biệt.

Lời giải.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Sự biến thiên:

  - Chiều biến thiên: $y' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$, $\forall x \in D$.

    Suy ra, hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

  - Cực trị: Hàm số không có cực trị.

- Giới hạn : $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} y = 2$; $\lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty$.

  Suy ra đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là đường thẳng x = 1, và một tiệm cận ngang là đường thẳng y = 2.

- Bảng biến thiên:

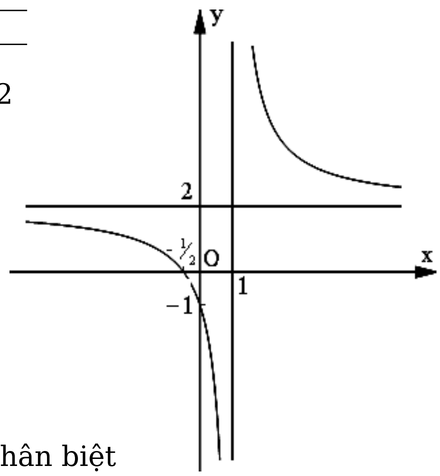
x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-	||	-
y	2 ↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘ 2

- Đồ thị :

  Đồ thị cắt trục tung tại $A(0; -1)$

  , cắt trục hoành tại $B\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

  Đồ thị nhận giao điểm của 2 đường tiệm cận $I(1; 2)$ làm tâm đối xứng .



2. Đường thẳng $(d): y = -x + m$ cắt *(C)* tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x-1} = -x + m$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2 - (m-2)x + m + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m-2)^2 - 4(m+1) > 0 \\ 1^2 - (m-2).1 + m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m > 0 \\ 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 8 \end{array}\right.$$

Vậy, với $m < 0$ hoặc $m > 8$ thì đường thẳng (d) cắt đồ thì (C) tại hai điểm phẩn biệt.

Ví dụ 3 Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số;

2. Tìm k để đường thẳng y = kx + 2k + 1 cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho khoảng cách từ A và B đến trục hoành bằng nhau.

Lời giải.

1. Xét hàm số y = $\dfrac{2x+1}{x+1}$ (C)

- Tập xác định : D = ¡ \{-1}.
- Sự biến thiên :

o Chiều biến thiên : $y' = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$

Hàm số đồng biến trên các khoảng (-∞ ; -1) và (-1 ; +∞)

o Giới hạn và tiệm cận:

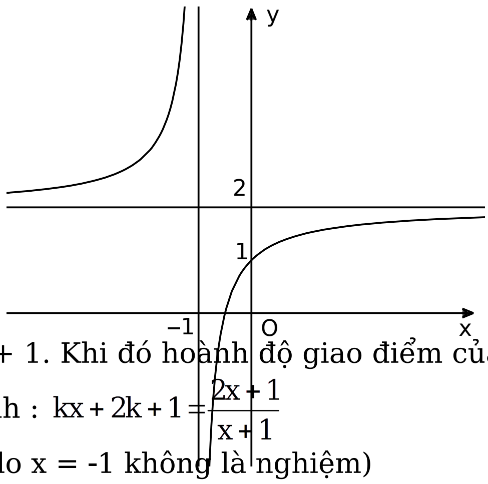
$\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} y = 2$; tiệm cận ngang: y = 2.

$\lim\limits_{x \to (-1)^-} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to (-1)^+} y = -\infty$; tiệm cận đứng : x = -1

ð Bảng biến thiên:

x	-∞		-1		+∞
y'		+	‖		
y	2	↗ +∞	‖	-∞ ↗	2

- Đồ thị :



2. Gọi (d) là đường thẳng y = kx + 2k + 1. Khi đó hoành độ giao điểm của (d) và (C) là nghiệm của phương trình : $kx + 2k + 1 = \dfrac{2x+1}{x+1}$

⇔ (x + 1)(kx + 2k +1) = 2x + 1 (do x = -1 không là nghiệm)

⇔ $kx^2 + (3k - 1)x + 2k = 0$ (1)

Để (d) và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B thì (1) cần có hai nghiệm phân biệt. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ (3k-1)^2 - 8k > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k^2 - (k+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 0 \\ k < 3 - 2\sqrt{2} \vee k > 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Khi k thỏa mãn (2) ta có: $A(x_1;\, kx_1 + 2k + 1)$ và $B(x_2;\, kx_2 + 2k + 1)$, ở đây x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (1).

