

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

$$P = \frac{x^2}{(x+y)(1-y)} - \frac{y^2}{(x+y)(1+x)} - \frac{x^2y^2}{(1+x)(1-y)}$$

Câu 1. Cho biểu thức

a. Rút gọn biểu thức .

b. Tìm số nguyên x, y thỏa $P = 2$.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba đường thẳng $(d_1): y = 2x - m^2 + 1$,

$(d_2): y = x - m^2 - m$, và $(d_3): y = 3x - m^2 - m + 2$. Biết (d_1) cắt (d_2) và (d_3) lần lượt tại $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$. Tìm m để $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 320$.

Câu 3. Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Biết $P(x)$ chia hết cho $(x - 2)$ và $P(x)$ chia cho $(x^2 - 1)$ thì dư là $2x$. Tính $P(3)$.

Câu 4. Giải phương trình $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{5 - 2x} = 3x^2 - 12x + 14$.

Câu 5. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 7y = (x + y)^2 + x^2y + 7x + 4 \\ 3x^2 + y^2 + 8y + 4 = 8x \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{Z}).$$

Câu 6. Cho tam giác ABC vuông tại A , có đường cao AH . Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC . Tính chu vi tam giác IHK biết $BH = 18\text{cm}$, $CH = 32\text{cm}$.

Câu 7. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM, CN cắt nhau tại điểm G . Gọi K là một điểm trên cạnh BC , đường thẳng (d_1) đi qua K và song song với CN cắt AB tại L , đường thẳng (d_2) đi qua K và song song với BM và cắt AC tại E . Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng KG và DE . Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn thẳng DE .

Câu 8. Cho hình thang $ABCD$ có đáy nhỏ là AB và $BC = BD$. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng CD . Đường thẳng (d) đi qua điểm H cắt các đường thẳng AC, AD lần lượt tại E, F sao cho D nằm giữa A và F . Chứng minh rằng $\angle BDF = \angle BCF$.

Câu 9. Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả mỗi ngày. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả bưởi là 30000 đồng.

Câu 10. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3 + c^3}{a^2} > \sqrt{2}$$

-----Hết-----

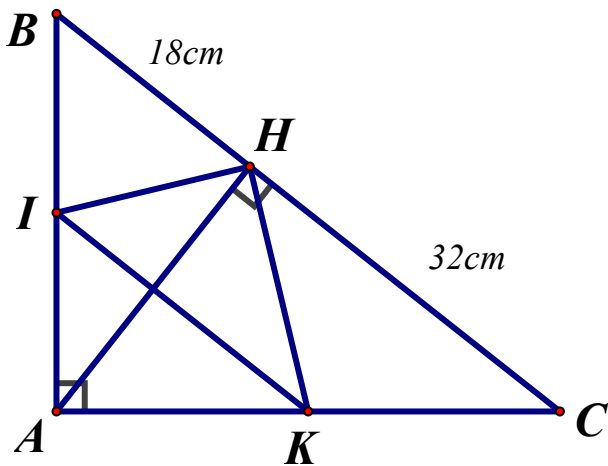
Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

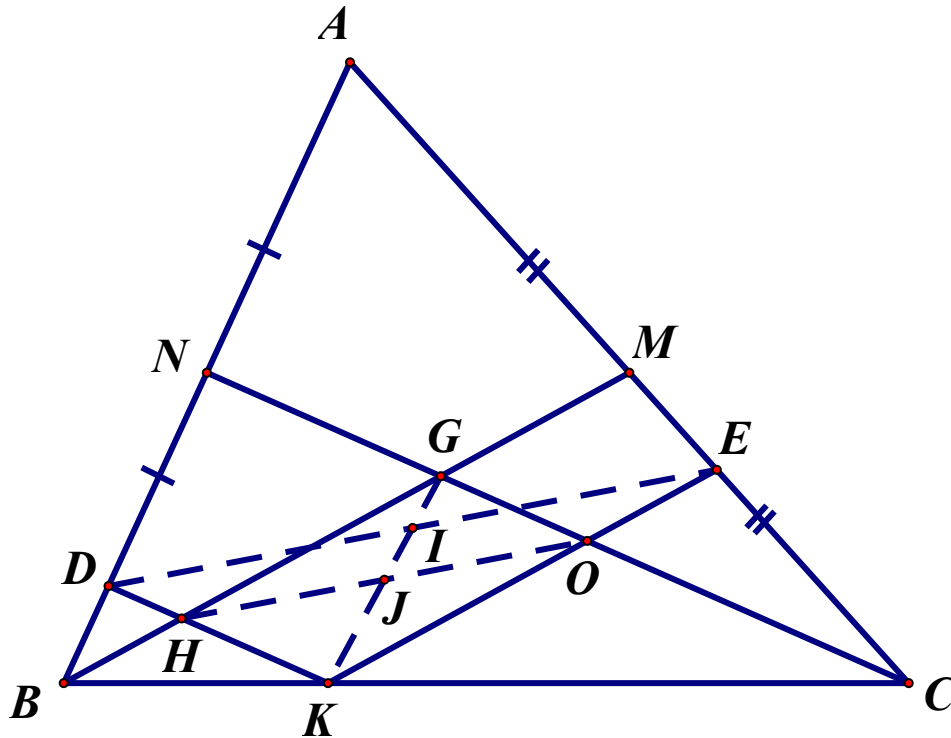
Đáp án và thang điểm:

