

Câu 1. (2 điểm) Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $x^2 - x - 6$

b) $x^3 - x^2 - 14x + 24$

Câu 2. (3 điểm) Cho biểu thức
$$A = \frac{3x^3 - 14x^2 + 3x + 36}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$$

a) Tìm giá trị của x để biểu thức A xác định

b) Tìm giá trị của x để biểu thức A có giá trị bằng 0

c) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức A có giá trị nguyên.

Câu 3. (5 điểm) Giải phương trình:

a) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$

b) $\frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$

c) $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$ (phương trình có hệ số đối xứng bậc 4)

Câu 4. (4 điểm)

a) Tìm GTLN : $x^2 + 5y^2 + 2xy - 4x - 8y + 2015$

b) Tìm GTLN : $\frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$

Câu 5. (6 điểm) Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA', BB', CC' , H là trực tâm.

a) Tính tổng $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$

b) Gọi AI là phân giác của ΔABC ; IM, IN thứ tự là phân giác của góc AIC và góc AIB . Chứng minh rằng: $AI \cdot BI \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$

c) Chứng minh : $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \geq 4$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

$$a) x^2 - x - 6$$

$$= x^2 + 2x - 3x - 6$$

$$= x(x + 2) - 3(x + 2)$$

$$= (x - 3)(x + 2)$$

$$b) x^3 - x^2 - 14x + 24$$

$$= x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x - 12x + 24$$

$$= x^2(x - 2) + x(x - 2) - 12(x - 2)$$

$$= (x - 2)(x^2 + x - 12)$$

$$= (x - 2)(x^2 + 4x - 3x - 12)$$

$$= (x - 2)(x + 4)(x - 3)$$

Câu 2.

$$3x^3 - 19x^2 + 33x - 9 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{3} \\ x \neq 3 \end{cases}$$

a) ĐKXD:

$$\frac{3x^3 - 14x^2 + 3x + 36}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$$

$$b) \frac{3x^3 - 14x^2 + 3x + 36}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$$

$$= \frac{(x - 3)^2(3x + 4)}{(3x - 1)(x - 3)} = \frac{3x + 4}{3x - 1}$$

$$A = 0 \Leftrightarrow 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} (tm)$$

Vậy $x = -\frac{4}{3}$ thì $A = 0$

$$c) A = \frac{3x + 4}{3x - 1} = \frac{3x - 1 + 5}{3x - 1} = 1 + \frac{5}{3x - 1}$$

$$\forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{5}{3x-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3x-1 \in U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

$3x - 1$	$- 5$	$- 1$	1	5
x	$- 4 / 3(ktm)$	$0(tm)$	$2 / 3(ktm)$	$2(tm)$

$$\text{Vậy } x \in \{0; 2\} \text{ thì } A \in \mathbb{Z}$$

Câu 3.

a) $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$

Giải phương trình được tập nghiệm $S = \{-2; 1\}$

b) $\frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$

$$\frac{x+1}{2008} + \frac{x+2}{2007} + \frac{x+3}{2006} = \frac{x+4}{2005} + \frac{x+5}{2004} + \frac{x+6}{2003}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2008} + 1 + \frac{x+2}{2007} + 1 + \frac{x+3}{2006} + 1 = \frac{x+4}{2005} + 1 + \frac{x+5}{2004} + 1 + \frac{x+6}{2003} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2009}{2008} + \frac{x+2009}{2007} + \frac{x+2009}{2006} = \frac{x+2009}{2005} + \frac{x+2009}{2004} + \frac{x+2009}{2003}$$

$$\Leftrightarrow (x+2009) \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2009 \left(\frac{1}{2008} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2006} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2004} - \frac{1}{2003} \right) \neq 0$$

c) $6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0$

Chia cả 2 vế cho x^2 ta được:

$$6x^2 - 5x - 38 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 5 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 38 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } x + \frac{1}{x} = y \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

Thay vào phương trình (*) rồi giải phương trình ta được:

$$S = \left\{ -2; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{3} \right\}$$

Câu 4.

