

Nguyễn Văn Giáp - THPT Nguyễn Trung Ngạn: Giới hạn dãy số trong các đề thi HS giỏi.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Dãy số là một lĩnh vực khó và rất rộng, trong các đề thi học sinh giỏi quốc gia, quốc tế cũng thường xuất hiện các bài toán về dãy số. Để giải được các bài toán về dãy số đòi hỏi người làm toán phải có kiến thức tổng hợp về số học, đại số, giải tích. Các vấn đề liên quan đến dãy số cũng rất đa dạng và cũng có nhiều tài liệu viết về vấn đề này, các tài liệu này cũng thường viết khá rộng về các vấn đề của dãy số, các vấn đề được quan tâm nhiều hơn là các tính chất số học và tính chất giải tích của dãy số.

Tính chất số học của dãy số thể hiện như tính chia hết, tính nguyên, tính chính phương... , tính chất giải tích có nhiều dạng nhưng quan trọng là các bài toán tìm giới hạn dãy số. Các bài toán về dãy số thường là các bài toán hay và khó, tác giả đã sưu tầm, chọn lọc và phân loại theo từng chủ đề

Sáng kiến kinh nghiệm với đề tài “**Giới hạn dãy số trong các đề thi học sinh giỏi**” có mục đích trình bày một cách hệ thống, chi tiết giới hạn dãy số. Đề tài được trình bày với 2 chương.

Chương 1. *Một số kiến thức chuẩn bị.* Chương này hệ thống lại kiến thức cơ bản nhất về dãy số, số học, phương pháp sai phân sẽ được dùng để giải quyết các bài toán trong chương 2.

Chương 2. *Giới hạn của dãy số.* Chương này đề cập đến một số bài toán về giới hạn dãy số như: Giới hạn của tổng, dãy con và sự hội tụ của dãy số, dãy số xác định bởi phương trình cùng với phương pháp giải cụ thể cho từng dạng toán.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

- Nghiên cứu lý luận về kỹ năng, kỹ năng giải toán và một số biện pháp rèn luyện kỹ năng giải toán cho học sinh THPT
- Rèn luyện kỹ năng giải các bài toán về giới hạn dãy số
- Tìm hiểu thực trạng của việc học dãy số trong chương trình môn toán của trường THPT
- Tìm hiểu bài toán khó về giới hạn dãy số trong các đề thi học sinh giỏi

➤ X©y dùng hồ thềng c, c bụi tềp ®iỐn h×nh nh»m rìn luyỐn kỹ năng tổng hợp kiến thức đối với học sinh giỏi

➤ Gii ý c, ch vỀn đông hồ thềng bụi tềp ®iỐn h×nh trong viỐc rìn luyỐn kỹ năng gi¶i to, n nãi chung, gặp phÇn ph, t triỐn trÝ tuỐ cho học sinh.

3. Phư→ng ph, p nghiªn cứu

a) Phư→ng ph, p nghiªn cứu lý luỀn:

Nghiªn cứu mét sè gi, o tr×nh phư→ng ph, p d¹y hăc m«n to, n, SGK phæ th«ng, S, ch bài dưỡng gi, o viªn THPT, c, c s, ch tham kh¶o, c, c t¹p chÝ vÒ gi, o dộc liªn quan ®Ốn ®Ò tui.

b) Phư→ng ph, p tæng kỐt kinh nghiÖm:

Tæng kỐt kinh nghiÖm qua nhiÒu năm trực tiỐp gi¶ng d¹y, qua trao ®æi kinh nghiÖm vớ mét sè gi, o viªn giải bé m«n To, n ở trường THPT. Tở ®ã x©y dùng ®uíc hồ thềng c, c bụi tềp ®iỐn h×nh vµ nh÷ng gii ý d¹y hăc nh»m rìn luyỐn kỹ năng tìm giới hạn hàm số

c) Phư→ng ph, p quan s, t, ®iÒu tra:

Quan s, t vµ ®iÒu tra thục tr¹ng d¹y hăc gi¶i to, n về dãy số ®èi vớ hăc sinh lớp 11 và 12, qua ®ã n¾m b¾t ®uợc nhu cÇu của viỐc rìn luyỐn kỹ năng giải toán về dãy số của học sinh

4. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đề tài được nghiên cứu đối với học sinh các lớp 11A1, 11A2, 11A3 và học sinh trong đội tuyển học sinh giỏi toán lớp 12 trường THPT Nguyễn Trung Ngạn.

5. Thời gian nghiên cứu.

Đề tài được nghiên cứu trong các năm học 2009 – 2010, 2010 – 2011, 2011- 2012

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1.DÃY SỐ

1.1.1.Định nghĩa

Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu:

$$u: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u(n)$$

Dãy số thường được viết dưới dạng khai triển

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

Trong đó $u_n = u(n)$ và gọi u_1 là số hạng đầu, u_n là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số

Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn

Dạng khai triển của nó là $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$ trong đó u_1 là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

- Dãy số (u_n) được gọi là:
 - Dãy đơn điệu tăng nếu $u_{n+1} > u_n$, với mọi $n = 1, 2, \dots$
 - Dãy đơn điệu không giảm nếu $u_{n+1} \geq u_n$, với mọi $n = 1, 2, \dots$
 - Dãy đơn điệu giảm nếu $u_{n+1} < u_n$, với mọi $n = 1, 2, \dots$
 - Dãy đơn điệu không tăng nếu $u_{n+1} \leq u_n$, với mọi $n = 1, 2, \dots$
- Dãy số (u_n) được gọi là
 - Dãy số bị chặn trên nếu tồn tại số M sao cho $u_n < M$, với mọi $n = 1, 2, \dots$
 - Dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại số m sao cho $u_n > m$, với mọi $n = 1, 2, \dots$
 - Dãy số bị chặn nếu vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới
- Dãy số (u_n) được gọi là tuần hoàn với chu kì k nếu $u_{n+k} = u_n$, với $\forall n \in \mathbb{N}$
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy dừng nếu tồn tại một số N_0 sao cho $u_n = C$ với mọi $n \geq N_0$, (C là hằng số, gọi là hằng số dừng)

1.1.2. Cách cho một dãy số

- Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát

Ví dụ:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi

Ví dụ: Dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 50 \\ u_{n+1} = 4u_n + 5u_{n-1} - 1975 \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

- Dãy số cho bằng phương pháp mô tả:

Ví dụ: Cho $a_1 = 19, a_2 = 98$. Với mỗi số nguyên $n \geq 1$, xác định a_{n+2} bằng số dư của phép chia $a_n + a_{n+1}$ cho 100.

1.1.3. Một vài dãy số đặc biệt

a) Cấp số cộng.

Định nghĩa. Dãy số $u_1, u_2, u_3, \dots$ được gọi là một cấp số cộng với công sai d ($d \neq 0$) nếu $u_n = u_{n-1} + d$ với mọi $n = 2, 3, \dots$

Tính chất

$$u_n = u_1 + (n-1)d$$

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \text{ với mọi } k = 2, 3, \dots$$

Nếu cấp số cộng hữu hạn phần tử $u_1, u_2, \dots, u_n$ thì

$$u_1 + u_n = u_k + u_{n-k} \text{ với mọi } k = 2, 3, \dots, n-1.$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d]$$

b) Cấp số nhân.

Định nghĩa.. Dãy số $u_1, u_2, u_3, \dots$ được gọi là một cấp số nhân với công bội q ($q \neq 0, q \neq 1$) nếu $u_n = u_{n-1}q$ với mọi $n = 2, 3, \dots$

Tính chất.

$$u_n = u_1 q^{n-1} \text{ với mọi } n = 2, 3, \dots$$

$$u_k^2 = u_{k-1} u_{k+1} \text{ với mọi } k = 2, 3, \dots$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

c) Dãy Fibonacci.

Định nghĩa. Dãy $u_1, u_2, \dots$ được xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad \forall n = 3, 4, \dots \end{cases}$$

được gọi là dãy Fibonacci.

