

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 2}{x-1} - \frac{x+2\sqrt{x}-3}{x+4\sqrt{x}+3}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

Rút gọn biểu thức A và tìm x để $A = x - 3$.

b) Tìm giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + 2(m+2)x + m^2 + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = x_1 x_2$.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{2-x} + \sqrt{3+x} + 2\sqrt{(2-x)(3+x)} - 7 = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2x+y)(x+y) + y = 2 \\ 4x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4xy = -2 \end{cases}$$

Câu 3. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A, $AB = 4\text{cm}$. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, AC và BN. Điểm D thuộc đoạn thẳng AM sao cho $AM = 4AD$.

a) Tính diện tích tam giác DMN.

b) Chứng minh tam giác DIN vuông cân.

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$), nội tiếp trong đường tròn (O). Dựng các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC. Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại M và N (M, N lần lượt nằm trên cung nhỏ AB, AC). Gọi I là giao điểm của BM và DF, J là giao điểm của CN và DE.

a) Chứng minh EB là tia phân giác của $\angle DEM$.

b) Chứng minh $AM = AN$.

c) Chứng minh tứ giác MNJI nội tiếp trong đường tròn.

Câu 5. (5,0 điểm)

a) Tìm tất cả các số tự nhiên sao cho tổng của số đó với tổng các chữ số của nó bằng 2023.

b) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$H = \frac{x^3 - 1}{x^2 + y + z} + \frac{y^3 - 1}{y^2 + z + x} + \frac{z^3 - 1}{z^2 + x + y}.$$

----- HẾT -----

* Thí sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

* Họ và tên thí sinh: Số báo danh: