ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2013-2014
MÔN THI: TOÁN 8
Ngày thi: 12/04/2014
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1. (4 điểm)

Cho biểu thức: $$A=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+1}.\left(\frac{x+1}{3x}-x-1\right)\right]:\frac{x-1}{x}$$

a) Rút gọn biểu thức A
b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên

Câu 2. (4 điểm)

a) Chứng minh rằng: $A=\left[n^3(n^2-7)^2-36n\right]\vdots 7$ với $\forall n\in\mathbb{Z}$
b) Cho $P=n^4+4$. Tìm tất cả các số tự nhiên n để P là số nguyên tố.

Câu 3. (4 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2+9x+20}+\frac{1}{x^2+11x+30}+\frac{1}{x^2+13x+42}=\frac{1}{18}$
b) Cho a,b,c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A=\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3$$

Câu 4. (6 điểm)

Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB kẻ hai tia Ax, By cùng vuông góc với AB. Trên tia Ax lấy điểm C (C khác A). Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OC, đường thẳng này cắt By tại D. Từ O hạ đường vuông góc OM xuống CD (M thuộc CD)

a) Chứng minh $OA^2=AC.BD$
b) Chứng minh tam giác AMB vuông
c) Gọi N là giao điểm của BC và AD. Chứng minh $MN\,//\,AC$

Câu 5. (2 điểm)

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a+bc}{b+c}+\frac{b+ca}{c+a}+\frac{c+ab}{a+b}\geq 2$$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) $$A=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+1}.\left(\frac{x+1}{3x}-x-1\right)\right]:\frac{x-1}{x}$$

$$A=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2}{x+1}.\frac{(x+1)-3x(x+1)}{3x}\right]:\frac{x-1}{x}$$

$$A=\left[\frac{2}{3x}-\frac{2.(1-3x)}{3x}\right].\frac{x}{x-1}$$

$$A=2.\frac{x}{x-1}=\frac{2x}{x-1}$$

b) Với $x\neq 0; x\neq \pm 1,$ Ta có: $A=\frac{2x}{x-1}=2+A=\frac{2x}{x-1}=2+\frac{2}{x-1}$

Để $A\in\mathbb{Z}$ thì $(x-1)$ phải là ước của 2 $\Rightarrow x-1\in\{\pm 1;\pm 2\}$

Đối chiếu điều kiện tìm được $x=2$ hoặc $x=3$ thỏa mãn

Câu 2.

a) Ta có: $A=\left[n^3(n^2-7)^2-36n\right]$

$=n\left[n(n^2-7)-6\right]\left[n(n^2-7)+6\right]=n(n^3-7n-6)(n^3-7n+6)$

$=n(n^3-n-6n-6)(n^3-n-6n+6)=n\left[(n^2-1)-6(n+1)\right]\left[n(n^2-1)-6(n-1)\right]$

$=n(n+1)(n^2-n-6)(n-1)(n^2+n-6)=n(n+1)(n+2)(n-3)(n-1)(n-2)(n+3)$

Do đó A là tích của 7 số nguyên liên tiếp $\Rightarrow A\,\vdots\,7 \quad \forall n\in\mathbb{Z}$

b) $P=n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2$

$=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)=\left[(n-1)^2+1\right]\left[(n-1)^2+1\right]$

Vì n là số tự nhiên nên $(n+1)^2+1\geq 2$. Như vậy muốn P là số nguyên tố thì ta phải có $(n-1)^2+1=0 \Leftrightarrow (n-1)^2=0 \Rightarrow n=1$

Khi đó $P=5$ là số nguyên tố

Câu 3.

a) Ta có:

$x^2+9x+20=(x+4)(x+5)$

$x^2+11x+30=(x+5)(x+6)$

$x^2+13x+42=(x+6)(x+7)$

TXĐ: $x\neq -4; x\neq -5; x\neq -6; x\neq -7$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)}+\frac{1}{(x+5)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+7)}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow 18(x+7)-18(x+4)=(x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-13 & (tm) \\ x=2 & (tm) \end{array}\right.$$