Ta có : d(A, Ox) = d(B, Ox) $\Leftrightarrow |kx_1 + 2k + 1| = |kx_2 + 2k + 1|$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} kx_1 + 2k + 1 = kx_2 + 2k + 1 \\ kx_1 + 2k + 1 = -kx_2 - 2k - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k(x_1 - x_2) = 0 \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = x_2 \ (\text{do } k \neq 0) \\ k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow k(x_1 + x_2) + 4k + 2 = 0 \quad (\text{do } x_1 \neq x_2)$$

Theo định lí Viet, ta có $x_1 + x_2 = \dfrac{1 - 3k}{k}$, từ đó ta có :

$k\dfrac{1 - 3k}{k} + 4k + 2 = 0 \Leftrightarrow k + 3 = 0 \Leftrightarrow k = -3$.

Rõ ràng k = -3 thỏa mãn (2), nên là giá trị duy nhất cần tìm của tham số k.

Ví dụ 4 Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x - 1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

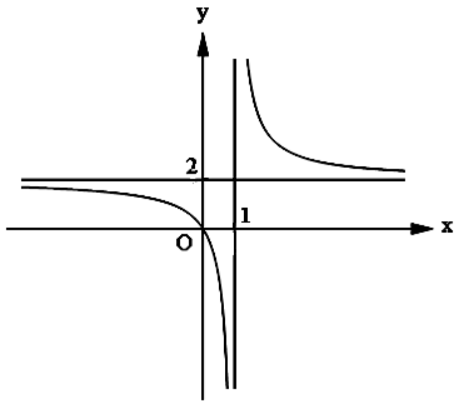
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số. Từ đó suy ra đồ thị của hàm số: $y = \dfrac{2|x|}{|x| - 1}$ (C_1)

2. Biện luận theo m số nghiệm $x \in [-1;2]$ của phương trình: $(m - 2)|x| - m = 0$

Lời giải.

1. + Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

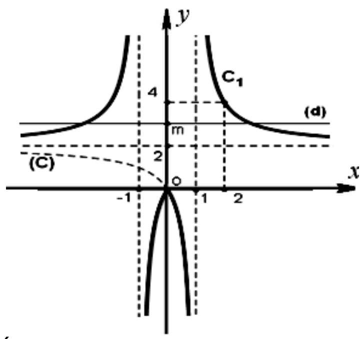


+ Đồ thị *(C)*

* Ta có : $(C_1): y = \dfrac{2|x|}{|x| - 1} = \dfrac{2x}{x - 1}$ khi $x \geq 0$.

Mặt khác $y=\dfrac{2|x|}{|x|-1}$ là hàm số chẵn nên (C_1) nhận Oy làm trục đối xứng. Vậy đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2|x|}{|x|-1}$ (C_1) gồm hai phần:

+ Phần 1: Phần của *(C)* khi $x\ge 0$.
+ Phần 2*:* Đối xứng của phần 1 qua Oy .



2. Ta có : $(m-2)|x|-m=0\Leftrightarrow \dfrac{2|x|}{|x|-1}=m\ \ (1)$.

Số nghiệm $x\in[-1;2]$ của (1) là số giao điểm của (C_1) và $(d): y=m$ trên đoạn $[-1;2]$. Nhìn vào đồ thị ta thấy:

- Khi $\left[\begin{array}{l} m\ge 4 \\ m=0 \end{array}\right.$ thì phương trình (1) có một nghiệm $x\in[-1;2]$.
- Khi $m<0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm $x\in[-1;2]$.

