PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN CHƯ SE

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN

NĂM HỌC 2020 – 2021 . MÔN TOÁN

Thời gian làm bài : 150 phút

Ngày thi :12/11/2020

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Tính giá trị biểu thức $\left(a^3+15a-25\right)^{2020}$ với $a=\sqrt[3]{13-7\sqrt{6}}+\sqrt[3]{13+7\sqrt{6}}$

b) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2-2x(2y+1)+5y^2+2y=0$

Câu 2. (5,0 điểm)

a) Chứng minh rằng $\sqrt[3]{2}$ không thể biểu diễn dưới dạng $p+q\sqrt{r}$ với p,q,r là các số hữu tỉ và r dương

b) Xét các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng $\sqrt{8ab+1}+\sqrt{8bc+1}+\sqrt{8ac+1}\le 3(a+b+c)$

Câu 3. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC đường cao CK,H là trực tâm của tam giác. Gọi M là một điểm trên CK sao cho $\angle AMB=90^\circ;S,S_1,S_2$ theo thứ tự là diện tích các tam giác AMB,ABC,ABH

a) Chứng minh $HK.CK=AK.BK$

b) Chứng minh $S=\sqrt{S_1.S_2}$

Câu 4. (4,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông cân tại A, trên cạnh BC lấy một điểm M bất kỳ (M không trùng với B và C). Từ M kẻ ME vuông góc với AB tại E, MF vuông góc với AC tại F

a) Chứng minh rằng khi M di chuyển trên cạnh BC thì đường thẳng qua M và vuông góc với EF luôn đi qua một điểm cố định D

b) Xác định vị trí của điểm M trên cạnh BC để diện tích tam giác EDF có giá trị nhỏ nhất

Câu 5. (3,0 điểm)
Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác.

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) **Tính giá trị biểu thức** $(a^3+15a-25)^{2020}$ **với** $a=\sqrt[3]{13-7\sqrt{6}}+\sqrt[3]{13+7\sqrt{6}}$

b) **Tìm các cặp số nguyên** $(x;y)$ **thỏa mãn** $x^2-2x(2y+1)+5y^2+2y=0$

Lời giải :

a) Ta có : $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$

Áp dụng hằng đẳng thức trên ta có :

$a^3=\left(\sqrt[3]{13-7\sqrt{6}}+\sqrt[3]{13+7\sqrt{6}}\right)^3$

$=13-7\sqrt{6}+13+7\sqrt{6}+3\sqrt[3]{(13-7\sqrt{6})(13+7\sqrt{6})}.\left(\sqrt[3]{13-7\sqrt{6}}+\sqrt[3]{13+7\sqrt{6}}\right)$

$=26+3.\sqrt[3]{13^2-(7\sqrt{6})^2}\,a=26+3(-5)a=26-15a$

$\Leftrightarrow a^3=26-15a\Leftrightarrow a^3+15a-25=1$

Khi đó ta có, $(a^3+15a-25)^{2020}=1^{2020}=1$

b) Ta có :

$x^2-2x(2y+1)+5y^2+2y=0$

$\Leftrightarrow x^2-4xy-2x+5y^2+2y=0$

$\Leftrightarrow x^2-4xy+4y^2-2x+4y+1+y^2-2y+1=2$

$\Leftrightarrow (x-2y)^2-2(x-2y)+1+(y-1)^2=2$

$\Leftrightarrow (x-2y-1)^2+(y-1)^2=2$

Do x,y là các số nguyên nên ta có các trường hợp sau :

$Th1:\begin{cases}x-2y-1=1\\y-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=2\end{cases}$ *)$Th2:\begin{cases}x-2y-1=1\\y-1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$

$Th3:\begin{cases}x-2y-1=-1\\y-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$ *)$Th4:\begin{cases}x-2y-1=-1\\y-1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$

Vậy các cặp số nguyên $(x;y)$ cần tìm là $(6;2),(2;0),(4;2),(0;0)$

Câu 2.

a) **Chứng minh rằng $\sqrt[3]{2}$ không thể biểu diễn dưới dạng $p+q\sqrt{r}$ với p,q,r là các số hữu tỉ và r dương**