Bằng phương pháp sai phân có thể tìm được công thức tổng quát của dãy là:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

1.1.4 Giới hạn của dãy số

Định nghĩa. Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là hằng số thực a hữu hạn nếu với mọi số dương ε (có thể bé tùy ý), luôn tồn tại chỉ số $n_0 \in \mathbb{N}$ (n_0 có thể phụ thuộc vào ε và vào dãy số (u_n) đang xét), sao cho với mọi chỉ số $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ ta luôn có $|u_n - a| < \varepsilon$. Khi đó kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ hoặc $\lim u_n = a$ và còn nói rằng dãy số (u_n) hội tụ về a . Dãy số không hội tụ gọi là dãy phân kì

Định lý 1. Nếu một dãy số hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất

Định lý 2. (Tiêu chuẩn hội tụ Weierstrass)

- a) Một dãy số đơn điệu và bị chặn thì hội tụ.
- b) Một dãy số tăng và bị chặn trên thì hội tụ.
- c) Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

Định lý 3. Nếu $(u_n) \rightarrow a$ và $(v_n) \subset (u_n)$, $(v_n) \neq C$ thì $(v_n) \rightarrow a$

Định lý 4. (Định lý kẹp giữa về giới hạn)

Nếu với mọi $n \geq n_0$ ta luôn có $u_n \leq x_n \leq v_n$ và $\lim u_n = \lim v_n = a$ thì $\lim x_n =$

a

Định lý 5 (Định lý Lagrange) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trong khoảng $(a; b)$ thì tồn tại $c \in (a; b)$ thỏa mãn: $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Định lý 6 (Định lý trung bình Cesaro)

Nếu dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn là a thì dãy số các trung bình cộng

$\left(\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} \right)$ cũng có giới hạn là a

Định lý này có thể phát biểu dưới dạng tương đương sau:

Định lý Stolz

Nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = a$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = a$

Ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $a = 0$

Vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = a$ nên với mọi $\varepsilon > 0$ luôn tồn tại N_0 sao cho với mọi $n \geq N_0$, ta có

$|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$. Khi đó, với mọi $n > N_0$ ta có

$$\left| \frac{u_n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} (|u_{N_0}| + |u_{N_0+1} - u_{N_0}| + \dots + |u_n - u_{n-1}|) < |u_{N_0}| \cdot \frac{1}{n} + (n - N_0) \frac{\varepsilon}{n}$$

Giữ N_0 cố định, ta có thể tìm được $N_1 > N_0$ sao cho $\frac{1}{N_1 |u_{N_0}|} < \varepsilon$

Khi đó với mọi $n > N_1$ ta sẽ có $\left| \frac{u_n}{n} \right| < 2\varepsilon$. Vậy nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0$

Định lý 7: Cho $f: D \rightarrow D$ là hàm liên tục. Khi đó

1) Phương trình $f(x) = x$ có nghiệm $\iff$ phương trình $f_n(x) = x$ có nghiệm

2) Gọi α, β là các mút trái, mút phải của D . Biết $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} [f(x) - x]$ và

$\lim_{x \rightarrow \beta^-} [f(x) - x]$ cùng dương hoặc cùng âm. Khi đó phương trình $f(x) = x$

có nghiệm duy nhất phương trình $f_n(x) = x$ có nghiệm duy nhất

Trong đó $f_n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{n \text{ lần}}$

Chứng minh

1) a) Nếu x_0 là nghiệm của phương trình $f(x) = x$ thì x_0 cũng là nghiệm của phương trình $f_n(x) = x$

b) Nếu phương trình $f(x) = x$ vô nghiệm thì $f(x) - x > 0$ hoặc $f(x) - x < 0$ với mọi $x \in D$ do đó $f_n(x) - x > 0$ hoặc $f_n(x) - x < 0$ với mọi $x \in D$ nên phương trình $f_n(x) = x$ cũng vô nghiệm

2) a) Giả sử phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất là x_0 thì đây cũng là một nghiệm của phương trình $f_n(x) = x$. Đặt $F(x) = f(x) - x$ do $F(x)$ liên tục trên $(x_0; \beta)$ và $(\alpha; x_0)$ nên $F(x)$ giữ nguyên một dấu.

Nếu $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} [f(x) - x]$ và $\lim_{x \rightarrow \beta^-} [f(x) - x]$ cùng dương thì $F(x) > 0$ trong

khoảng $(x_0; \beta)$ và $(\alpha; x_0)$ suy ra $f(x) > x$ với mọi $x \in D \setminus \{x_0\}$

Xét $x_1 \in D \setminus \{x_0\}$ suy ra $f(x_1) > x_1 \Rightarrow f(f(x_1)) > f(x_1) > x_1$. Từ đó $f_n(x_1) > x_1$ nên x_1 không là nghiệm của phương trình $f_n(x) = x$. Vậy phương trình $f_n(x) = x$ có nghiệm duy nhất $x = x_0$.

Nếu $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} [f(x) - x]$ và $\lim_{x \rightarrow \beta^-} [f(x) - x]$ cùng âm chứng minh tương tự.

b) Ta thấy mọi nghiệm của phương trình $f(x) = x$ đều là nghiệm của phương trình $f_n(x) = x$, do đó nếu phương trình $f_n(x) = x$ có nghiệm duy nhất thì phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất.

Định lý 8. Cho hàm $f: D \rightarrow D$ là hàm đồng biến, dãy (x_n) thỏa mãn $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó:

a) Nếu $x_1 < x_2$ thì dãy (x_n) tăng

b) Nếu $x_1 > x_2$ thì dãy (x_n) giảm

Chứng minh

a) Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp

Với $n = 1$ ta có $x_1 < x_2$ mệnh đúng

Giả sử mệnh đề đúng với $n = k (k \geq 1)$ tức $u_k < u_{k+1}$ khi đó $f(u_k) < f(u_{k+1})$ suy ra $u_{k+1} < u_{k+2}$ (đpcm)

b) Chứng minh tương tự

Định lý 9. Cho hàm $f: D \rightarrow D$ là hàm nghịch biến, dãy (x_n) thỏa mãn $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó:

a) Các dãy (x_{2n+1}) và (x_{2n}) đơn điệu, trong đó một dãy tăng, một dãy giảm

b) Nếu dãy (x_n) bị chặn thì $\exists \alpha = \lim x_{2n}$ và $\beta = \lim x_{2n+1}$.

c) Nếu $f(x)$ liên tục thì α, β là nghiệm của phương trình $f(f(x)) = x$ (1).

Vì vậy nếu phương trình (1) có nghiệm duy nhất thì $\alpha = \beta$ và $\lim x_n = \alpha = \beta$

Chứng minh

a) Vì $f(x)$ là hàm nghịch biến nên $f(f(x))$ đồng biến. Áp dụng định lý 2 ta có điều phải chứng minh.

b) Suy ra từ a)

c) Ta có $f(f(x_{2n})) = f(x_{2n+1}) = x_{2n+2}$ và $\lim f(f(x_{2n})) = \lim x_{2n+2} = \alpha, \lim x_{2n} = \alpha$ do $f(x)$ liên tục nên $f(f(\alpha)) = \alpha$

Chứng minh tương tự ta có $f(f(\beta)) = \beta$

Vậy α, β là nghiệm phương trình $f(f(x)) = x$

1.2.SƠ LƯỢC VỀ PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN

1. *Định nghĩa 1.* Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, Đặt $x_k = x_0 + kh (k \in \mathbb{N}^*)$ với $x_0 \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}$ bất kì, cho trước. Gọi $y_k = f(x_k)$, khi đó hiệu số $\Delta y_k := y_{k+1} - y_k (k \in \mathbb{N}^*)$ được gọi là sai phân cấp 1 của hàm số $f(x)$

Hiệu số $\Delta^2 y_k := \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = \Delta(\Delta y_k) (k \in \mathbb{N}^*)$ được gọi là sai phân cấp 2 của hàm số $f(x)$. Tổng quát $\Delta^i y_k := \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k = \Delta(\Delta^{i-1} y_k) (k \in \mathbb{N}^*)$ được gọi là sai phân cấp i của hàm số $f(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n, \dots$)

Mệnh đề. Sai phân mọi cấp đều có thể biểu diễn theo các giá trị của hàm số: $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$

2. *Định nghĩa 2.* Phương trình sai phân (cấp k) là một hệ thức tuyến tính chứa sai phân cấp k

$$f(y_n, \Delta y_n, \Delta^2 y_n, \dots, \Delta^k y_n) = 0 \quad (1)$$

Vì sai phân các cấp đều có thể biểu diễn theo các giá trị của hàm số nên ta có thể viết phương trình dạng

$$a_0 y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + \dots + a_k y_n = f(n) \quad (2)$$

trong đó $a_0, a_1, \dots, a_k, f(n)$ là các giá trị đã biết, còn $y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}$ là các giá trị chưa biết.

Hàm số y_n biến n thỏa mãn (2) gọi là nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính (2)

3. Phương pháp giải phương trình sai phân tuyến tính

Phương trình $a_0 y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + \dots + a_k y_n = f(n)$ được gọi là phương trình sai phân tuyến tính cấp k.

Giải

- Giải phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất tương ứng

- Giải phương trình đặc trưng

$$a_0 \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_{k-1} \lambda + a_k = 0 \quad (*)$$

- Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng

+ Nếu (*) có k nghiệm thực khác nhau là $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ thì nghiệm tổng quát là

$$\hat{y}_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \dots + c_k \lambda_k^n \quad (1)$$

Trong đó $c_1, c_2, \dots, c_k$ là các hằng số tùy ý

+ Nếu trong (*) có nghiệm thực λ_j bội s thì nghiệm tổng quát là

$$\hat{y}_n = \left(\sum_{i=1}^{s-1} c_{j+i} n^i \right) \lambda_j^n + \sum_{i=1, i \neq j}^k c_i \lambda_i^n$$

+ Nếu phương trình (*) có nghiệm phức đơn $\lambda_j = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ thì cũng có nghiệm $\overline{\lambda_j} = r(\cos \theta - i \sin \theta)$

Đặt $\lambda_{j+1} = \overline{\lambda_j}$. Để thu được công thức tổng quát, trong công thức (1) ta

thay bộ phận $c_j \lambda_j^n + c_{j+1} \lambda_{j+1}^n$ bởi bộ phận tương ứng $c_j r^n \cos n\theta + c_{j+1} r^n \sin n\theta$

+ Nếu phương trình (*) có nghiệm phức bội s

$$\lambda_j = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{j+s-1} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Thì (*) cũng có nghiệm phức bội s liên hợp với λ_j là $\overline{\lambda_j}$ mà ta đặt là

$$\lambda_{j+s} = \lambda_{j+s+1} = \dots = \lambda_{j+2s-1} = r(\cos \theta - i \sin \theta)$$

Trong trường hợp này, để thu được công thức nghiệm tổng quát, trong công thức (1) ta thay bộ phận

$$c_j \lambda_j^n + c_{j+1} \lambda_{j+1}^n + \dots + c_{j+2s-1} \lambda_{j+2s-1}^n$$

bởi bộ phận tương ứng

$$\left(\sum_{i=0}^{s-1} c_{j+i} n^i \right) r^n \cos \theta + \left(\sum_{i=0}^{s-1} c_{j+s+i} n^i \right) r^n \sin \theta$$

- Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính cấp k.

