

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỀ CHÍNH THỨC (Đề gồm 1 trang)	ĐỀ HỌC SINH GIỎI HUYỆN Năm học 2023 – 2024 MÔN THI: TOÁN 9 (Thời gian làm bài 120 phút)
--	---

Câu 1: (4.5 điểm)

$$Q = \frac{x}{x - \sqrt{x}} + \frac{2}{x + 2\sqrt{x}} + \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+2\sqrt{x})}$$

1) Rút gọn biểu thức:

2) Cho $f(x) = (x^3 + 15x - 37)^{2023}$. Tính $f(x_0)$ với $x_0 = \sqrt{21 - 8\sqrt{5}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$

3) Chứng tỏ rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào số đo góc nhọn x ?

$$B = \frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x} - 2 \tan^2 x$$

Câu 2. (4.0 điểm)

1) Tìm số tự nhiên n để: $N = n^{2024} + n^{2011} + 1$ là số nguyên tố?

2) Cho số tự nhiên a gồm 60 chữ số 1, số tự nhiên b gồm 30 chữ số 2. Chứng minh $P = a - b$ là một số chính phương.

Câu 3. (4.0 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình: $y^2 + 2xy - 7x - 12 = 0$

2) Giải phương trình: $2x^2 - x - 2 = \sqrt{5x+6}$

Câu 4. (6.5 điểm)

Cho tam giác $\triangle ABC$ nhọn, đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Chứng minh?

1) $S_{\triangle AEF} = \cos^2 A \cdot S_{\triangle ABC}$

2) FH là phân giác của $\angle EFD$

3) Gọi I là giao điểm của AD và EF . Chứng minh $HI \cdot AD = AI \cdot DH$

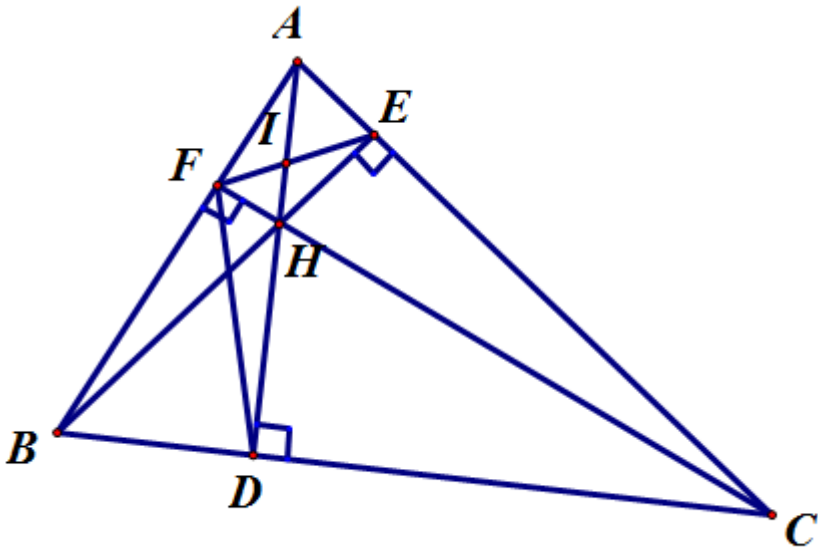
Câu 5. (1.0 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = x + y + z$ khi biết: x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 50$ và $3 \leq x \leq 5; 3 \leq y \leq 5; 3 \leq z \leq 5$.

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN 9 (Vòng 1: 2023- 2024)

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 1	1	$Q = \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$ $= \frac{x(\sqrt{x}+2)+2(\sqrt{x}-1)x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}-2+x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$ $= \frac{x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)}$	0,5 0,5 0,5
	2	$x_0 = \sqrt{21-8\sqrt{5}} + \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{4^2-2.4.\sqrt{5}+5} + \sqrt{5-2.2.\sqrt{5}+2^2}$ $= \sqrt{(4-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = 4-\sqrt{5}-2=2$ $f(x_0) = x_0^3 + 15x_0 - 37 = 8+30-37=1 \Rightarrow f(x_0) = 1^{2023} = 1$	0,5 0,5 0,5
	3	$B = \frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x} - 2\tan^2 x$ $= \frac{1-\sin x+1+\sin x}{1-\sin^2 x} - 2\tan^2 x$ $= \frac{2}{\cos^2 x} - 2\tan^2 x = 2(1+\tan^2 x) - 2\tan^2 x = 2$	0,5 0,5 0,5
	2)		0,5
	1	Ta có: $N = n^{2024} + n^{2012} + 1$ Xét $n=0$ thì $N=1$ không phải nguyên tố; $n=1$ thì $N=3$ nguyên tố Xét $n>1$: $A = n^{2024} - n^2 + n^{2011} - n + n^2 + n + 1$ $= n^2 = ((n^3)^{674} - 1) = n^2(((n^3)^{674} - 1) + n((n^3)^{670} - 1) + (n^2 + n + 1))$ Mà $((n^3)^{674} - 1)$ chia hết cho $n^3 - 1$, suy ra $((n^3)^{674} - 1)$ chia hết cho $n^2 + n + 1$ Tương tự: $((n^3)^{670} - 1)$ chia hết cho $n^2 + n + 1$ Vậy N chia hết cho $n^2 + n + 1 > 1$ nên N là hợp số. Số tự nhiên cần tìm $n=1$	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
	2	$a = \underbrace{111}_{60 \text{ cs } 1} \dots 1 = \frac{10^{60} - 1}{9} \quad ; \quad b = \underbrace{22}_{30 \text{ cs } 2} \dots 2 = 2 \cdot \frac{10^{30} - 1}{9}$ $a - b = \frac{10^{60} - 1}{9} - 2 \cdot \frac{10^{30} - 1}{9} = \frac{(10^{30})^2 - 2 \cdot 10^{30} + 1}{9}$ $= \left(\frac{10^{30} - 1}{3} \right)^2 = \left(\underbrace{111}_{30 \text{ cs } 3} \dots 1 \right)^2$ Vậy $P = a - b$ là số chính phương	0,5 0,5 0,5 0,5
	1	$y^2 + 2xy - 7x - 12 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 8xy - 28x - 48 = 0 \Leftrightarrow (2y - 7)(2y + 7 + 4x) = -1$	1,0