Giả sử $\sqrt[3]{2}=p+q\sqrt{r}\Rightarrow 2=\left(p+q\sqrt{r}\right)^3$

$\Leftrightarrow 2=p^3+3p^2q\sqrt{r}+3pq^2r+q^3\sqrt{r^3}$

$\Leftrightarrow 2=p^3+3pq^2r+\sqrt{r}\left(3p^2q+q^3r\right)\Leftrightarrow \sqrt{r}=\dfrac{2-p^3-3pq^2r}{3p^2q+q^3r}$

+)Nếu r là số chính phương hoặc là số hữu tỉ có dạng $\left(\dfrac{m}{n}\right)^2$

$\Rightarrow p+q\sqrt{r}\in\mathbb{Q}$ với mọi số $p,q\in\mathbb{Q}\Rightarrow \sqrt[3]{2}$ là số hữu tỉ

Điều này vô lý vì $\sqrt[3]{2}$ là số vô tỉ

+)Nếu r không là số chính phương hoặc không là số hữu tỉ có dạng $\left(\dfrac{m}{n}\right)^2$

$\Rightarrow r$ là số vô tỉ $\Rightarrow$ vô lý vì $\dfrac{2-p^3-3pq^2r}{3p^2q+q^3r}$ là số hữu tỉ với mọi số $p,q,r\in\mathbb{Q}$

Vậy $\sqrt[3]{2}$ không thể biểu diễn dưới dạng $p+q\sqrt{r}$ với p,q,r là các số hữu tỉ và r dương.

b) **Xét các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. Chứng minh rằng**

$$\sqrt{8ab+1}+\sqrt{8bc+1}+\sqrt{8ca+1}\le 3(a+b+c)$$

Với ba số dương a,b,c xét biểu thức :

$$\left(\sqrt{8ab+1}+\sqrt{8bc+1}+\sqrt{8ca+1}\right)^2=\left(\sqrt{a}.\sqrt{8b+\frac{1}{a}}+\sqrt{b}.\sqrt{8c+\frac{1}{b}}+\sqrt{c}.\sqrt{8a+\frac{1}{c}}\right)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức $Cauchy-schwarz$ cho hai bộ ba số $\left(\sqrt{a};\sqrt{b};\sqrt{c}\right)$ và $\left(\sqrt{8b+\frac{1}{a}};\sqrt{8c+\frac{1}{b}};\sqrt{8a+\frac{1}{c}}\right)$ ta có :

$$\left(\sqrt{a}.\sqrt{8b+\frac{1}{a}}+\sqrt{b}.\sqrt{8c+\frac{1}{b}}+\sqrt{c}.\sqrt{8a+\frac{1}{c}}\right)^2\le(a+b+c)\left(8b+\frac{1}{a}+8c+\frac{1}{b}+8a+\frac{1}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{8ab+1}+\sqrt{8bc+1}+\sqrt{8ca+1}\right)^2\le(a+b+c)\left(8a+\frac{1}{a}+8c+\frac{1}{b}+8a+\frac{1}{c}\right)$$

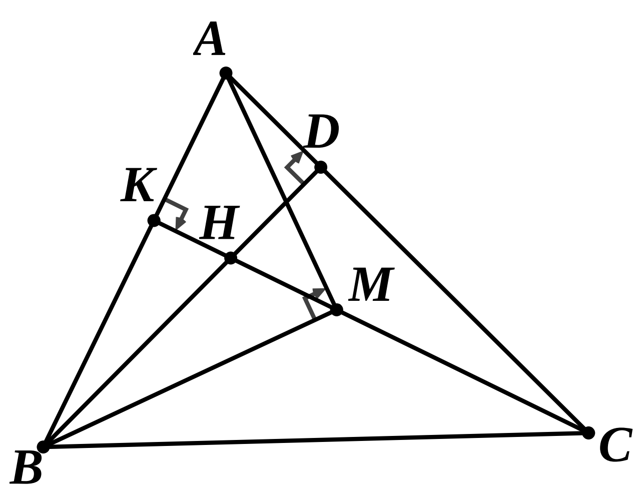
$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{8ab+1}+\sqrt{8bc+1}+\sqrt{8ca+1}\right)^2\le(a+b+c)\left(8a+8b+8c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{8ab+1}+\sqrt{8bc+1}+\sqrt{8ca+1}\right)^2\le(a+b+c).9(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{8ab+1}+\sqrt{8bc+1}+\sqrt{8ca+1}\right)^2\le9(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{8ab+1}+\sqrt{8bc+1}+\sqrt{8ca+1}\le3(a+b+c)(dfcm)$$