Nghiệm

tổng quát có dạng

$$y_n = \hat{y}_n + y_n^*$$

Trong đó + y_n là nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính cấp k

+ $\hat{y}_n$ là nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất

tương ứng

+ y_n^* là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất

Chương 2.

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

2.1. GIỚI HẠN CỦA TỔNG

Các bài toán về tìm giới hạn của tổng ta thu gọn tổng đó bằng cách phân tích hạng tử tổng quát thành hiệu các hạng tử nối tiếp nhau để các hạng tử có thể triệt tiêu, cuối cùng đưa tổng đó về biểu thức chỉ còn chứa x_n , sau đó tìm $\lim x_n$.

Bài 1.

Cho dãy số (x_n) ($n = 1, 2, \dots$) được xác định như sau:

$$x_1 = 1 \text{ và } x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1} \text{ với } n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Đặt } y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 2} \quad (n = 1, 2, \dots). \text{ Tìm } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

Lời giải

Ta có $x_2 = 5$ và $x_n > 0$ với mọi $n = 1, 2, \dots$

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1} = \sqrt{(x_n^2+3x_n)(x_n^2+3x_n+2)+1} = x_n^2+3x_n+1 \quad (1)$$

Từ đó suy ra

$$x_{n+1} + 1 = x_n^2 + 3x_n + 2 = (x_n + 1)(x_n + 2)$$

$$\frac{1}{x_{n+1} + 1} = \frac{1}{(x_n + 1)(x_n + 2)} = \frac{1}{x_n + 1} - \frac{1}{x_n + 2} \Rightarrow \frac{1}{x_n + 2} = \frac{1}{x_n + 1} - \frac{1}{x_{n+1} + 1}$$

$$\text{Do đó } y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i + 2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i + 1} - \frac{1}{x_{i+1} + 1} \right) = \frac{1}{x_1 + 1} - \frac{1}{x_{n+1} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x_{n+1} + 1}$$

$$\text{Từ (1) } x_{k+1} = x_k^2 + 3x_k + 1 > 3x_k \geq 3 \cdot 3^{k-1} = 3^k$$

$$\text{Ta dễ dàng chứng minh bằng quy nạp } x_n > 3^{n-1} \quad (2)$$

$$\text{Nên } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{1}{2} \text{ (vì do (2) } x_{n+1} > 3^n)$$

. Ta có thể chứng minh $\lim x_n = +\infty$ với cách khác:

Dễ thấy (x_n) là dãy tăng, giả sử $\lim x_n = a$ ($a \geq 1$)

$$\text{Nên ta có } a = \sqrt{a(a+1)(a+2)(a+3)+1}$$

$$\text{Suy ra } a^2 = a(a+1)(a+2)(a+3) + 1 \text{ hay } a^4 + 6a^3 + 10a^2 + 6a + 1 = 0$$

Rõ ràng phương trình này không có nghiệm thỏa mãn $a \geq 1$. Vậy $\lim x_n = +\infty$

Bài 2. (HSG QG năm 2009)

Cho dãy (x_n) ($n = 1, 2, \dots$) xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} \quad (n=2,3,\dots) \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (y_n) ($n = 1, 2, \dots$) với $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2}$ có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

Lời giải

Từ giả thiết ta có $x_n > 0 \quad \forall n \geq 1$

$$\text{Ta có } x_n - x_{n-1} = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} - x_{n-1} = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} - x_{n-1}}{2} > 0 \quad \forall n \geq 2$$

Do đó dãy (x_n) tăng. Giả sử $\lim x_n = a$ thì $a > 0$ và

$$a = \frac{\sqrt{a^2 + 4a} + a}{2} \Leftrightarrow a = 0 \text{ (vô lý)}$$

Vậy $\lim x_n = +\infty$

$$\text{Từ } x_n = \frac{\sqrt{x_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + x_{n-1}}{2} \quad \forall n \geq 2 \text{ suy ra}$$

$$x_n^2 = (x_n + 1)x_{n-1} \Rightarrow \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} \quad \forall n \geq 2$$

Do đó

$$y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} = \frac{1}{x_1^2} + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) + \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n} \right) = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_n} = 6 - \frac{1}{x_n} \quad \forall n \geq 2$$

Suy ra $y_n < 6 \quad \forall n \geq 1$ và dãy (y_n) tăng vì $y_n = y_{n-1} + \frac{1}{x_n} > y_{n-1}$

Vậy (y_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim y_n = 6$

Bài 3.

Xét dãy số (x_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) xác định bởi:

$$x_1 = 2 \text{ và } x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2 + 1) \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Đặt } S_n = \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n}$$

$$\text{Tìm } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

Lời giải

Ta có thể tổng quát hóa bài toán như sau:

Cho dãy (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 - (b+c)u_n + c^2}{b-c} \end{cases}$$

Ta chứng minh $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i + b} = \frac{1}{u_1 + c} - \frac{1}{u_{n+1} + c}$

Thật vậy.

Ta có $u_{n+1} = \frac{u_n^2 - (b+c)u_n + c^2}{b-c}$ suy ra

$$u_{n+1} + c = \frac{u_n^2 - (b+c)u_n + bc}{b-c} = \frac{(u_n + b)(u_n + c)}{b-c}$$

$$\text{Từ đó } \frac{1}{u_{n+1} + c} = \frac{1}{u_n + c} - \frac{1}{u_n + b} \Rightarrow \frac{1}{u_n + b} = \frac{1}{u_n + c} - \frac{1}{u_{n+1} + c}$$

Khai triển và ước lượng được

$$\frac{1}{u_1 + b} = \frac{1}{u_1 + c} - \frac{1}{u_2 + c}$$

$$\frac{1}{u_2 + b} = \frac{1}{u_2 + c} - \frac{1}{u_3 + c}$$

.....

$$\frac{1}{u_n + b} = \frac{1}{u_n + c} - \frac{1}{u_{n+1} + c}$$

$$\text{Do đó } S_n = \frac{1}{u_1 + c} - \frac{1}{u_{n+1} + c}$$

Từ đó vận dụng vào bài toán trên với $b=1, c=-1$ ta có

$$S_n = \frac{1}{x_1 - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1} = 1 - \frac{1}{x_{n+1} - 1}$$

Mà $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x_n - 1)^2 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy (x_n) là dãy tăng. Giả sử

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \quad (a > 2)$. Thì $2a = a^2 + 1$ suy ra $a = 1$. Vô lý.

Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$. Do đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$

Nhận xét. Trong các bài toán tổng quát ta có thể thay các giá trị của a, b, c khác nhau để được các bài toán mới. Chẳng hạn:

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn:

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 - u_n + 9}{5} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } S_n = \frac{1}{2+u_1} + \frac{1}{2+u_2} + \dots + \frac{1}{2+u_n}$$

Tìm $\lim S_n$

Bài 4.

Cho dãy số (x_n) được xác định bởi: $x_1 = 1$; $x_{n+1} = \frac{(2x_n + 1)^{2012}}{2012} + x_n$. Với n là số nguyên dương.

$$\text{Đặt } u_n = \frac{(2x_1 + 1)^{2011}}{2x_2 + 1} + \frac{(2x_2 + 1)^{2011}}{2x_3 + 1} + \frac{(2x_3 + 1)^{2011}}{2x_4 + 1} + \dots + \frac{(2x_n + 1)^{2011}}{2x_{n+1} + 1}$$

Tìm $\lim u_n$

Lời giải

$$\text{Ta có } x_{n+1} - x_n = \frac{(2x_n + 1)^{2012}}{2012}, \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2x_n + 1} - \frac{1}{2x_{n+1} + 1} = \frac{2(x_{n+1} - x_n)}{(2x_n + 1)(2x_{n+1} + 1)} = \frac{(2x_n + 1)^{2011}}{1006(2x_{n+1} + 1)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{(2x_i + 1)^{2011}}{2x_{i+1} + 1} = 1006 \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2x_i + 1} - \frac{1}{2x_{i+1} + 1} \right) = 1006 \left(\frac{1}{2x_1 + 1} - \frac{1}{2x_{n+1} + 1} \right)$$

Mặt khác: $x_{n+1} - x_n \geq 0$ nên dãy (x_n) là dãy số tăng $\forall n \geq 1$. Nếu (x_n) bị chặn thì $\lim x_n$ tồn tại.

$$\text{Đặt } \lim x_n = a \Rightarrow a \geq 1 \text{ và } a = \frac{(a+1)^{2012}}{2012} + a \text{ (vô lý). Suy ra } (x_n) \text{ không bị}$$

$$\text{chặn trên hay } \lim x_n = +\infty \text{ suy ra } \lim \frac{1}{2x_{n+1} + 1} = 0$$

$$\text{Suy ra } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1006}{3}$$

Bài 5

Cho dãy số (x_n) với $n = 1, 2, \dots$ được xác định bởi:

$$x_1 = a, (a > 1), x_2 = 1.$$

$$x_{n+2} = x_n - \ln x_n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{Đặt } S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \ln \sqrt{x_{2k+1}} \quad (n \geq 2)$$

$$\text{Tìm } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{S_n}{n} \right)$$

Lời giải

Nhận xét rằng $x_{2n} = 1, n = 1, 2, \dots$ do $\ln 1 = 0$ suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = 1$

Tiếp theo ta chứng minh dãy (x_{2n+1}) cũng có giới hạn là 1.