a) $P = x^2 + 5y^2 + 2xy - 4x - 8y + 2015$

$$P = x^2 + 5y^2 + 2xy - 4x - 8y + 2015$$

$$P = (x^2 + 2xy + y^2) - 4(x + y) + 4 + 4y^2 - 4y + 1 + 2010$$

$$= (x + y)^2 - 4(x + y) + 4 + (2y - 1)^2 + 2010$$

$$= (x + y - 2)^2 + (2y - 1)^2 + 2010 \geq 2010$$

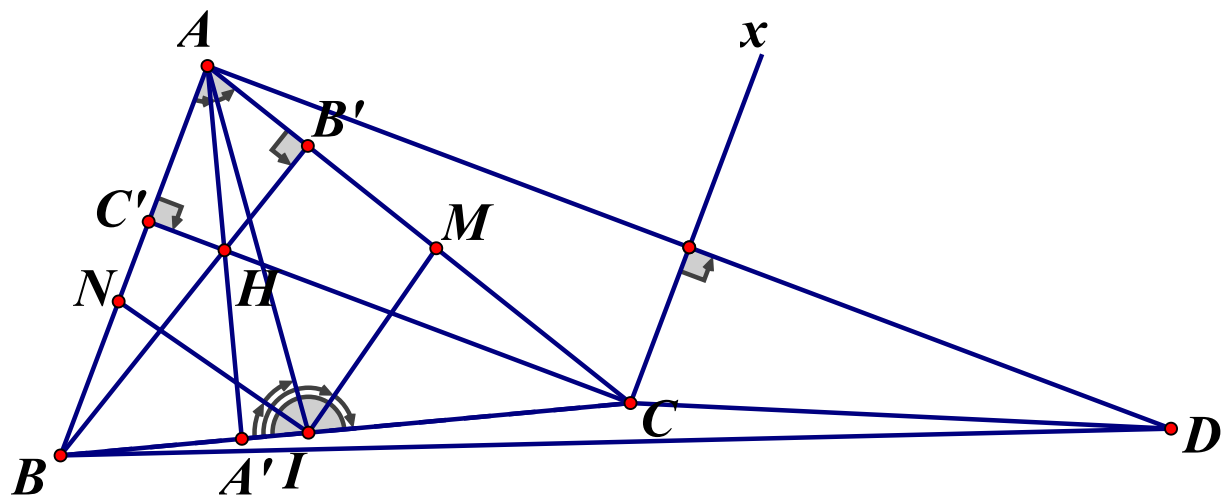
Suy ra $\text{Min} P = 2010 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}; y = \frac{1}{2}$

b) $Q = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$

$$= \frac{3(x+1)}{x^2(x+1) + (x+1)} = \frac{3(x+1)}{(x^2 + 1)(x+1)} = \frac{3}{x^2 + 1}$$

Q đạt GTLN $\Leftrightarrow x^2 + 1$ đạt GTNN mà $x^2 + 1 \geq 1$
 $\Rightarrow$ GTLN của C là 3 $\Leftrightarrow x = 0$

Câu 5.



$$\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} HA' \cdot BC}{\frac{1}{2} AA' \cdot BC} = \frac{HA'}{AA'}$$

a)

$$\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{HC'}{CC'}; \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \frac{HB'}{BB'}$$

Tương tự:

$$\Rightarrow \frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = 1$$

b) Áp dụng tính chất phân giác vào các tam giác ABC, ABI, AIC :

$$\frac{BI}{IC} = \frac{AB}{AC}; \frac{AN}{NB} = \frac{AI}{BI}; \frac{CM}{MA} = \frac{IC}{AI}$$

$$\Rightarrow \frac{BI}{IC} \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AI}{BI} \cdot \frac{IC}{AI} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{IC}{BI} = 1$$

$$\Rightarrow BI \cdot AN \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$$

c) Vẽ $Cx \perp CC'$. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Cx

- Chứng minh được $\square BAD$ vuông; $CD = AC, AD = 2CC'$

- Xét 3 điểm B, C, D ta có: $BD \leq BC + CD$

- $\triangle BAD$ vuông tại A nên: $AB^2 + AD^2 = BD^2$

$$\Rightarrow AB^2 + AD^2 \leq (BC + CD)^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + 4CC'^2 \leq (BC + AC)^2$$

$$\Leftrightarrow 4CC'^2 \leq (BC + AC)^2 - AB^2$$

$$\text{Tương tự: } 4AA'^2 \leq (AB + AC)^2 - BC^2; \quad 4BB'^2 \leq (AB + BC)^2 - AC^2$$

$$\text{Chúng minh được: } 4(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2) \leq (AB + BC + AC)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \geq 4$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow BC = AC = AB \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$$