Câu 3.



a) **Chứng minh** $HK.CK=AK.BK$

Xét ΔHKB và ΔAKC có : $\angle KBH=\angle KCA$(cùng phụ với $\angle BAC$)

$\angle BKH=\angle CKA\left(=90^\circ\right)\Rightarrow\Delta HKB\backsim\Delta AKC(g.g)$

$$\Rightarrow\frac{HK}{AK}=\frac{BK}{CK}\Rightarrow HK.CK=AK.BK(1)$$

$\Rightarrow S_1.S_2 = \dfrac{AB^2.(KH.CK)}{4} \Rightarrow \sqrt{S_1S_2} = \dfrac{AB\sqrt{KH.CK}}{2}$ (*)

b) **Chứng minh** $S = \sqrt{S_1S_2}$

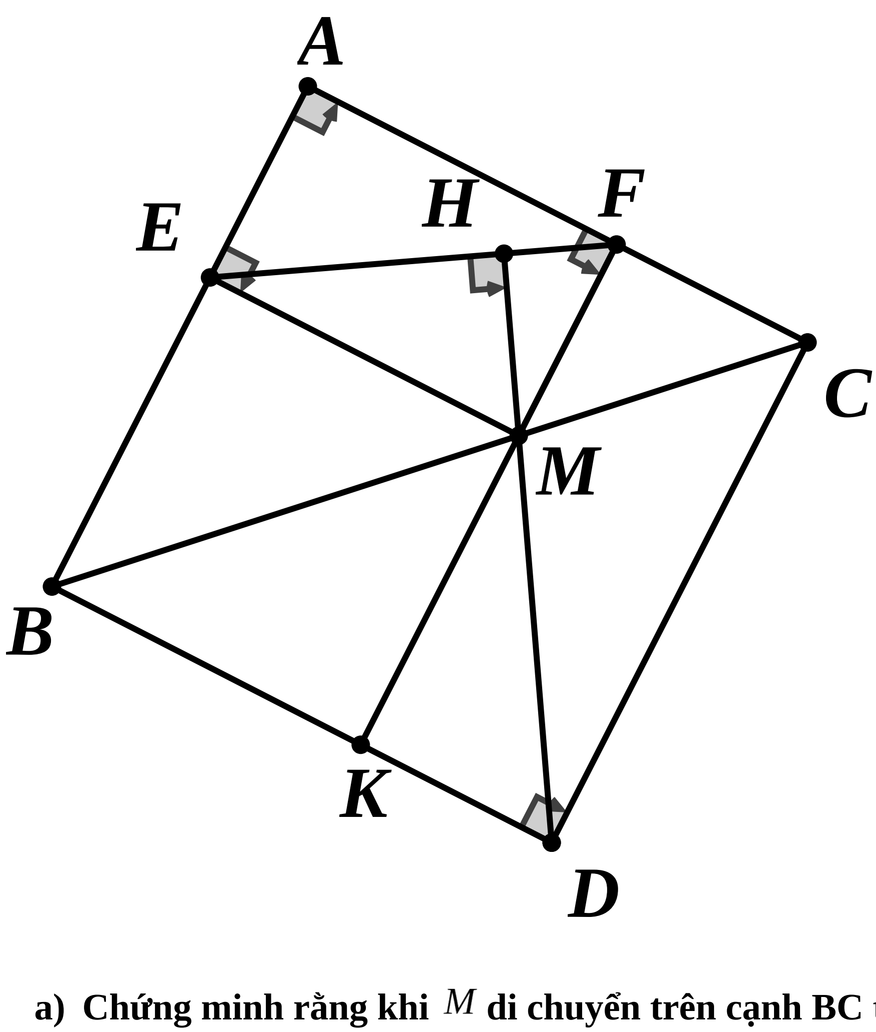
lại có : ΔAMB vuông ở M có đường cao MK

$\Rightarrow AK.BK = MK^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CH.CK = MK^2 \Rightarrow \sqrt{KH.CK} = MK \, (3)$