Xét hàm số $f(x) = x - \ln x$ liên tục và đồng biến trong $(1; +\infty)$ vì $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$ với mọi $x > 1$

Trước hết ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp, dãy (x_{2n+1}) bị chặn dưới bởi 1. Theo giả thiết thì $x_1 = a > 1$, giả sử $x_{2k+1} > 1$ thì $f(x_{2k+1}) > f(1) > 1$ nên hiển nhiên $x_{2k+3} > 1$ tức dãy (x_{2n+1}) bị chặn dưới bởi 1.

Tiếp theo ta chứng minh dãy (x_{2n+1}) là dãy giảm. Thật vậy, do $x_{2n+1} > 1$ nên $\ln x_{2n+1} > 0$ vì thế $x_{2n+3} - x_{2n+1} = -\ln x_{2n+1} < 0$, tức dãy (x_{2n+1}) là dãy giảm

Từ đó suy ra (x_{2n+1}) có giới hạn $c = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n+1}$

Chuyển qua giới hạn dãy số ta được $c = c - \ln c \implies c = 1$

Vậy dãy số (x_n) có giới hạn là 1.

Theo định lý Cessaro, ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}}{2n} \right) = 1 \text{ hay } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x_1 + x_3 + \dots + x_{2n+1}) + (x_2 + x_4 + \dots + x_{2n})}{2n} \right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{nx_1 - (n-1)\ln x_1 - (n-2)\ln x_3 - \dots - \ln x_{2n-3} + n}{2n} \right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{2} - \frac{S_n}{n} + \frac{1}{2} \right) = 1 \text{ hay } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{S_n}{n} \right) = \frac{a-1}{2}$$

2.2. DÃY CON VÀ SỰ HỘI TỤ CỦA DÃY SỐ

Khi khảo sát sự hội tụ của dãy số ta thường sử dụng các định lý về tính đơn điệu và bị chặn, nếu dãy không đơn điệu thì xét dãy với chỉ số chẵn, chỉ số lẻ. Tuy nhiên có những dãy số phức tạp, tăng giảm bất thường, trong trường hợp như thế ta thường xây dựng các dãy số phụ đơn điệu, chứng minh các dãy số phụ có giới hạn, sau đó chứng minh dãy số ban đầu có cùng giới hạn, các dãy số phụ phải được xây dựng từ dãy số chính

Nhận xét: Mọi dãy con của dãy hội tụ đều hội tụ và ngược lại nếu $\lim x_{2n} = \lim x_{2n+1} = a$ thì $\lim x_n = a$

Một cách tổng quát ta có

Cho số nguyên $m \geq 2$ nếu $\lim x_{mn+i} = a \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, m-1$ thì $\lim x_n = a$

Bài 1.

Dãy số (x_n) được xác định bởi công thức:

$$\begin{cases} x_0 = x_1 = 1 \\ 5x_{n+2} = x_n + 2x_{n+1} \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) hội tụ

Lời giải

Xét dãy số (a_n) được xác định bởi $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{3}$, dễ thấy (a_n) giảm dần về 0.

Ta chứng tỏ $\max\{x_{2n}, x_{2n+1}\} \leq a_n, \forall n$ (1)

Thật vậy, (1) đúng với $n = 0$ và $n = 1$. Giả sử (1) đúng với n và do (a_n) là dãy giảm nên

$$5x_{2n+2} = x_{2n} + 2x_{2n+1} \leq 3a_n \Rightarrow x_{2n+2} \leq a_{n+1}$$

$$\text{Và } 5x_{2n+3} = x_{2n+1} + 2x_{2n+2} \leq a_n + 2a_{n+1} \leq 3a_n \Rightarrow x_{2n+3} \leq a_{n+1}$$

Như vậy (1) đúng với $n + 1$ hay (1) đúng $\forall n = 0, 1, 2, \dots$

Dễ thấy $x_n > 0 \forall n$ và từ (1) theo nguyên lý kẹp ta có $\lim x_{2n} = \lim x_{2n+1} = 0$ suy ra $\lim x_n = 0$

Nhận xét:

Việc đưa vào dãy phụ (a_n) có tác dụng chặn cả hai dãy con (x_{2n}) và (x_{2n+1}) và làm chúng cùng hội tụ về một điểm

Có thể sử dụng phương pháp sai phân tìm được số hạng tổng quát

$$x_n = C_1 \left(\frac{1 - \sqrt{6}}{5} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 + \sqrt{6}}{5} \right)^n$$

Thay các giá trị của x_0, x_1 để tìm C_1, C_2 từ đó tìm được $\lim x_n = 0$

Bài 2.

Dãy (x_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_0, x_1, x_2 \in (0; 1) \\ 3x_{n+3} = x_n^2 + x_{n+2}^2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) hội tụ

Lời giải

Ta xét dãy số (a_n) xác định bởi:

$$a_0 = \max\{x_0, x_1, x_2\}, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n^2}{3}$$

Dễ thấy dãy số (a_n) giảm dần về 0. Ta chứng tỏ $\max\{x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}\} \leq a_n, \forall n$ (1)

Thật vậy, (1) đúng với $n = 0, 1, 2, \dots$, Giả sử (1) đúng với n và do (a_n) là dãy giảm nên ta có:

$$3x_{3n+3} = x_{3n}^2 + x_{3n+2}^2 \leq 2a_n^2 \Rightarrow x_{3n+3} \leq a_{n+1}$$

$$3x_{3n+4} = x_{3n+1}^2 + x_{3n+3}^2 \leq a_n^2 + a_{n+1}^2 \leq 2a_n^2 \Rightarrow x_{3n+4} \leq a_{n+1}$$

$$\text{và } 3x_{3n+5} = x_{3n+2}^2 + x_{3n+4}^2 \leq a_n^2 + a_{n+1}^2 \leq 2a_n^2 \Rightarrow x_{3n+5} \leq a_{n+1}$$

Như vậy, (1) đúng với $n + 1$, theo nguyên lý quy nạp, (1) được chứng minh. Dễ thấy $x_n > 0$ Từ đó theo nguyên lý kẹp giữa ta có $\lim x_{3n+i} = 0$ ($i = 0, 1, 2$) do đó $\lim x_n = 0$

Từ các cách chọn dãy số phụ như trên ta có các dãy số sau đều hội tụ về 0 với x_0, x_1, x_2, x_3 đều thuộc $(0; 1)$

$$3x_{n+3} = x_n^2 + x_{n+1}x_{n+2}, \quad 3x_{n+3} = x_n^2 + x_nx_{n+1}$$

$$3x_{n+3} = \frac{x_n^2 + x_{n+2}^2}{2} + x_{n+1}^2 \quad 6x_{n+4} = x_{n+1}x_{n+2} + x_n^2 + 2x_nx_{n+1} \dots$$

Bài 3.

Dãy (x_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_0, x_1, x_2 > 0 \\ x_{n+3} = \sqrt{x_n + x_{n+2}} \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) hội tụ

Lời giải

Ta xây dựng hai dãy (a_n) và (b_n) như sau:

$$\begin{cases} a_0 = \max\{x_0, x_1, x_2, 2\} \\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = \min\{x_0, x_1, x_2, 2\} \\ b_{n+1} = \sqrt{2b_n} \end{cases}$$

Dãy (a_n) là dãy giảm dần về 2, dãy (b_n) tăng dần về 2.

Bằng quy nạp dễ chứng minh được

$$b_{n+1} \leq \min\{x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}\} \leq \max\{x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}\} \leq a_n \quad \forall n$$

Từ đó, dẫn đến $\lim x_{3n} = \lim x_{3n+1} = \lim x_{3n+2} = 2$ suy ra $\lim x_n = 2$

Bài 4.