Khi $0<m<4$ thì phương trình (1) không có nghiệm

Ví dụ 5 Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x+1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số ;

2. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $M\left(0;\dfrac{5}{4}\right)$ và tiếp xúc với đồ thị.

Lời giải.

1. • Tập xác định D = $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

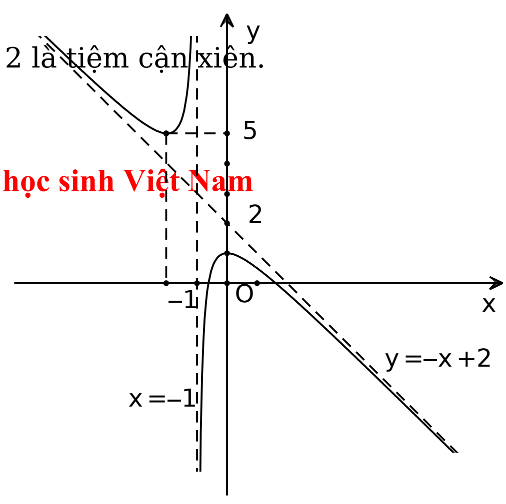
• Sự biến thiên: $y' = \dfrac{-x^2-2x}{(x+1)^2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

o Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to -1^-} y=+\infty;\ \lim\limits_{x\to -1^+} y=-\infty \Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng.

$$y = \frac{-x^2+x+1}{x+1}=-x+2-\frac{1}{x+1}$$

$\lim\limits_{x\to -\infty}\left[y-(-x+2)\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[y-(-x+2)\right]=0 \Rightarrow y = -x + 2$ là tiệm cận xiên.

Bảng biến thiên:



x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	5 Cực tiểu	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	1 Cực đại	↘	$-\infty$

Đồ thị nhận điểm I(–1; 3) làm tâm đối xứng; cắt trục Oy tại (0, 1), cắt trục Ox tại $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};0\right),\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};0\right)$.

2. Gọi (d) là đường thẳng y = $kx+\frac{5}{4}$.

Để (d) tiếp xúc với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ :

$$\begin{cases} \dfrac{-x_0^2+x_0+1}{x_0+1}=kx_0+\dfrac{5}{4} & (1) \\ \dfrac{-x_0^2-2x_0}{(x_0+1)^2}=k & (2) \end{cases} \text{ có nghiệm } x_0$$

Thế k từ (2) vào (1): $\dfrac{-x_0^2+x_0+1}{x_0+1}=\dfrac{-x_0^2-2x_0}{(x_0+1)^2}.x_0+\dfrac{5}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0\neq -1 \\ (-x_0^2+x_0+1)(x_0+1)=-x_0^2-2x_0^2+\dfrac{5}{4}(x_0+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0\neq -1 \\ 3x_0^2-2x_0-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

- Tại x_0 = 1 ⇒ k = $-\frac{3}{4}$, có tiếp tuyến (T_1): y = $-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.
- Tại x_0 = $-\frac{1}{3}$ ⇒ k = $\frac{5}{4}$, có tiếp tuyến (T_2): y = $\frac{5}{4}x+\frac{5}{4}$

Ví dụ 6 Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}$, gọi đồ thị của hàm số là (C)

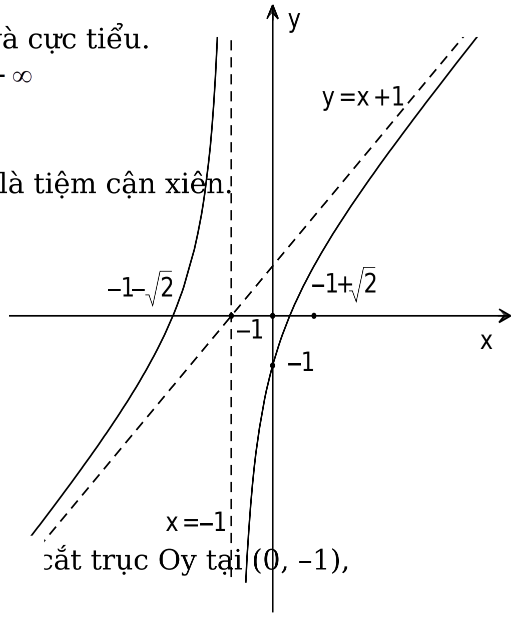
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị *(C)* của hàm số ;