Thay (3) vào (*) ta được : $\sqrt{S_1S_2} = \dfrac{AB.MK}{2} = S_{ANM} = S$

Câu 4.



a) **Chứng minh rằng khi** M **di chuyển trên cạnh BC thì đường thẳng qua** M **và vuông góc với** EF **luôn đi qua một điểm cố định** D

Kẻ $MH \perp EF$

Gọi D là điểm sao cho tứ giác $ABCD$ là hình vuông.
MD cắt EF tại H. MF cắt BD tại K

Xét ΔBME vuông tại E có $\angle EBM = 45^\circ \Rightarrow \angle EMB = 45^\circ$

$\Rightarrow \Delta BME$ vuông cân tại $E \Rightarrow BE = ME$

Tứ giác $BEMK$ có $\angle B = \angle E = \angle K = 90^\circ$ và $BE = ME \Rightarrow BEMK$ là hình vuông

$\Rightarrow BE = ME = MK = BK \Rightarrow AE = KD$

Xét ΔAME và ΔDMK có : $\angle AEM = \angle MKD (= 90^\circ)$;

$AE = KD (cmt), ME = MK (cmt) \Rightarrow \Delta AME = \Delta DMK (c.g.c)$

$\Rightarrow \angle EAM = \angle KDM$ (hai góc tương ứng)

Mà $\angle EAM = \angle MFE \Rightarrow \angle MFE = \angle KDM$

Lại có : $\angle FDC = \angle MFD$ (hai góc so le trong) nên ta có:

$\angle KDM + \angle MDF + \angle FDC = \angle MFE + \angle MDF + \angle MFD = \angle EFD + \angle MDF$

$\Rightarrow \angle EFD + \angle MDF = 90^\circ \Rightarrow \Delta FDH\ vuong\ tai\ H \Rightarrow DH \perp EF$

Mà $MH \perp EF \Rightarrow M, D, H$ thẳng hàng

Vậy MH luôn đi qua một điểm D cố định

b) Đặt $AB = a, AE = x \Rightarrow BE = a - x (a > 0, 0 < x < a)$

Ta có : $S_{DFE} = S_{ABCD} - S_{BDE} - S_{DFC} - S_{AFE}$

$$= a^2 - \frac{1}{2}a(a - x) - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}x(a - x) = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}x^2$$

$\Rightarrow S_{DEF}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}x^2\right)$ nhỏ nhất

Ta có : $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{3}{4}a^2\right] \geq \frac{1}{2}.\frac{3}{4}a^2$

Vậy $\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}x^2\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}a^2$

Khi đó M là trung điểm cạnh BC

Câu 5. Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác

Ta xếp các đoạn thẳng có độ dài tăng dần $a_1 \leq a_2 \leq .... \leq a_7$. Nếu tồn tại 3 đoạn thẳng $a_k; a_{k+1}; a_{k+2}$ thỏa mãn $a_k + a_{k+1} > a_{k+2}$ thì 3 đoạn thẳng này có thể lập thành một tam giác.

Giả sử ngược lại :

$a_1 + a_2 \le a_3; a_2 + a_3 \le a_4; a_3 + a_4 \le a_5; a_4 + a_5 \le a_6; a_5 + a_6 \le a_7$

Khi đó theo giả thiết :

$a_1 > 10; a_2 > 10 \Rightarrow a_3 > 20 \Rightarrow a_4 > 30 \Rightarrow a_5 > 50 \Rightarrow a_6 > 80 \Rightarrow a_7 > 130$

$\Rightarrow$ Mâu thuẫn với giả thiết cho độ dài mỗi đoạn thẳng nhỏ hơn 100.

Vậy tồn tại 3 đoạn thẳng $a_k; a_{k+1}; a_{k+2}$ mà $a_k + a_{k+1} > a_{k+2}$. Do đó tồn tại 3 đoạn thẳng để có thể ghép thành tam giác