Câu	Nội dung trình bày
1	$P = \frac{x^2}{(x+y)(1-y)} - \frac{y^2}{(x+y)(1+x)} - \frac{x^2 y^2}{(1+x)(1-y)}$ Cho biểu thức a. Rút gọn biểu thức .
	$\text{ĐK: } \begin{cases} x \neq -y \\ x \neq -1 \\ y \neq 1 \end{cases}$
	$P = \frac{x^2(1+x) - y^2(1-y) - x^2 y^2(x+y)}{(x+y)(1+x)(1-y)} = \frac{(x^3 + y^3) + (x^2 - y^2) - x^2 y^2(x+y)}{(x+y)(1+x)(1-y)}$
	$= \frac{(x+y)(x - y + x^2 - xy + y^2 - x^2 y^2)}{(x+y)(1+x)(1-y)}$
	$= \frac{(x+y)(1+x)(1-y)(x+xy-y)}{(x+y)(1+x)(1-y)}$
	$= x + xy - y$
	b. Tìm số nguyên x, y thỏa $P = 2$.
	$P = 2 \Leftrightarrow x(y+1) = y+2$
	$\Leftrightarrow \begin{cases} y \neq -1 \\ x = 1 + \frac{1}{y+1} \end{cases}$
	Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $(y+1)$ là ước của 1 $\Rightarrow y+1 = 1$ hoặc $\Rightarrow y+1 = -1$
	Vậy $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$
2	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba đường thẳng $(d_1): y = 2x - m^2 + 1$, $(d_2): y = x - m^2 - m$, và $(d_3): y = 3x - m^2 - m + 2$. Biết (d_1) cắt (d_2) và (d_3) lần lượt tại $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$. Tìm m để $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 320$.
	Ta có $(d_1): y = 2x - m^2 + 1$ cắt $(d_2): y = x - m^2 - m$ tại điểm $A(-1 - m; -m^2 - 2m - 1)$.
	$(d_1): y = 2x - m^2 + 1$ cắt $(d_3): y = 3x - m^2 - m + 2$ tại điểm $B(-1 + m; -m^2 + 2m - 1)$.

	Ta có $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 320 \Rightarrow (-2m)^2 + (-4m)^2 = 320$ $4m^2 + 16m^2 = 320 \Leftrightarrow m^2 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 4$. Vậy $m = \pm 4$.
3	Cho đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Biết $P(x)$ chia hết cho $(x - 2)$ và $P(x)$ chia cho $(x^2 - 1)$ thì dư là $2x$. Tính $P(3)$. Vì $P(x)$ chia hết cho $(x - 2)$ nên $P(2) = 8 + 4a + 2b + c = 0 \Leftrightarrow c = -8 - 4a - 2b$ Do $P(x)$ chia cho $(x^2 - 1)$ thì dư là $2x$ nên $P(x) - 2x$ chia hết cho $(x^2 - 1)$, suy ra $\begin{cases} P(1) - 2 = 0 \\ P(-1) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ a - b + c = -1 \end{cases}$ Thay $c = -8 - 4a - 2b$ ta có hệ $\begin{cases} 3a + b = -9 \\ 3a + 3b = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{10}{3} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{10}{3}$ $P(x) = x^3 - \frac{10}{3}x^2 + x + \frac{10}{3} \Rightarrow P(3) = \frac{10}{3}$. Vậy $P(3) = \frac{10}{3}$.
	Giải phương trình $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{5 - 2x} = 3x^2 - 12x + 14$. Điều kiện $\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ Áp dụng Bunnhiacopski, ta có: $VT = 1 \cdot \sqrt{2x - 3} + 1 \cdot \sqrt{5 - 2x} \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)(2x - 3 + 5 - 2x)} = 2 \quad (1)$
4	$VP = 3x^2 - 12x + 14 = 3(x - 2)^2 + 2 \geq 2, \forall x \quad (2)$ Phương trình $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{5 - 2x} = 3x^2 - 12x + 14$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ Dấu “=” ở (1) và (2) đồng thời xảy ra $\begin{cases} \sqrt{2x - 3} = \sqrt{5 - 2x} \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.
5	Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 7y = (x + y)^2 + x^2y + 7x + 4 \\ 3x^2 + y^2 + 8y + 4 = 8x \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{Z}).$ HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 7y = (x + y)^2 + x^2y + 7x + 4 & (1) \\ 4 = -3x^2 - y^2 - 8y + 8x & (2) \end{cases}$ Thay (2) vào (1) ta được $x^3 + 7y = (x + y)^2 + x^2y + 7x - 3x^2 - y^2 - 8y + 8x$