2. Dựa vào đồ thị của hàm số ở câu 1, vẽ đồ thị của hàm số y = $\dfrac{x^2+2|x|-1}{|x|+1}$ và từ đồ thị của hàm số này, biện luận về số nghiệm của phương trình $\dfrac{x^2+2|x|-1}{|x|+1}=a$ theo các giá trị của tham số a.

Lời giải.

1. **1.** y = $\dfrac{x^2+2x-1}{x+1}=x+1-\dfrac{2}{x+1}$.

- Tập xác định D = $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
- Sự biến thiên: y’ $=\dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}>0$ với mọi x thuộc D: hàm số luôn luôn đồng biến trên D, không có cực đại và cực tiểu.



o Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to -1^-} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} y=-\infty$

⇒ x = –1 là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to -\infty}\left[y-(x+1)\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[y-(x+1)\right]=0$ ⇒ y = x + 1 là tiệm cận xiên.

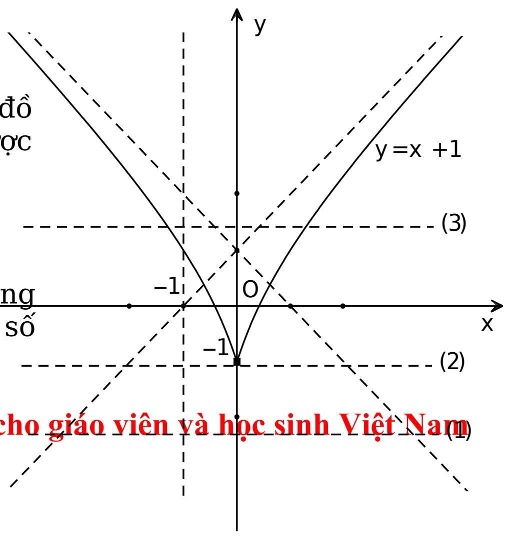
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y’		+	‖	+	
y	$-\infty$ ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Đồ thị nhận điểm I(–1; 0) làm tâm đối xứng, cắt trục Oy tại (0, –1), cắt trục Ox tại $\left(-1-\sqrt{2};0\right)$, $\left(-1+\sqrt{2};0\right)$.

2. y = $\dfrac{x^2+2|x|-1}{|x|+1}$ là một hàm số chẵn (do f(–x)= f(x)) nên đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng.

- Vẽ phần đồ thị của (1) ứng với x ≥ 0.
- Lấy đối xứng của phần đồ thị trên qua trục Oy sẽ được đồ thị của hàm số y = $\dfrac{x^2+2|x|-1}{|x|+1}$ (hình bên).



Số giao điểm của đường thẳng y = a và đồ thị này là số nghiệm của phương trình:

$$\frac{x^2+2|x|-1}{|x|+1}=a.$$

Xét qua 3 vị trí của đường thẳng y = a:

(1): a < –1: vô nghiệm;

(2): a = –1: một nghiệm x = 0;

(3): a > –1: thỏa nghiệm.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C).

1. Chứng minh rằng đồ thị (C) có ít nhất hai trục đối xứng

2. Tìm tất cả những cặp điểm M,N nằm về hai nhánh của (C) sao cho MN có độ dài nhỏ nhất.

3. Tìm tất cả những điểm K thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A tạo với hai trục tọa độ một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

Bài 2. Cho hàm số $y=\frac{2x}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm trên đồ thị (C) hai điểm phân biệt A,B sao cho AB đối xứng qua đường thẳng $d:2x+y-4=0$.

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi $m\in(-1;1)$ đồ thị (C_m): $y=\frac{mx+1}{x+m}$ luôn cắt đường tròn $(C):x^2+y^2=12$ tại bốn điểm phân biệt.