Câu 3 4.0 điểm		<table><tr><td>$2y-7$</td><td>-1</td><td>1</td></tr><tr><td>$2y+7+4x$</td><td>1</td><td>-1</td></tr><tr><td>y</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>x</td><td>-3</td><td>-4</td></tr></table>	$2y-7$	-1	1	$2y+7+4x$	1	-1	y	3	4	x	-3	-4	0,5
	$2y-7$	-1	1												
	$2y+7+4x$	1	-1												
	y	3	4												
x	-3	-4													
	Vậy PT có 2 nghiệm: $(-3;3)$ và $(-4;4)$		0,5												
2	Giải PT.ĐK: $x \geq \frac{-6}{5}$ $2x^2 - x - 2 = \sqrt{5x+6} \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 4 = \sqrt{5x+6} - (x+2)$ $\Leftrightarrow 2(x^2 - x - 2) = \frac{[\sqrt{5x+6} - (x+2)][\sqrt{5x+6} + (x+2)]}{\sqrt{5x+6} + (x+2)}$ $\Leftrightarrow 2(x^2 - x - 2) = \frac{-x^2 + x + 2}{\sqrt{5x+6} + (x+2)} \Leftrightarrow 2(x^2 - x - 2) + \frac{(x^2 - x - 2)}{\sqrt{5x+6} + (x+2)} = 0$ Ta có $\Leftrightarrow (x^2 - x - 2) \left(2 + \frac{1}{\sqrt{5x+6} + x + 2} \right) = 0 (*)$ Mà $2 + \frac{1}{\sqrt{5x+6} + x + 2} > 0$ với $\forall x \geq \frac{-6}{5}$; $(*) \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 (TM) \\ x = 2 \end{cases}$														
	Hình vẽ đúng		0,5												
															

Câu 4 6.5 điểm	1	$\Delta ABE \text{ vuông tại } E \text{ nên } \cos A = \frac{AE}{AB}$ $\Delta ACF \text{ vuông tại } F \text{ nên } \cos A = \frac{AF}{AC}$ $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \text{ . Lại có } \angle BAC \text{ chung } \Rightarrow \Delta AEF : \Delta ABC (c - g - c)$ $\Rightarrow \frac{S_{\Delta AEF}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{AE}{AB} \right)^2 = \cos^2 A \text{ . Hay } \Rightarrow S_{\Delta AEF} = \cos^2 A S_{\Delta ABC}$	0,5 0,5 0,5 0,5
	2	$\left. \begin{array}{l} \cos B = \frac{BD}{AB} \\ \cos B = \frac{BF}{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{BF}{BC}$ $\Rightarrow \Delta BDF : \Delta BAC (c - g - c) \Rightarrow BDF = BCA (1)$ $\Delta AEF : \Delta ABC \Rightarrow AFE = ACB (2)$ Chứng minh tương tự có: Từ (1) và (2) suy ra: $BDF = AFE \Rightarrow EFH = DFH \Rightarrow FH$ là tia phân giác của EFD	0,5 0,5 0,5 0,5
	3	IFD có FH là tia phân giác trong của đỉnh F và $AF \perp FH$ suy ra FA là phân giác ngoài tại đỉnh F của tam giác. $\Rightarrow \frac{IA}{DA} = \frac{FI}{FD} \text{ (Tính chất đường phân giác ngoài) (3)}$ $\text{Lại có } \frac{FI}{FD} = \frac{HI}{HD} \text{ (Tính chất đường phân giác trong) (4)}$ $\frac{IA}{AD} = \frac{IH}{HD}$ Từ (3) và (4) suy ra $IA \cdot HD = IH \cdot AD$ Hay $IA \cdot HD = IH \cdot AD$	0,5 1,0 0,5
Câu 5 1.0 điểm	Theo bài ra: $(x-3)(y-3)(z-3) \geq 0$ và $(5-x)(5-y)(5-z) \geq 0$ $\Leftrightarrow xyz - 3(xy + yz + zx) + 9(x + y + z) - 27 \geq 0 \quad (1) \text{ và}$ $\Leftrightarrow -xyz + 5(xy + yz + zx) - 25(x + y + z) + 125 \geq 0 \quad (2)$ Cộng theo vế (1) và (2) ta có $\Leftrightarrow 2(xy + yz + zx) - 16(x + y + z) + 98 \geq 0 ;$ Thay $50 = x^2 + y^2 + z^2$, ta có: $(x^2 + y^2 + z^2) - 16(x + y + z) + 48 \geq 0 \Leftrightarrow (M^2 - 16M + 64) - 16 \geq 0 \quad (3)$ Do $x, y, z \geq 3 \Leftrightarrow M \geq 9$ Kết hợp với (3) thì: $M - 8 \geq 4 \Leftrightarrow M \geq 12$ - Dấu “=” xảy ra khi $(x, y, z) = (3, 4, 5)$ và các hoán vị.		0,5 0,5