	$\Leftrightarrow (x - y)(x^2 + 2x - 15) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 3 \\ x = -5 \end{cases}$
	$y^2 + 8y + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = -7 \end{cases}$ Với $x = 3$ thay vào (2) ta được Với $x = -5$ thay vào (2) ta được $y^2 + 8y + 119 = 0$ (VN)
	Với $x = y$ thay vào (2) ta được $x^2 = -1$ (VN). Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) \in \{(3; -1), (3; -7)\}$
6	Cho tam giác ABC vuông tại A, có đường cao AH. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Tính chu vi tam giác IHK biết $BH = 18cm, CH = 32cm$.  Ta có : $BC = BH + CH = 50cm$ Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC, ta có: $AB^2 = BH \cdot BC = 900 \Rightarrow AB = 30cm$ $AC^2 = CH \cdot BC = 1600 \Rightarrow AC = 40cm$ Tam giác AHB vuông tại H có đường trung tuyến $HI \Rightarrow HI = \frac{1}{2} AB = 15cm$ Tam giác AHC vuông tại H có đường trung tuyến $HK \Rightarrow HK = \frac{1}{2} AC = 20cm$ Tam giác ABC có đường trung bình $IK \Rightarrow IK = \frac{1}{2} BC = 25cm$ Vậy chu vi tam giác IHK bằng $60cm$.
7	Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM, CN cắt nhau tại điểm G. Gọi K là một điểm trên cạnh BC, đường thẳng (d_1) đi qua K và song song

với CN cắt AB tại L , đường thẳng (d_2) đi qua K và song song với BM và cắt AC tại E . Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng KG và DE . Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn thẳng DE .



Gọi DK cắt BM tại H , KE cắt CN tại O và GK cắt HO tại J .

Tứ giác $HGOK$ có: $\begin{cases} HK \parallel GO \\ HG \parallel KO \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác $HGOK$ là hình bình hành.
 $\Rightarrow J$ là trung điểm $HO \Rightarrow HJ = OJ$.

$$\Delta BNG \text{ có } DH \parallel NG \Rightarrow \frac{DH}{NG} = \frac{BH}{BG} \quad (1)$$

Cmtt ta có: ΔCMG có $OE \parallel GM \Rightarrow \frac{OE}{GM} = \frac{OC}{CG} \quad (3)$

ΔCBG có $OK \parallel BG \Rightarrow \frac{OK}{GB} = \frac{OC}{CG} \quad (4)$

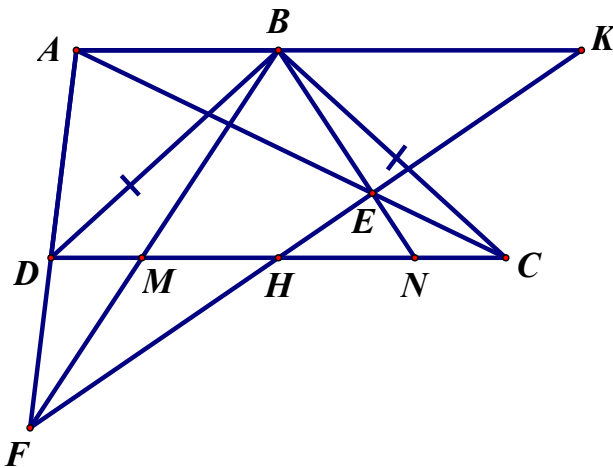
Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{OE}{GM} = \frac{OK}{GB} \Rightarrow \frac{OE}{OK} = \frac{GM}{GB} = \frac{1}{2} \quad (**)$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \frac{DH}{HK} = \frac{OE}{OK} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta DKE$ có $OH \parallel DE$.