Bài 4. Cho hàm số $y=\frac{3x+2}{x+2}$ có đồ thị là (C).

1. Tìm a,b để đường thẳng $\Delta:y=ax+2b-4$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho M, N đối xứng nhau qua O.

2. Đường thẳng $y=x$ cắt (C) tại hai điểm A, B. Tìm m để đường thẳng $y=x+m$ cắt (C) tại C, D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Bài 5. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C).

1. Tìm những điểm M thuộc (C), sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $\Delta:2x+y-2=0$

∗ Bằng $\frac{6}{\sqrt{5}}$ ∗ Nhỏ nhất

2. Tìm hai điểm A,B thuộc hai nhánh của (C) sao cho AB nhỏ nhất.

3. Tìm $N\in(C)$ sao cho khoảng cách từ N đến Oy gấp đôi khoảng cách từ N đến Ox.

4. Tìm $A\in(C)$ sao cho tổng khoảng cách từ A đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.

Bài 6. Chứng minh rằng với các điểm A,B,C phân biệt thuộc đồ thị $(C): y = -\frac{2}{x}$ thì tam giác ABC cũng có trực tâm H thuộc đồ thị (C).

Bài 7. Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x-2}$ có đồ thị là (C).

1. Tìm những điểm nằm trên (C) cách đều hai trục tọa độ

2. Tìm những điểm M nằm trên (C), sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ nhỏ nhất.

3. Tìm hai điểm A, B nằm về hai nhánh của (C) sao cho AB nhỏ nhất.

4. Tìm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $\Delta: 3x - 4y + 1 = 0$ bằng $\frac{12}{5}$.

Bài 8. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C). Tìm điểm M trên đồ thị (C) sao cho khoảng cách từ M:

1. Đến đường thẳng (d): $2x + y - 2 = 0$ bằng $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.

2. Đến Oy gấp đôi khoảng cách từ M đến Ox.

Bài 9 Chứng minh A,B,C thuộc $(C): y = \frac{x+1}{x-2}$ thì trực tâm H của tam giác ABC cũng thuộc (C).

Bài 10 Cho hàm số $y = \frac{mx+2}{2x+m}$ có đồ thị là (C_m)

1. Tìm những điểm cố định mà họ đồ thị (C_m) luôn đi qua.

2. Tìm tập hợp những điểm mà không có đường cong nào của họ (C_m) đi qua.

Bài 11: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

2. Tìm các điểm trên (C) có các tọa độ x, y đều là số nguyên.

3. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm M tùy ý trên (C) đến hai đường tiệm cận của (C) là một số không đổi.

4. Tìm các điểm trên (C) sao cho tổng các khoảng cách từ điểm đó đến hai đường tiệm cận của (C) nhỏ nhất.

Bài 12: Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$ (1), với m là số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

2. Tìm m để góc giữa hai tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0

Bài 13: Cho hàm số $y=\frac{mx-1}{2x+m}$ có đồ thị là (C_m), m là tham số .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m=2$

2. Xác định tham số m để tiệm cận đứng của đồ thị đi qua điểm $A\left(-1;\sqrt{2}\right)$.

3. Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó .

Bài 14: Cho hàm số $f(x)=\frac{x^2-3x+6}{x-1}$, có đồ thị (C)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)

2. Cho M là một điểm bất kì nằm trên (C), tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A,B. Chứng minh diện tích tam giác IAB(I là giao của hai tiệm cận) không phụ thuộc vào M và M là trung điểm đoạn AB.

Bài 15: Cho hàm số $y=x+2+\frac{1}{x-1}$ có đồ thị là (C)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số (C) của hàm số.
2. Tìm trên (C) những điểm có tọa độ đều là các số nguyên.
3. Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Chứng minh rằng không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua I.
4. Chứng minh rằng tích khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc (C) đến hai tiệm cận không đổi.

Bài 16: Cho hàm số $y=2x-1+\frac{2}{x-1}$ có đồ thị là (C)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

2. Chứng minh rằng đồ thị (C) nhận giao điểm I của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

3. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm bất kỳ thuộc (C) đến hai tiệm cận của (C) là một số không đổi.