Cho dãy (x_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) được xác định như sau:

x_0, x_1, x_2 là các số dương cho trước

$$x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}} + \sqrt{x_n} + \sqrt{x_{n-1}} \quad \text{với mọi } n \geq 1$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) hội tụ và tìm giới hạn của dãy

Lời giải

Ta xây dựng hai dãy (a_n) và (b_n) như sau:

$$\begin{cases} a_0 = \max\{x_0, x_1, x_2, 9\} \\ a_{n+1} = 3\sqrt{a_n} \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = \min\{x_0, x_1, x_2, 9\} \\ b_{n+1} = 3\sqrt{b_n} \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Dãy (a_n) là dãy giảm dần về 9, dãy (b_n) tăng dần về 9 suy ra

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 9$$

Ta chứng minh $b_{n+1} \leq \min\{x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}\} \leq \max\{x_{3n}, x_{3n+1}, x_{3n+2}\} \leq a_n \quad \forall n \quad (1)$

Thật vậy, với $n = 0$ thì (1) hiển nhiên đúng

Giả sử (1) đúng với $n = k$, khi đó với $n = k + 1$ ta có

$$b_n \leq b_{n+1} = 3\sqrt{b_n} \leq x_{3k+3} = \sqrt{x_{3k+2}} + \sqrt{x_{3k+1}} + \sqrt{x_{3k}} \leq 3\sqrt{a_n} = a_{n+1} \leq a_n$$

$$b_n \leq b_{n+1} = 3\sqrt{b_n} \leq x_{3k+4} = \sqrt{x_{3k+3}} + \sqrt{x_{3k+2}} + \sqrt{x_{3k+1}} \leq 3\sqrt{a_n} = a_{n+1} \leq a_n$$

$$b_n \leq b_{n+1} = 3\sqrt{b_n} \leq x_{3k+5} = \sqrt{x_{3k+4}} + \sqrt{x_{3k+3}} + \sqrt{x_{3k+2}} \leq 3\sqrt{a_n} = a_{n+1}$$

Vậy (1) cũng đúng với $n = k + 1$

Theo nguyên lý quy nạp thì (1) đúng với mọi số tự nhiên n

Từ đó theo định lý kẹp ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{3n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{3n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 9$$

Nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 9$

Dưới đây là một số bài toán tìm giới hạn dãy số dạng $x_{n+1} = f(x_n)$ (dãy số xác định như vậy gọi là cho dưới dạng lặp). Đây là dạng toán thường gặp nhất trong các bài toán về tìm giới hạn dãy số, dãy số hoàn toàn được xác định khi biết f và giá trị ban đầu x_0 . Do vậy sự hội tụ của dãy số phụ thuộc vào tính chất của $f(x)$ và x_0 . Một đặc điểm quan trọng khác của dãy số dạng này là nếu a là giới hạn của dãy số thì a là nghiệm của phương trình $x = f(x)$.

Bài 5.

Cho dãy số (x_n) được xác định như sau:

$$x_1 = 0, x_{n+1} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x_n} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải

Nhận xét rằng $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Xét hàm số $f(x) = \left(\frac{1}{27}\right)^x$ nghịch biến

trong khoảng $[0; +\infty)$. Khi đó $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $f(x) \leq f(0)$ nên $0 \leq x_n \leq 1$

Ta có $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = \frac{1}{27}$ nên $x_1 \leq x_3$ và $x_4 = f(x_3) \leq f(x_1) = x_2$

Bây giờ ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp $x_{2n-1} \leq x_{2n+1}$, và $x_{2n+2} \leq$

x_{2n}

với $n \in \mathbb{N}^*$

Thật vậy, giả sử có $x_{2n-1} \leq x_{2n+1}$ thì $f(x_{2n-1}) \geq f(x_{2n+1})$ nên $x_{2n} \geq x_{2n+2}$ và vì vậy $f(x_{2n}) \leq f(x_{2n+2})$ suy ra $x_{2n+1} \leq x_{2n+3}$.

Tương tự, giả sử có $x_{2n} \geq x_{2n+2}$ thì $f(x_{2n}) \leq f(x_{2n+2})$ suy ra $x_{2n+1} \leq x_{2n+3}$ vì vậy $f(x_{2n+1}) \geq f(x_{2n+3})$ suy ra $x_{2n+2} \geq x_{2n+4}$

Vậy dãy (x_{2n-1}) là dãy tăng và dãy (x_{2n}) là dãy giảm và đều thuộc $[0; 1]$ nên có giới hạn hữu hạn: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n} = a$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{2n-1}) = b$

Và $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(f(x_{2n})) = f(f(a))$

Nên $a = \left(\frac{1}{27}\right)^{\left(\frac{1}{27}\right)^a}$ suy ra $a = \frac{1}{3}$

Tương tự ta cũng tìm được $b = \frac{1}{3}$. Vậy $a = b = \frac{1}{3}$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{3}$

Bài 6. (HSG QG 2008)

Cho dãy số thực (x_n) xác định như sau:

$$x_1 = 0, x_2 = 2 \text{ và } x_{n+2} = 2^{-x_n} + \frac{1}{2} \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn đó.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 2^{-x} + \frac{1}{2}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $x_{n+4} = f(x_{n+2}) = f(f(x_n))$ hay $x_{n+4} = g(x_n)$, trong đó g là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và $g(x) = f(f(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

Để thấy hàm số f giảm trên $\mathbb{R}$, do đó hàm số g tăng trên $\mathbb{R}$. Vì thế từ (1) suy ra với mỗi $k \in \{1; 2; 3; 4\}$, dãy (x_{4n+k}) , $n \in \mathbb{N}$ là dãy đơn điệu. Hơn nữa, từ cách xác định dãy (x_n) dễ thấy $0 \leq x_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó với mỗi $k \in \{1; 2; 3; 4\}$, dãy (x_{4n+k}) là dãy hội tụ

Với mỗi $k \in \{1; 2; 3; 4\}$, đặt $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{4n+k} = a_k$ ta có $0 \leq a_k \leq 2$. Hơn nữa, do hàm số g liên tục trên $\mathbb{R}$ nên từ (1) suy ra $g(a_k) = a_k$ (2)

Xét hàm số $h(x) = g(x) - x$ trên $[0; 2]$. Ta có $h'(x) = 2^{-(f(x)+x)} \cdot (\ln 2)^2 - 1 < 0$
 $\forall x \in [0; 2]$ (do $f(x) + x > 0 \quad \forall x \in [0; 2]$)

Suy ra, hàm số h giảm trên $[0; 2]$. Vì thế có nhiều nhất một điểm $x \in [0; 2]$ sao cho $h(x) = 0$ hay $g(x) = x$. Mà $g(1) = 1$ nên từ (2) ta được $a_k = 1$ với mọi $k \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Từ đây, vì dãy (x_n) là hợp của bốn dãy con (x_{4n+k}) nên dãy (x_n) hội tụ và

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$$

Bài 7.

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n cho trước thì phương trình

$$x^{2n+1} = x + 1 \text{ có đúng một nghiệm thực. Gọi nghiệm đó là } x_n. \text{ Tính } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n.$$

Lời giải: Nếu $x < -1$ thì $x^{2n+1} < x < x+1$. Nếu $-1 \leq x \leq 0$ thì $x^{2n+1} - x = (-x)(1 - x^{2n}) < 1$ suy ra $x^{2n+1} < x + 1$. Nếu $0 < x \leq 1$ thì $x^{2n+1} \leq x < x + 1$. Vậy nếu x là nghiệm của phương trình $x^{2n+1} = x + 1$ thì ta phải có $x > 1$. Đặt $f_n(x) = x^{2n+1} - x - 1$. Ta có $f'_n(x) = (2n+1)x^{2n} - 1 > 0$ trên $[1, +\infty)$ suy ra hàm f tăng trên nửa khoảng này. Vì $f(1) = -1 < 0$ và $f(2) = 2^{2n+1} - 3 > 0$ nên phương trình này có nghiệm x_n thuộc $(1, 2)$. Theo lý luận trên, nghiệm này là duy nhất.

Xét $f_{n+1} = x^{2n+3} - x - 1$. Ta có $f_{n+1}(1) = -1 < 0$ và $f_{n+1}(x_n) = x_n^{2n+3} - x_n - 1 = x_n^{2n+3} - x_n^{2n+1} > 0$. Từ đó ta suy ra $1 < x_{n+1} < x_n$. Dãy $\{x_n\}$ giảm và bị chặn dưới bởi 1, suy ra dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn a , hơn nữa $a \geq 1$. Ta chứng minh $a = 1$. Thật vậy, giả sử $a > 1$. Khi đó $x_n \geq a$ với mọi n và ta tìm được n đủ lớn sao cho: $x_n^{2n+1} \geq a^{2n+1} > 3$. Trong khi đó ta có $x_n + 1 < x_1 + 1 < 3$. Mâu thuẫn vì $f_n(x_n) = 0$.

Bài 8.

Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi: $\begin{cases} x_1 = 2007 \\ x_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 - 1}} \end{cases} \forall n \geq 1$

1/ Chứng minh dãy số (x_n) bị chặn.