Lại có J là trung điểm $HO \Rightarrow I$ là trung điểm DE .

8 Cho hình thang $ABCD$ có đáy nhỏ là AB và $BC = BD$. Gọi H là trung điểm

của đoạn thẳng CD . Đường thẳng (d) đi qua điểm H cắt các đường thẳng AC, AD lần lượt tại E, F sao cho D nằm giữa A và F . Chứng minh rằng $\widehat{DBF} = \widehat{EBC}$.



Gọi M là giao điểm của BF và CD , N là giao của BE và CD , K là giao của EF và AB .

Xét tam giác FAB có $DM \parallel AB \Rightarrow \frac{DM}{AB} = \frac{FD}{FA}$ (1)

Xét tam giác FAK có $DH \parallel AK \Rightarrow \frac{DH}{AK} = \frac{FD}{FA}$ (2)

Xét tam giác ENC có $AB \parallel NC \Rightarrow \frac{NC}{AB} = \frac{EC}{EA}$ (3)

Xét tam giác EHC có $AK // HC \Rightarrow \frac{HC}{AK} = \frac{EC}{EA}$ (4)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DM}{AB} = \frac{DH}{AK} \Rightarrow DM = \frac{AB \cdot DH}{AK}$ (5)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{NC}{AB} = \frac{HC}{AK} \Rightarrow NC = \frac{HC.AB}{AK} = \frac{HD.AB}{AK}$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $DM = NC$.

Vì $BD = BC$ nên tam giác BCD cân tại B , suy ra $\widehat{BDM} = \widehat{BCN}$.

Suy ra $\triangle BDM = \triangle BCN \Rightarrow \angle DBF = \angle EBC$.

9	Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả mỗi ngày. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả bưởi là 30000 đồng.
---	---

.....

	Tương ứng với giá bán là x thì số quả bán được trong 1 ngày là: $40 + \frac{10}{1000}(50000 - x) = -\frac{1}{100}x + 540$
	Gọi $f(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($f(x)$: đồng), ta có: $f(x) = \left(-\frac{1}{100}x + 540\right) \cdot (x - 30000) = -\frac{1}{100}x^2 + 840x - 16200000$
	Ta có: $f(x) = -\left(\frac{1}{10}x - 4200\right)^2 + 1440000 \leq 1440000, \forall x \in [30000; 50000]$
	$\max_{x \in [30000; 50000]} f(x) = f(42000) = 1440000$ Vậy với giá bán 42000 đồng mỗi quả bưởi thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.
10	Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh $\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3 + c^3}{a^2} > \sqrt{2}$
	Chúng minh bổ đề: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b}, \forall x, y \in \mathbb{Z}; a, b > 0$ Thật vậy: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)(x^2b + y^2a) \geq ab(x+y)^2$ $\Leftrightarrow (xb - ya)^2 \geq 0$ (luôn đúng). Dấu “=” xảy ra khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.
	Áp dụng bổ đề ta có: ... $\frac{a^4}{a(b^2 - bc + c^2)} + \frac{b^4}{a^2b} + \frac{c^4}{a^2c} \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a(b^2 - bc + c^2) + a^2b + a^2c} - \frac{1}{a[b^2 - bc + c^2 + a(b+c)]}$
	Theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $a(b+c) \leq \frac{a^2 + (b+c)^2}{2}$ $\Rightarrow \frac{1}{a[b^2 - bc + c^2 + a(b+c)]} \geq \frac{1}{a\left[b^2 - bc + c^2 + \frac{a^2 + (b+c)^2}{2}\right]}$ $= \frac{2}{a(a^2 + 3b^2 + 3c^2)} - \frac{2}{a(3 - 2a^2)}$
	Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số $2a^3, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ ta có $2a^3 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 3a$

$$\Rightarrow a(3 - 2a^2) \leq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{2}{a(3 - 2a^2)} \geq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3 + c^3}{a^2} \geq \sqrt{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a = b = c \\ a = b + c \\ 2a^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{array} \right. \text{ (không xảy ra).}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

Vậy $\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3 + c^3}{a^2} > \sqrt{2}$ (ĐPCM).