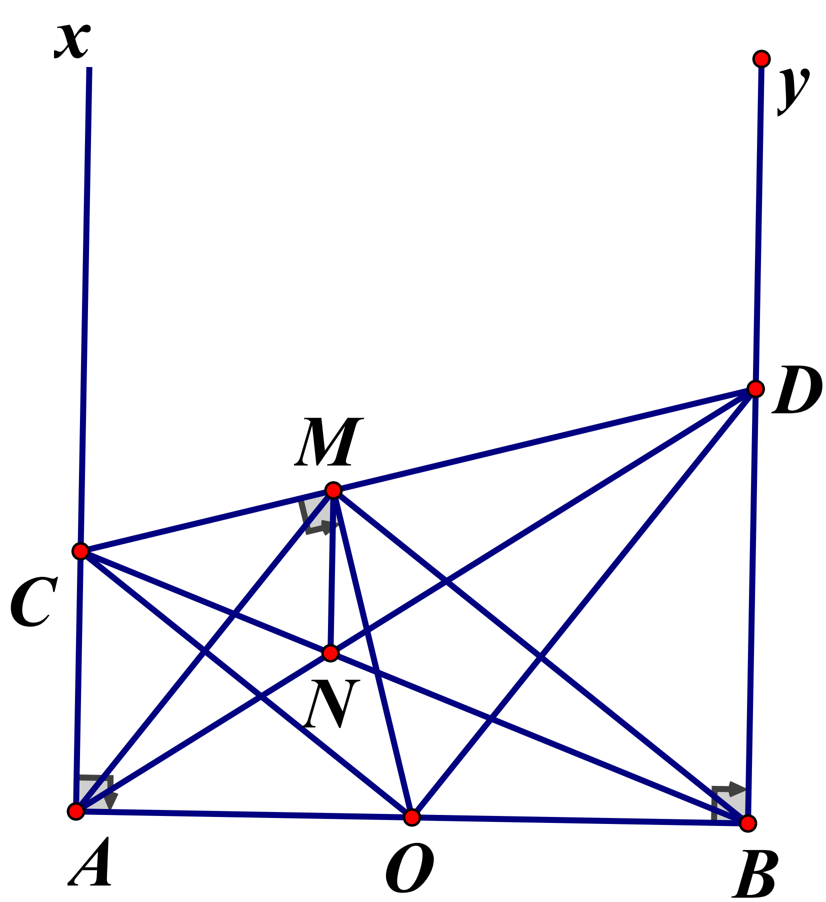
b) Đặt $b+c-a=x>0; c+a-b=y>0; a+b-c=z>0$. Ta có: $x,y,z>0$

Từ đó suy ra : $a=\frac{y+z}{2}; b=\frac{x+z}{2}; c=\frac{x+y}{2}$

Thay vào ta được: $A=\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\right]$

Từ đó suy ra $A\geq\frac{1}{2}(2+2+2)\Rightarrow A\geq 3$. Dấu "= " xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

Câu 4.



a) Xét ΔACO và ΔBOD có:

$\hat{A} = \hat{B} = 90^0; \widehat{COA} = \widehat{ODB}$ (cùng phụ với $\widehat{DOB}$)

Nên $\Delta ACO \sim \Delta BOD (g.g) \Rightarrow \dfrac{AO}{AC} = \dfrac{BD}{BO} \Rightarrow AO.BO = AC.BD$

Mà $AO = BO$ nên $AO^2 = AC.BD$

b) Xét ΔCMO và ΔOMD có:

$\widehat{CMO} = \widehat{OMD} = 90^0; \widehat{OCM} = \widehat{DOM}$ (cùng phụ với $\widehat{COM}$)

$\Rightarrow \Delta CMO \sim \Delta OMD \Rightarrow \dfrac{CO}{OD} = \dfrac{OM}{MD} \qquad (1)$

Mà $\Delta ACO \sim \Delta BOD \Rightarrow \dfrac{CO}{OD} = \dfrac{AO}{OD} \Rightarrow \dfrac{CO}{OD} = \dfrac{OB}{BD} (Do \quad AO = OB)(2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{OM}{MD} = \dfrac{OB}{BD} \Rightarrow \Delta OMD \sim \Delta OBD$

$\Rightarrow \widehat{MOD} = \widehat{BOD} \Rightarrow \Delta OMD = \Delta OBD$ (cạnh huyền, góc nhọn)

$\Rightarrow OM = OB = OA \Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại M

c) Ta có: $AC // BD$ (cùng vuông góc với $AB) \Rightarrow \dfrac{CN}{NB} = \dfrac{AC}{BD}$

Mà $BD = MD$ ($\Delta OMD = \Delta OBD$)

Tương tự ta chứng minh $AC = CM$

Nên $\dfrac{CN}{BN} = \dfrac{CM}{DM} \Rightarrow MN // BD // AC$

Câu 5.

- Nhận xét : có $a + bc = a(a+b+c) + bc = (a+b)(c+a)$

  Tương tự: $b + ca = (b+a)(b+c); \quad c + ab = (c+a)(c+b)$

  Do đó: $VT = \dfrac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \dfrac{(b+a)(b+c)}{c+a} + \dfrac{(c+a)(c+b)}{a+b}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+a)(b+c)}{c+a} \geq 2(a+b)$$

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(a+c)$$

$$\frac{(b+a)(b+c)}{a+c} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq 2(b+c)$$

Vậy $2.VT \geq 4(a+b+c)=4 \Leftrightarrow VT \geq 2$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$