2/ Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải

Hiển nhiên $x_n > \sqrt{3}$

$$x_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 - 1}} = \sqrt{3} + \sqrt{1 + \frac{1}{x_n^2 - 1}} < \sqrt{3} + \sqrt{2} \quad \forall n \geq 1$$

Vậy $x_n \leq 2007$ với mọi $n \Rightarrow$ dãy bị chặn

Cách 1:

Hàm $f(x) = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \sqrt{3} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2 - 1}}$ nghịch biến trên $(\sqrt{3}; +\infty)$ nên chứng minh được các dãy con (x_{2n}) và (x_{2n+1}) là đơn điệu. Theo 1/các dãy đó bị chặn nên có

$\lim x_{2n} = a; \lim x_{2n+1} = b$; Từ $x_{n+1} = \sqrt{3} + \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 - 1}}$ qua giới hạn ta có :

$$\begin{cases} a = \sqrt{3} + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 1}} \\ b = \sqrt{3} + \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} \end{cases} \quad \text{Suy ra } a + \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} = b + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 1}}$$

$g(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ có $g'(x) = 1 - \frac{1}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}} > 0 \quad \forall x \geq \sqrt{3}$ nên $g(x)$ đồng biến

từ đó $a = b$ hay $\lim x_{2n} = \lim x_{2n+1} \Rightarrow \exists \lim x_n = a = b$.

Lúc đó a là nghiệm pt $x = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2} \Rightarrow \lim x_n = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}$

Cách 2

$f(x) = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} \Rightarrow |f'(x)| < \frac{1}{2\sqrt{2}}$ khi $x > \sqrt{3}$.

Có $f(x) = x \Leftrightarrow x = \sqrt{3} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})^2 = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

$$\Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{3}x)^2 - 2(x^2 - \sqrt{3}x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{3}x = -1 \\ x^2 - \sqrt{3}x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2} = a$$

Áp dụng định lý Lagrang có:

$$|x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)| = |f'(\theta_n)| |x_n - a| < \frac{1}{2\sqrt{2}} |x_n - a| < \dots < \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |x_1 - a| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Do đó $\lim x_n = a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}$.

Bài 9.

Cho dãy số (x_n) thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{a}, & a > 2 \\ x_{n+1} = \sqrt{a - \sqrt{a + x_n}} & \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn

Lời giải

- Bằng quy nạp chứng minh được rằng $0 \leq x_n \leq \sqrt{a} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
- Xét hàm $f(x) = \sqrt{a - \sqrt{a + x}}, \quad \forall x \in [0; \sqrt{a}]$ có $x_{n+1} = f(x_n)$ và

$$f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{a - \sqrt{a + x}}\sqrt{a + x}} < 0, \quad \forall x \in [0; \sqrt{a}]$$

Suy ra $f(x)$ là hàm nghịch biến

Do đó dãy (x_n) được tách thành hai dãy con (x_{2n}) và (x_{2n+1}) , trong đó một dãy tăng và một dãy giảm, mặt khác lại có dãy (x_n) bị chặn nên tồn tại $\lim x_{2n} = \alpha$, $\lim x_{2n+1} = \beta$, trong đó α, β là nghiệm của phương trình:

$$f(f(x)) = x \Leftrightarrow \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + x}}}} = x$$

$$\text{Xét hàm } F(x) = \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + x}}}} - x, \text{ với } x \in [0; \sqrt{a}]$$

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + x}}}} \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + x}}} \sqrt{a - \sqrt{a + x}} \sqrt{a + x}} - 1$$

với $x \in [0; \sqrt{a}]$, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{a - \sqrt{a + x}} \sqrt{a + x} &\geq \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a}}} \sqrt{a} > \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a} + \frac{1}{4}}} \sqrt{a} \\ &= \sqrt{a - \sqrt{a} - \frac{1}{2}} \sqrt{a} = \sqrt{\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}} \sqrt{a} > \sqrt{\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}} \sqrt{2} > \sqrt{0,12} > 0,3 \end{aligned}$$

Thay vai trò của x bởi $\sqrt{a - \sqrt{a + x}}$ chứng minh tương tự ta có

$$\sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + x}}}} \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + x}}} > 0,3$$

Suy ra $F'(x) < -0,9 < 0$ nên $F(x)$ là hàm nghịch biến, lại có $F(0) > 0$, $F(\sqrt{a}) < 0$ nên phương trình $F(x)$ bằng 0 có nghiệm duy nhất. Do đó $\alpha = \beta$

$$\text{Suy ra } \lim x_{2n} = \lim x_{2n+1} = \lim x_n$$

Vậy có $\lim x_n = T$ với T thỏa mãn $f(f(T)) = T$

2.3. DÃY SỐ XÁC ĐỊNH BỞI PHƯƠNG TRÌNH

Dãy số có mối quan hệ chặt chẽ với phương trình điều này thấy rõ qua hai nội dung cơ bản là phương trình sai phân tuyến tính được giải bằng phương trình đặc trưng, giới hạn của dãy số cũng thường được giải ra từ phương trình. Đây là một trong các nội dung quan trọng nhất của phân dãy số.

Với dạng toán tìm giới hạn của dãy số có liên quan đến phương trình ta thường xét tính đơn điệu của hàm số, áp dụng định lý Lagrange và định lý về giới hạn kẹp giữa.

Bài 1.

Giả sử x_n thuộc khoảng $(0; 1)$ là nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-n} = 0$$

Chúng minh dãy (x_n) hội tụ. Tìm giới hạn đó.

Nhận xét: x_n được xác định duy nhất vì hàm số $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-n}$ liên tục và đơn điệu trên $(0, 1)$. Tuy nhiên, ta không thể xác định được giá trị cụ thể của x_n . Rất may mắn, để chứng minh tính hội tụ của x_n , ta không cần đến điều đó. Chỉ cần chứng minh tính đơn điệu và bị chặn là đủ. Với tính bị chặn là hiển nhiên vì $0 < x_n < 1$. Với tính đơn điệu, ta chú ý một chút đến mối liên hệ giữa $f_n(x)$ và $f_{n+1}(x)$: $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{x-n-1}$. Đây chính là chìa khoá để chứng minh tính đơn điệu của x_n .

Lời giải

x_n được xác định duy nhất vì hàm số $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-n}$ liên tục và đơn điệu trên $(0; 1)$

Để chứng minh dãy hội tụ ta chứng minh dãy (x_n) bị chặn và đơn điệu, hiển nhiên dãy bị chặn vì $0 < x_n < 1$. Bây giờ ta chứng minh dãy (x_n) đơn điệu

Ta thấy $0 < x_n < 1$ nên

$$f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + \frac{1}{x_n - n - 1} = \frac{1}{x_n - n - 1} < 0$$

Trong khi đó $f_{n+1}(0^+) > 0$. Theo tính chất của hàm liên tục, trên khoảng $(0; x_n)$ có ít nhất một nghiệm của $f_{n+1}(x)$. Nghiệm đó chính là x_{n+1} . Suy ra $x_{n+1} < x_n$. Tức dãy số (x_n) giảm, do dãy số này bị chặn dưới bởi 0 nên dãy số có giới hạn

Ta chứng minh dãy số trên có giới hạn bằng 0. Ta dễ dàng chứng minh kết quả sau:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln n$$

(Có thể chứng minh bằng cách đánh giá $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$)

Thật vậy, giả sử $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a > 0$. Khi đó do dãy (x_n) giảm nên ta có $x_n \geq a \quad \forall n$

Do $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nên tồn tại N sao cho với mọi $n \geq N$ ta có

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{1}{a}$$

Khi đó với mọi $n \geq N$ thì

$$0 = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - 1} + \dots + \frac{1}{x_n - n} < \frac{1}{x_n} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} + \dots + \frac{1}{-n} < \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0$$

Điều này mâu thuẫn. Vậy phải có $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

Bài 2. (HSG QG 2007)

Cho số thực $a > 2$. Đặt $f_n(x) = a^{10}x^{n+10} + x^n + \dots + x + 1$ ($n = 1, 2, \dots$)

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , phương trình $f_n(x) = a$ luôn có đúng một nghiệm $x_n \in (0; +\infty)$ và dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$

Lời giải.

Với mỗi n , đặt $g_n(x) = f_n(x) - a$, khi đó $g_n(x)$ là hàm liên tục, tăng trên $[0; +\infty)$.

Ta có $g_n(0) = 1 - a < 0$; và $g_n(1) = a^{10} + n + 1 - a > 0$ nên $g_n(x) = 0$ có nghiệm duy nhất x_n trên $(0; +\infty)$.

Để chứng minh tồn tại giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, ta chứng minh dãy (x_n) ($n = 1, 2, \dots$) tăng và bị chặn.