Bài 17: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ (C).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.
3. Chứng minh rằng mọi tiếp tuyến của (C) đều tạo với hai tiệm cận một tam giác có diện tích không đổi.

Bài 18: Cho hàm số $y=\frac{x^2+mx+m^2-2m-4}{x-2}$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi m = 1.
2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị cách đều đường thẳng $\Delta: 2x+y+1=0$.

Bài 19: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C).
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).
2. Chứng minh rằng đồ thị (C) có ít nhất hai trục đối xứng
3. Tìm tất cả những cặp điểm M,N nằm về hai nhánh của (C) sao cho MN có độ dài nhỏ nhất.
4. Tìm tất cả những điểm K thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại K tạo với hai trục tọa độ một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

Bài 20: Cho hàm số $y=\frac{2-4x}{1-x}$ có đồ thị (C).
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)của hàm số .
2. Gọi M là một điểm bất kỳ của (C) , d là tiếp tuyến của (C) tại M , d cắt hai đường tiệm cận của (C) tại hai điểm A, B và gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C).
a) Chứng minh M là trung điểm của đoạn AB.
b) Chứng minh tam giác IAB có diện tích không đổi.
c) Tìm điểm M sao cho tam giác IAB có chu vi nhỏ nhất.

Bài 21: Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$ có đồ thị (C).
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C)của hàm số .
2. Tìm các điểm thuộc (C) cách đều hai trục tọa độ .
3. Tìm các điểm thuộc hai nhánh khác nhau của (C) sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó ngắn nhất.

Bài 22:
1. Cho hàm số $y=\frac{mx^2+(2m-1)x-1}{x+2}$ có đồ thị là $(C_m), m\in \mathbb{R}$.
a. Chứng minh rằng với mọi $m>0$ hàm số luôn có cực đại , cực tiểu .
b. .Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số với $m=1$.
c. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số biết tiếp tuyến đi qua $A(1;0)$.

2. Cho hàm số $y=\frac{x^2+3}{x-1}$ (1)
a. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số (1)
b. Tìm trên đường thẳng $y=4$ các điểm mà từ đó kẻ được đúng 2 tiếp tuyến đến đồ thị hàm số.

Bài 23 Tìm m để đường thẳng $y=-2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+x-1}{x}$ tại hai điểm A,B sao cho trung điểm đoạn AB thuộc Oy.

Bài 24 . Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-1}{x}$ tại hai điểm phân biệt A,B sao cho $AB=\sqrt{6}$.

Bài 25. Tìm k để đường thẳng $d: y=kx+1$ cắt đồ thị (C): $y=\frac{x^2+4x+3}{x+2}$ tại 2 điểm phân biệt A,B. Tìm quỹ tích trung điểm I của A,B.

Bài 26. Cho hàm số $y=\frac{x^2-2x-2}{x+1}$ có đồ thị là (C).

1. Tìm hai điểm thuộc hai nhánh của (C) sao cho khoảng cách giữa chúng nhỏ nhất

2. Tìm m để trên đồ thị (C) tồn tại hai điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ thỏa mãn: $\begin{cases} 2x_A+y_A=m \\ 2x_B+y_B=m \end{cases}$.

Bài 27 . Cho hàm số : $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Gọi (C') là đồ thị đối xứng với (C) qua điểm $A(3;4)$. Tìm phương trình đồ thị (C').

Bài 28 . Tìm trên đồ thị (C): $y=\frac{x^2+4x+5}{x+2}$ những điểm M có khoảng cách đến đường thẳng $3x+y+6=0$ nhỏ nhất.

Bài 29 . Tìm trên đồ thị (C): $y=\frac{x^2-3x+6}{x-2}$ tất cả các cặp điểm đối xứng nhau qua điểm $I\left(\frac{1}{2};1\right)$.

http://vnteach.com – **Website dành cho giáo viên và học sinh Việt Nam**