Ta có

$$\begin{aligned} g_n\left(1 - \frac{1}{a}\right) &= a^{10}\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+10} + \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{a}} - a = a\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+1}\left(a^9\left(1 - \frac{1}{a}\right)^9 - 1\right) \\ &= a\left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+1}\left((a-1)^9 - 1\right) > 0 \end{aligned}$$

Suy ra $x_n < 1 - \frac{1}{a}$, $n = 1, 2, \dots$

Mặt khác, từ

$$g_n(x_n) = a^{10}x_n^{n+10} + x_n^n + \dots + 1 - a = 0, \text{ suy ra}$$

$$x_n g_n(x_n) = a^{10}x_n^{n+11} + x_n^{n+1} + \dots + x_n - ax_n = 0$$

$$\Rightarrow g_{n+1}(x_n) = x_n g_n(x_n) + 1 + ax_n - a = ax_n + 1 - a < 0 \text{ do } x_n < 1 - \frac{1}{a}.$$

Vì g_{n+1} là hàm tăng và $0 = g_{n+1}(x_{n+1}) > g_{n+1}(x_n)$ nên $x_n < x_{n+1}$. Vậy dãy (x_n) ($n = 1, 2, \dots$) tăng và bị chặn, nên tồn tại $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$

Nhận xét. Ta có thể chứng minh $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1 - \frac{1}{a}$ bằng cách chứng minh bất đẳng thức

$$1 - \frac{1}{a} - a((a-1)^9 - 1) \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+1} < x_n < 1 - \frac{1}{a}$$

Thật vậy, ta có

$$a = a^{10} x_n^{n+10} + x_n^n + \dots + x_n + 1 < a^{10} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+10} + \left(1 - \frac{1}{a}\right)^n + \dots + \left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 + x_n + 1$$

Suy ra

$$a < a^{10} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+10} + a \left(\left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+1} \right) + x_n + 1$$

$$\text{Từ đó } x_n > 1 - \frac{1}{a} - a((a-1)^9 - 1) \left(1 - \frac{1}{a}\right)^{n+1}$$

$$\text{Cách khác chứng minh } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{a-1}{a}$$

$$\text{Đặt } c = \frac{a-1}{a} < 1 \text{ ta có}$$

$$f_n(c) - f_n(x_n) = kc^n \text{ (với } k = (a-1)((a-1)^9 - 1) > 0)$$

Theo định lý Lagrang thì

$$f_n(c) - f_n(x_n) = f'(\xi)(c - x_n) \text{ với } \xi \in (x_n; c)$$

$$\text{Nhưng } f'(\xi) = (n+10)a^{10}\xi^{n+9} + n\xi^{n-1} + \dots + 1 > 1 \text{ nên } kc^n > c - x_n$$

$$\text{Từ đó } c - kc^n < x_n < c \text{ suy ra } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = c$$

Bài 3. (HSG QG 2002)

Xét phương trình

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \dots + \frac{1}{k^2x-1} + \dots + \frac{1}{n^2x-1} = \frac{1}{2} \text{ trong đó } n \text{ nguyên dương}$$

1) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n , phương trình trên có duy nhất nghiệm lớn hơn 1, kí hiệu nghiệm đó là x_n

2) Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn bằng 4 khi $n \rightarrow +\infty$

Lời giải

$$\text{Kí hiệu } f_n(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4x-1} + \dots + \frac{1}{k^2x-1} + \dots + \frac{1}{n^2x-1} - \frac{1}{2}$$

1). Dễ thấy, với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, hàm số $f_n(x)$ liên tục và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$. Hơn nữa $f_n(x) \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow 1^+$ và $f_n(x) \rightarrow -\frac{1}{2}$ khi $x \rightarrow +\infty$. Từ

đó suy ra với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ phương trình $f_n(x)$ có nghiệm duy nhất $x_n > 1$

2). Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\begin{aligned}
f_n(4) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \dots + \frac{1}{(2k)^2-1} + \dots + \frac{1}{(2n)^2-1} \\
&= \frac{1}{2} \left(-1 + 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\
&= -\frac{1}{2(2n+1)} < 0 = f_n(x_n)
\end{aligned}$$

Từ đó, do hàm $f_n(x)$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$ suy ra $x_n < 4$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ (1)

Mặt khác, với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, hàm $f_n(x)$ khả vi trên $[x_n; 4]$ nên theo định lý Lagrange, với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ tồn tại $t \in (x_n; 4)$ sao cho

$$\frac{f_n(4) - f_n(x_n)}{4 - x_n} = f'_n(t) = \frac{-1}{(t-1)^2} + \frac{-4}{(4t-1)^2} + \dots + \frac{-n^2}{(n^2t-1)^2} < -\frac{1}{9} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Suy ra } \frac{-1}{2(2n+1)(4-x_n)} < -\frac{1}{9} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n > 4 - \frac{9}{2(2n+1)} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta được } 4 - \frac{9}{2(2n+1)} < x_n < 4 \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*$$

Từ đó, theo định lý về giới hạn kẹp giữa ta có điều phải chứng minh

Bài 4.

Cho dãy số (u_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) được xác định như sau:

$u_0 = a$ và $u_{n+1} = \sin^2(u_n + 11) - 2007$ với mọi số tự nhiên n , trong đó a là số thực cho trước. Chứng minh rằng

a). Phương trình $\sin^2(x + 11) - x = 2007$ có nghiệm duy nhất. Kí hiệu nghiệm đó là b

b). $\lim u_n = b$

Lời giải

a) Từ giả thiết ta thấy ngay $u_n \geq -2007 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Xét hàm số $f(x) := \sin^2(x + 11) - 2007, x \in \mathbb{R}$

Ta thấy

$$f'(x) = 2\sin(x+11)\cos(x+11) = \sin 2(x+11) \text{ và } u_{n+1} = f(u_n)$$

hàm số $g(x) := f(x) - x$ có $g'(x) = \sin 2(x+11) - 1 \leq 0$

$$g(-2007) = \sin^2(-2006) > 0 \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến và có nghiệm duy nhất trong $[-2007; +\infty)$ gọi nghiệm đó là b , thì phương trình $\sin^2(x + 11) - x = 2007$ có nghiệm duy nhất là b

b) Kí hiệu $\alpha = \max_{[-2007; -2006]} |g'(t)|$. Khi đó $\alpha \in [0; 1]$

Ta thấy $-2007 \leq u_n \leq -2006$ và phương trình $|\sin 2(x+1)| = 1$ vô nghiệm trên $[-2007; -2006]$ nên $0 < \alpha < 1$.

Theo định lý Lagrange, ứng với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, tồn tại $c_n \in (-2007; -2006)$ sao cho

$$|u_{n+1} - b| = |g(u_n) - g(b)| = |g'(c_n)| |u_n - b| \leq \alpha |u_n - b|$$

Từ đây theo phương pháp quy nạp ta được $|u_{n+1} - b| \leq \alpha^n |u_1 - b|$

Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_{n+1} - b| = 0$ tức là $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = b$

Bài 5.

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n cho trước thì phương trình $x^{2n+1} = x + 1$ có đúng một nghiệm thực. Gọi nghiệm đó là x_n . Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Lời giải:

Nếu $x < -1$ thì $x^{2n+1} < x < x+1$. Nếu $-1 \leq x \leq 0$ thì $x^{2n+1} - x = (-x)(1-x^{2n}) < 1$ suy ra $x^{2n+1} < x + 1$. Nếu $0 < x \leq 1$ thì $x^{2n+1} \leq x < x + 1$. Vậy nếu x là nghiệm của phương trình $x^{2n+1} = x + 1$ thì ta phải có $x > 1$. Đặt $f_n(x) = x^{2n+1} - x - 1$. Ta có $f'_n(x) = (2n+1)x^{2n} - 1 > 0$ trên $[1, +\infty)$ suy ra hàm f tăng trên nửa khoảng này. Vì $f(1) = -1 < 0$ và $f(2) = 2^{2n+1} - 3 > 0$ nên phương trình này có nghiệm x_n thuộc $(1, 2)$. Theo lý luận trên, nghiệm này là duy nhất.

Xét $f_{n+1} = x^{2n+3} - x - 1$. Ta có $f_{n+1}(1) = -1 < 0$ và $f_{n+1}(x_n) = x_n^{2n+3} - x_n - 1 = x_n^{2n+3} - x_n^{2n+1} > 0$. Từ đó ta suy ra $1 < x_{n+1} < x_n$. Dãy $\{x_n\}$ giảm và bị chặn dưới bởi 1, suy ra dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn a , hơn nữa $a \geq 1$. Ta chứng minh $a = 1$. Thật vậy, giả sử $a > 1$. Khi đó $x_n \geq a$ với mọi n và ta tìm được n đủ lớn sao cho: $x_n^{2n+1} \geq a^{2n+1} > 3$. Trong khi đó ta có $x_n + 1 < x_1 + 1 < 3$. Mâu thuẫn vì $f_n(x_n) = 0$.

Bài 6.

Cho phương trình $x + 2x^2 + \dots + nx^n = \frac{3}{4}$ với n nguyên dương

- Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, trên khoảng $(0; +\infty)$, phương trình trên có nghiệm duy nhất, kí hiệu là x_n
- Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$. Tìm giới hạn đó.

Lời giải.

- Xét hàm số $f_n(x) = x + 2x^2 + \dots + nx^n - \frac{3}{4}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có

$f'_n(x) = 1 + 2^2x + \dots + n^2x^{n-1}$ và $f'_n(x) > 0 \quad \forall x \in (0; +\infty)$ nên hàm số $f_n(x)$ tăng trên $(0; +\infty)$

Mà $f_n(0) = -\frac{3}{4} < 0$, $f_n(1) > 0$ nên phương trình $f_n(x) = 0$ có duy nhất trong khoảng $(0; +\infty)$

b) Ta có

$$3f_n\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + \dots + n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{9}{4}$$

$$f_n\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + n \left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{4}$$

Trừ vế theo vế ta được:

$$2f_n\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{n}{3^n} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - \frac{n}{3^n} - \frac{3}{2} = -\frac{2n+3}{3 \cdot 3^n} < 0$$

Do đó: $x_n > \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Áp dụng định lý Lagrange, tồn tại $y_n \in \left(\frac{1}{3}; x_n\right)$ sao cho:

$$\frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} = \left| f_n(x_n) - f_n\left(\frac{1}{3}\right) \right| = \left| x_n - \frac{1}{3} \right| |f'_n(y_n)| > \left| x_n - \frac{1}{3} \right| \text{ vì } f'_n(y_n) > 1 \text{ với } y_n > 0$$

$$\text{Mặt khác } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1}{3}$$

Qua các bài toán trên, chúng ta thấy công cụ cơ bản để khảo sát các dãy số cho bởi dãy các phương trình là các định lý cơ bản của giải tích (về hàm liên tục, hàm đơn điệu, định lý về sự hội tụ của dãy số đơn điệu và bị chặn, định lý Lagrange) và mối liên hệ mang tính truy hồi giữa các phương trình.

BÀI TẬP

Bài 1. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n cho trước thì phương trình $x^{2n+1} = x + 1$ có đúng một nghiệm thực. Gọi nghiệm đó là x_n . Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

Bài 2 Cho dãy số (x_n) được xác định như sau: $x_1 = \frac{2}{3}, x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n x_i$.

Bài 3. (Đề dự bị VMO 2008) Cho số thực a và dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi:

$$x_1 = a \text{ và } x_{n+1} = \ln(3 + \cos x_n + \sin x_n) - 2008 \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi n tiến đến dương vô cùng.

Bài 4. Cho dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ thỏa mãn $x_1 = 1; x_2 = x_3 = 9; x_4 = 1$ và $x_{n+4} = \sqrt[4]{x_n x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3}}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng tồn tại $\lim x_n$ và tính giới hạn đó.

Bài 5. Cho phương trình với n là tham số nguyên dương

$$x + 2(x-1)^2 + 3(x-1)^3 + \dots + n(x-1)^n - \frac{7}{4} = 0 \quad (1)$$

a) Chứng minh phương trình trên có 1 nghiệm duy nhất lớn hơn 1 với mọi n nguyên dương ký hiệu là x_n .

b) Chứng minh dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$. Tính giới hạn đó.

Bài 6. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n \end{cases} \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

Tìm $\lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{u_i}$

Bài 7. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} u_1 = 2009 \\ u_{n+1} = u_n (\sqrt{u_n} + 1)^2 \end{cases} \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

Tìm $\lim \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{u_i} + 1}$

Bài 8. Cho dãy số (x_n) xác định bởi :

$$\begin{cases} x_1 = 2, 1 \\ x_{n+1} = \frac{x_n - 2 + \sqrt{x_n^2 + 8x_n - 4}}{2} \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Với mỗi số nguyên dương n đặt $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_{i+1}^2 - 4}$. Tìm $\lim y_n$

Bài 9. Cho dãy số (u_n) xác định bởi :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{1996} + u_n \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

Tìm $\lim \left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \dots + \frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$

Bài 10. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2008}{-u_n + 2010} \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm $\lim u_n$

b) Đặt $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k - 2008}$. Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n + 2009}$

KẾT LUẬN

1. Kết quả đạt được

Dãy số là một lĩnh vực khá rộng và khó, các bài toán dãy số rất đa dạng. Trong đề tài này chỉ đề cập giới hạn của dãy số.

Đề tài này đã trình bày một số dạng toán về giới hạn dãy số như giới hạn của tổng, dãy con và sự hội tụ của dãy số, dãy số xác định bởi phương trình. Các bài toán dạng này đều có phương pháp giải cụ thể vận dụng các kiến thức về dãy số, các định lý về giới hạn.

Đề tài đã chọn lọc được các bài toán điển hình cho mỗi dạng toán, đặc biệt có nhiều bài toán là đề thi học sinh giỏi quốc gia, quốc tế những năm gần đây qua đó thấy vai trò quan trọng của bài toán về dãy số trong các đề thi này.

Qua quá trình áp dụng đề tài vào thực tế giảng dạy, đặc biệt là trong quá trình tham gia dạy đội tuyển học sinh giỏi tôi nhận thấy học sinh hiểu rõ được bản chất của nhiều bài toán khó về dãy số, học sinh có hứng thú và chủ động trong học tập.

Kết quả đạt được khá rõ ràng khi tôi tham gia dạy đội tuyển học sinh giỏi có nhiều học sinh đạt giải cấp tỉnh. Từ năm học 2009 -2010 đến nay năm học nào cũng có 2 học sinh đạt giải, đặc biệt các em thường giải tốt các bài toán về dãy số trong các đề thi trong khi các năm trước đó học sinh thường không giải được bài toán này.

Khi thực hiện đề tài này tôi nhận thấy năng lực tư duy và kĩ năng thực hiện các thao tác tư duy cũng tăng lên rõ rệt từ đó học sinh có tư duy học tập tốt hơn các phần khác và các bộ môn khác, học sinh có tư duy phân tích, tổng hợp tốt hơn, nâng cao năng lực tự học cho học sinh.

2. Bài học kinh nghiệm.

Qua quá trình thực hiện đề tài này tôi nhận thấy để nâng cao chất lượng trong dạy học, đặc biệt là trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi cần phát huy tính tích cực chủ động cho học sinh, học sinh phải có hứng thú trong học tập và phải có năng lực tự học. Chính vì lẽ đó mà giáo viên cũng cần có sự say mê trong chuyên môn, luôn có sự hướng dẫn học sinh không chỉ kiến thức mà còn cả các kĩ năng tư duy, hướng dẫn học sinh cách tự học, biết tổng hợp kiến thức. Các giáo viên trong tổ chuyên môn cũng cần kết hợp nghiên cứu các chuyên đề và phân công bồi dưỡng học sinh giỏi để các bài giảng được chuyên sâu hơn. Việc bồi dưỡng đội tuyển học sinh giỏi cũng rất cần sự quan tâm chỉ đạo chung của nhà trường, nhà trường cần có kế hoạch ngay từ đầu năm học giao cho các giáo viên chịu trách nhiệm bồi dưỡng học sinh, đội tuyển học sinh giỏi cũng cần được bồi dưỡng ngay khi các em học lớp 10 chứ không phải chỉ đến lớp 12 mới tập trung rèn luyện cho các em. Các giáo viên dạy đội tuyển cũng cần biết kết hợp các kiến thức thi học sinh giỏi và thi đại học để tạo hứng thú học tập cho học sinh.

3. Hướng tiếp tục nghiên cứu mở rộng đề tài.

Các bài toán về dãy số thường khó và nhiều dạng khác nhau, đề tài này mới chỉ đề cập đến bài toán tìm giới hạn dãy số. Để nâng cao chất lượng học tập

cho học sinh và để các dạng toán được đầy đủ hơn tôi sẽ nghiên cứu tiếp các bài toán về dãy số thường gặp trong các đề thi học sinh giỏi như tìm số hạng tổng quát của dãy số, nghiên cứu các tính chất số học của dãy số.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1].Phan Huy Khải Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi toán THPT các bài toán về dãy số . NXB Giáo dục 2007
- [2].Phan Huy Khải 10.000 bài toán sơ cấp dãy số và giới hạn. NXB Hà Nội 1997
- [3] Nguyễn Vũ Lương (chủ biên), Nguyễn Lưu Sơn, Nguyễn Ngọc Thắng, Phạm Văn Hùng. Các bài giảng về số học. NXB Đại học Quốc gia Hà nội 2006.
- [4] Nguyễn Văn Mậu. Kỹ yếu trại hè Hùng Vương năm 2010
- [5] Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), Nguyễn Văn Tiến.Một số chuyên đề giải tích bồi dưỡng học sinh giỏi trung học phổ thông NXB Giáo dục Việt Nam 2009
- [6] Nguyễn Sinh Tiến, Nguyễn Văn Nho, Lê Hoàng Phò. Tuyển tập các bài dự tuyển Olympic Toán học quốc tế 1991 – 2001. NXB Giáo dục 2003.
- [7] Nguyễn Đễ, Nguyễn Khánh Nguyên (dịch). Các đề thi vô địch Toán 19 nước – trong đó có Việt Nam. NXB Giáo dục 1996
- [8] Lê Đình Thịnh (chủ biên), Đặng Đình Châu, Lê Đình Định, Phan Văn Hạp. Phương trình sai phân và một số ứng dụng. NXB Giáo dục 2001.
- [9]. Các bài toán chọn lọc 45 năm tạp chí toán học tuổi trẻ
- [10] Tuyển tập THPT tập 3. (sách mạng)
- [11] Tủ sách toán học và tuổi trẻ. Các bài thi Olympic toán Trung học phổ thông Việt Nam (1990 – 2006). NXB Giáo dục 2007

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU	1
Chương 1. MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ	3
1.1 Dãy số	7
1.2 Sơ lược về phương pháp sai phân	7
Chương 2. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ	10
2.1 Giới hạn của tổng	10
2.2 Dãy con và sự hội tụ của dãy số	14
2.3. Dãy số xác định bởi phương trình	22
KẾT LUẬN	30
TÀI LIỆU THAM KHẢO	32